

Aufgabe 32. Lösungsansatz.

Zu zeigen ist zweierlei: (1) Es sind Drehachsen und Drehwinkel anzugeben, die die Menge $P = \{A, B, C, D\}$ in sich abbilden. (2) Es ist zu zeigen, daß es keine weiteren Drehungen mit dieser Eigenschaft gibt.

(2) Sei ϕ eine Drehung, die die Menge $P = \{A, B, C, D\}$ in sich abbilden. Ist $\phi(a) = a$ für alle $a \in P$, so ist $\phi = 1$. Seien also $a \neq b \in P$ mit $\phi(a) = b$.

Fall 1. Sei $\phi(b) = a$. Dann wird die Gerade, die durch a und b geht, auf sich abgebildet und $p = \frac{1}{2}(a + b)$ bleibt unter ϕ invariant (er ist der einzige Punkt auf dieser Gerade, der von a und b den gleichen Abstand hat). Sei $P \setminus \{a, b\} = \{c, d\}$. Diese Menge wird ebenfalls auf sich abgebildet, insbesondere auch der Mittelpunkt $q = \frac{1}{2}(c + d)$ zwischen c und d . Dies ist ein zweiter Fixpunkt, und die Gerade g durch p und q ist Fixgerade, also die Drehachse. Es handelt sich also um eine Drehung um den Winkel π um diese Achse. Insgesamt kann es drei derartige Drehungen geben, mit den Geraden durch $\frac{1}{2}(A + B)$ und $\frac{1}{2}(C + D)$, durch $\frac{1}{2}(A + C)$ und $\frac{1}{2}(B + D)$, und durch $\frac{1}{2}(A + D)$ und $\frac{1}{2}(B + C)$ als Drehachsen.

Fall 2: Sei $\phi(b) = c$ mit $c \neq a$ (und natürlich $c \neq b$). Wir nehmen zuerst an, daß $\phi(c) = d \neq a$ gilt. Dann ist $\phi(d) = a$. Die Abbildung ϕ^2 ist (wegen $\phi^2(a) = c, \phi^2(c) = a, \phi^2(b) = d$ und $\phi^2(d) = b$) eine Drehung um den Winkel π , wie im Fall 1 beschrieben, insbesondere ist die Drehachse von ϕ^2 die Gerade durch $\frac{1}{2}(a + c)$ und $\frac{1}{2}(b + d)$. Da wir voraussetzen, dass ϕ selbst eine Drehung ist, muß ϕ die gleiche Drehachse haben, aber $\frac{1}{2}(a + c)$ wird unter ϕ auf $\frac{1}{2}(b + d) \neq \frac{1}{2}(a + c)$ abgebildet, ein Widerspruch.

Wir sehen also: $\phi(c) = a$, und demnach wird die Ebene durch a, b, c in sich abgebildet, und der Mittelpunkt $\frac{1}{3}(a + b + c)$ der Punkte a, b, c bleibt unter ϕ invariant. Sei $P \setminus \{a, b, c\} = \{d\}$, natürlich gilt $\phi(d) = d$. Als Fixgerade und demnach Achse der Drehung erhalten wir die Gerade h durch $\frac{1}{3}(a + b + c)$ und d . Insgesamt kann es vier derartige Achsen geben (durch jeden der Punkte A, B, C, D eine). Die zyklische Vertauschung von a, b, c zeigt, daß es sich hier um eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ oder $\frac{4\pi}{3}$ handelt.

Wir haben hiermit die möglichen Drehachsen und Drehwinkel bestimmt.

(1) Ganz einfach hinzuschreiben ist die Achse durch die Punkte $\frac{1}{2}(A + B)$ und $\frac{1}{2}(C + D)$, dies ist die dritte Koordinatenachse, die entsprechende Drehung ist durch

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Natürlich vertauscht diese Drehung A und B , und auch C und D .

Die Achse durch die Punkte A und $\frac{1}{3}(B + C + D)$ ist die Ursprungsgerade durch A , also $\mathbb{R}A$, eine entsprechende Drehmatrix ist

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

(Wie erhält man diese Matrix? Zum Beispiel kann man $[C \mid D \mid B] \cdot [B \mid C \mid D]^{-1}$ ausrechnen.)