Routine-Zettel 3.

1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Ist die Matrix ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Wenn ja, so gebe man eine derartige Diagonalmatrix an.

2. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 3 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 2 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 & 3 \end{bmatrix},$$

mit $a_1, ..., a_6, b_0, ..., b_6 \in \mathbb{R}$. Für welche Werte $a_1, ..., a_6, b_0, ..., b_6$ sind die Matrizen A, B äquivalent? Wann sind A, B ähnlich?

3. Gegeben seien die beiden Basen

$$\mathcal{B} = [\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}], \quad \mathcal{C} = [\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}]$$

von $\mathbb{R}^3$. Man betrachte die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man berechne $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$.

4. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Sei $f = f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Man bestimme Basen von $\mathrm{Kern}(f_A)$ und $\mathrm{Bild}(f_A)$.

Welche der folgenden Gleichungssysteme besitzen Lösungen ?

$$AX = 0, \quad AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Falls Lösungen existieren, gebe man alle Lösungen an.

5. Man gebe alle invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an.

6. Welche Matrizen in $M(n \times n, K)$ (K ein Körper) sind zur Einheitsmatrix I_n äquivalent?

7. Welche Matrizen in $M(n \times n, K)$ (K ein Körper) sind zur Einheitsmatrix I_n ähnlich?

8. Sei K ein Körper. Zeige: Sind die Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ ähnlich, und ist A nilpotent, so ist auch B nilpotent.

9. Sei K ein Körper. Beweise: Ein Polynom $f \in K[T]$ vom Grad 3 ist genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle besitzt.

10. Zeige: Es gibt Polynome $f \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad 4, die keine Nullstellen besitzen, aber dennoch nicht irreduzibel sind.

Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$

11. Man gebe einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass 0 und $\mathbb{R}^2$ die einzigen f-invarianten Unterräume sind.

12. Man gebe einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass 0, $\mathbb{R}^2$ und die x-Achse $\{(r,0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ die einzigen f-invarianten Unterräume sind.

13. Man gebe einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass 0, $\mathbb{R}^2$, die x-Achse $\{(r,0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ und die y-Achse $\{(0,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ die einzigen f-invarianten Unterräume sind.

14. Man gebe alle Endomorphismen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass jeder Unterraum von $\mathbb{R}^2$ f-invariant ist.

15. Gibt es einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dessen Bild die x-Achse $\{(r,0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist, und für den $f^2 = 0$ gilt ?

16. Gibt es einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dessen Bild die x-Achse $\{(r,0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist, und für den $f^2 = f$ gilt ?

17. Man beweise mit Hilfe der Matrizen-Multiplikation: Die Hintereinanderschaltung zweier Spiegelungen an Ursprungsgeraden ist eine Drehung um den Ursprung.

18. Man zeige, dass jede Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine "Drehstreckung" der Ebene beschreibt (unter einer Drehstreckung versteht man die Hintereinanderschaltung einer Drehung um den Ursprung mit einer Skalar-Multiplikation).

19. Wie sehen alle (2×2)-Matrizen A mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ aus, sodass das Bild von f_A die Diagonale $\{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist?

20. Man gebe drei verschiedene Endomorphismen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, deren Kern die Diagonale $\{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist.