Weihnachtszettel

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektoraum.

1. Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Man zeige folgende Aussagen (die beide als Steinitz'scher Austauschsatz oder Steinitz'sches Austauschlemma in der Literatur erscheinen). Dabei sollen natürlich wie üblich die in der Vorlesung bewiesenen Sätzen verwendet werden (hier also der Ergänzungssatz und die Tatsache, dass alle Basen die gleiche Kardinalität haben).

(a) Ist $w \neq 0$ ein Element von V, so gibt es einen Index s, sodass auch

$$\{b_1, ..., b_{s-1}, b_{s+1}, ..., b_n, w\}$$

eine Basis von V ist.
(Hier wird ein **geeignetes** Basiselement b_s gegen ein **vorgegebenes** Element w ausgetauscht.) Genauer gilt: Schreibt man $w = \sum_i \lambda_i b_i$, und ist $\lambda_s \neq 0$, so kann man b_s durch w ersetzen.

(b) Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von V, und $1 \leq s \leq n$, so gibt es ein $w \in \mathcal{E}$, sodass

$$\{b_1, ..., b_{s-1}, b_{s+1}, ..., b_n, w\}$$

eine Basis von V ist. (Hier wird also ein **vorgegebenes** Basiselement b_s gegen ein **geeignetes** Elemente w ausgetauscht.)

2. Man konstruiere im Vektorraum $\mathbb{Q}^4$ eine Teilmenge $\mathcal{M}$ der Kardinalität 999, sodass jede vierelementige Teilmenge von $\mathcal{M}$ eine Basis des $\mathbb{Q}^4$ ist.

3. **(a)** Zeigen Sie, daß folgende beiden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\dim V \geq n$.
(ii) Es gibt Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n \subseteq V$.

(b) Zeigen Sie, daß folgende beiden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\dim V \leq n$.
(ii) Gibt es Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_m \subseteq V$, so ist $m \leq n$.

4. In $\mathbb{Q}^3$ mit der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 sei die Menge S der folgenden 18 Vektoren gegeben:

(*) $$e_i,\ -e_i,\ e_i + e_j,\ e_i - e_j,\ -e_i + e_j,\ -e_i - e_j, \quad \text{mit} \quad i \neq j$$

und $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Gesucht ist eine Basis b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{Q}^3$, so daß sich alle Vektoren $v \in S$ als Linearkombinationen $v = \sum_i \lambda_i b_i$ schreiben lassen, wobei alle λ_i sowohl ganzzahlig, als auch entweder nicht-negativ oder nicht-positiv sind.

Abgabe: Donnerstag, 06.01.2005 (freigestellt, bringt gegebenenfalls Zusatzpunkte).

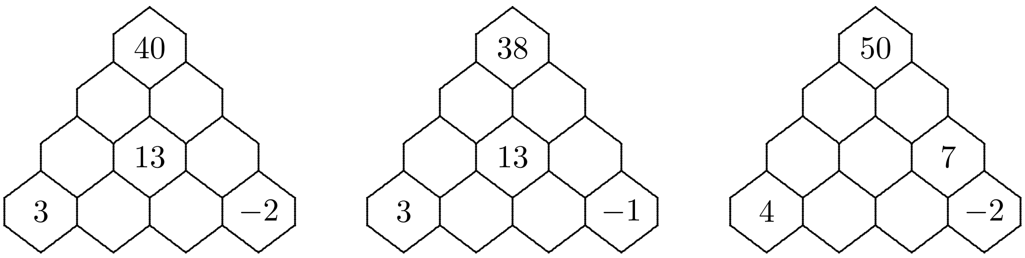
Erinnert sei an die 2. Probeklausur am Samstag, 08.01.2005, 9:15, Audimax.

Routine-Aufgaben

Rechnen in $\mathbb{C}$. Man nehme sich Zahlen in $\mathbb{C}$, addiere sie, multipliziere sie und bestimme z^{-1} (falls $0 \neq z \in \mathbb{C}$).

Rechnen in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p Primzahl). Man nehme sich Elemente in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, addiere sie, multipliziere sie und bestimme z^{-1} (falls $0 \neq z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Aufstellen und Lösen linearer Gleichugnssysteme. In den folgenden Pyramiden gelte die Regel: Der Eintrag in einer Wabe ist gleich der Summe der beiden darunterliegenden Waben (falls solche existieren). Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die drei Pyramiden mit rationalen Zahlen zu vervollständigen:



Gruppen-Homomorphismen. Sei $B(n, \mathbb{Q})$ die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$. Seien $d_1, \ldots, d_n$ ganze Zahlen. Ist $A = (a_{ij})_{ij}$ in $B(n, \mathbb{Q})$, so setze

$$\chi_d(A) = a_{11}^{d_1} \cdots a_{nn}^{d_n}.$$

Zeige: $\chi_d \colon B(n, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^*$ ist ein Gruppen-Homomorphismus.

Basen. Sei $K = \mathbb{Q}$.

1. Man schreibe den Vektor $[5, 6, 7, 8] \in \mathbb{Q}^4$ als Linearkombination der Vektoren

$$[1, 1, 0, 0],\ [0, 1, 1, 0],\ [0, 0, 1, 1],\ [4, 3, 2, 1]$$

2. Man ergänze die Vektoren von $\mathbb{Q}^9$

$$[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1], [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]$$

zu einer Basis des $\mathbb{Q}^9$.

3. Man suche eine Teilmenge der Menge

$$[1, 0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 0, 1], [0, 1, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 1, 1]$$

die eine Basis von $\mathbb{Q}^5$ ist.

4. Man zeige: die folgenden beiden Folgen von Vektoren

$$\mathcal{V} = \{[1, 2, 3],\ [1, 0, 1],\ [3, 2, 1]\}$$
$$\mathcal{W} = \{[1, 1, 1],\ [0, 1, 0],\ [1, 0, -2]\}$$

sind Basen des $\mathbb{Q}^3$. Man bestimme die Basiswechselmatrix.