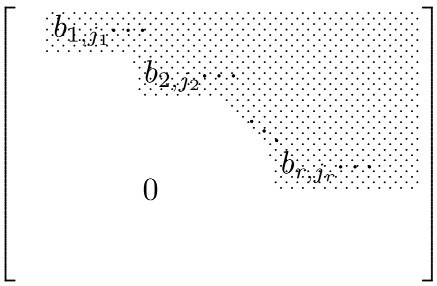
Lineare Algebra: Übungszettel (Anwesenheitsübungen) WS 1999/2000

Beschreibung von Mengen von Matrizen

Die Zeilenstufenform

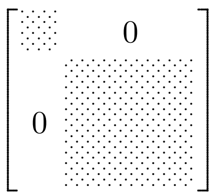


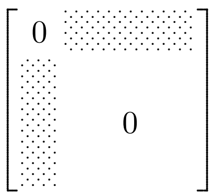
wurde folgendermaßen definiert: Dies ist eine $(m \times n)$-Matrix $B = (b_{ij})_{ij}$, so daß gilt: Gegeben sind $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ mit

$$\begin{aligned} b_{i,j_i} &\neq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq r \\ b_{ij} &= 0 \quad \text{falls} \quad j < j_i \quad \text{und} \quad 1 \leq i \leq r \\ b_{ij} &= 0 \quad \text{falls} \quad i > r. \end{aligned}$$

Gesucht sind nun analoge Beschreibungen der folgenden Mengen von $(n \times n)$-Matrizen (es handelt sich also jeweils um quadratische Matrizen):

(1) Im schraffierten Bereich dürfen die Koeffizienten beliebig sein, außerhalb sind nur Nullen erlaubt:



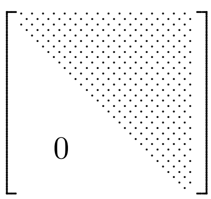


dabei sei die obere linke Ecke eine $(r \times r)$-Matrix.

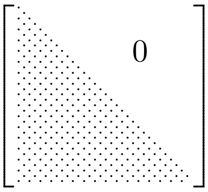
(2) Die Menge der Diagonal-Matrizen (d.h: außerhalb der "Hauptdiagonale" stehen Nullen).

(3) Die Monomial-Matrizen (d.h.: In jeder Zeile und in jeder Spalte gibt es genau ein von Null verschiedenes Element).

(4) Die oberen Dreiecksmatrizen



(5) Die unteren Dreiecksmatrizen



(6) Die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & \iddots & & \\ & 1 & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

(Links oben und rechts unten stehen nur Nullen.)

Antworten.

(1) Es ist $b_{ij} = 0$ für alle Paare (i, j) mit folgender Eigenschaft:
Links:

$$\begin{array}{ll} & \text{falls} \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{und} \quad r < j \leq n \\ \text{und auch} & \\ & \text{falls} \quad r < i \leq n \quad \text{und} \quad 1 \leq j \leq r \end{array}$$

Rechts:

$$\begin{array}{ll} & \text{falls} \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{und} \quad 1 \leq j \leq r \\ \text{und auch} & \\ & \text{falls} \quad r < i \leq n \quad \text{und} \quad r < j \leq n \end{array}$$

(2) $b_{ij} = 0$ falls $i \neq j$.

(3) Zu jedem $1 \leq i \leq n$ gibt es ein j_i (mit $1 \leq j_i \leq n$) mit folgenden Eigenschaften:
(a) Ist $i \neq i'$, so ist $j_i \neq j_{i'}$.
(b) Es ist $b_{i,j_i} \neq 0$ für jedes i.
(c) Ist $b_{ij} \neq 0$, so ist $j = j_i$.

(4) $b_{ij} = 0$ für $i > j$.

(5) $b_{ij} = 0$ für $i < j$.

(6) $b_{i,n-i+1} = 1$ für $1 \leq i \leq n$ und $b_{ij} = 0$ falls $j \neq n - i + 1$.

Zum Üben. Hier drei Matrizen, die durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform gebracht werden sollen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zeilenstufenform — Abgabetermin: Donnerstag, 28.10.99, 10:15

1. Zeige: Jede Matrix läßt sich durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $C = (c_{ij})_{ij}$ mit folgenden Eigenschaften überführen: Gegeben sind $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ mit

$$\begin{aligned}
c_{i,j_i} &\neq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq r, \\
c_{ij} &= 0 \quad \text{falls} \quad j < j_i \quad \text{und} \quad 1 \leq i \leq r, \\
c_{ij} &= 0 \quad \text{falls} \quad i > r, \\
c_{t,j_i} &= 0 \quad \text{falls} \quad t \neq i.
\end{aligned}$$

2. Zeige: Jede Matrix in Zeilenstufenform läßt sich durch elementare Spaltenumformungen in folgende Form bringen:

$$\left[\begin{array}{c:c}
\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\
\hdashline
0 & 0
\end{array}\right]$$

3. Geben Sie eine Matrix A an, die durch elementare Zeilenumformungen in zwei verschiedene Matrizen B, B' in Zeilenstufenform mit Pivot-Koeffizienten 1 überführt werden kann.

Hinweis: Bei einer derartigen Fragestellung vesucht man, ein Beispiel anzugeben, das so einfach wie möglich ist! Zu notieren sind natürlich auch die beiden Folgen von Zeilenumformungen und die Matrizen B, B', die man erhält.

4. Bringen Sie die auf der nächsten Seite notierte Matrix in Zeilenstufenform. (Sie dürfen **Maple** verwenden).

Hinweis: Jeder erhält seine eigene Matrix!

Hier das Kleingedruckte: Die Lösungen sind auf Blättern im DIN A4-Format (Name und Übungsgruppe nicht vergessen) **in deutlich lesbarer Form** abzugeben. Pro Aufgabe gibt es 4 Punkte, für die Bescheinigung über die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen sind 50 % der Punkte aller Übungszettel erforderlich.

Zur Arbeitstechnik: Auch wenn Sie mit anderen Studenten zusammen arbeiten (was auf jeden Fall erwünscht ist), müssen Sie die erarbeiteten Ergebnisse eigenständig formulieren. (Bei identischen Formulierungen wird davon ausgegangen, daß einfach abgeschrieben wurde und er werden keine Punkte vergeben; notwendig ist also, zumindest Wortwahl und Satzstellungen zu verändern!) Es wird erwartet, daß Sie die vorgelegten Lösungen der Aufgaben im Rahmen der Übungsstunden auch vortragen.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & -3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & -4 & -3 & 3 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 2 & 8 & 6 & 2 & 8 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 7 & 3 & 5 & 4 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinanten und Permutationen Abgabetermin: 4.11.99

5. Seien $q_1, \ldots, q_n$ rationale Zahlen. Zeige:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \cdots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \cdots & q_2^{n-1} \\ \cdots & & & & \cdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \cdots & q_n^{n-1} \end{bmatrix} = (-1)^n \prod_{i<j} (q_i - q_j).$$

6. Sei M eine Matrix der Form

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

wobei A und C quadratische Matrizen sind. Zeige $\det M = \det A \cdot \det C$.

7. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Es gebe eine $r \times r$ Matrix, die durch Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgeht und deren Determinante von Null verschieden ist, aber keine $(r+1) \times (r+1)$ Matrix mit diesen Eigenschaften. Zeige: Dann besitzt die Zeilenstufenform genau r Pivot-Positionen.

8. Zeige: Jede Permutation läßt sich als Hintereinanderschaltung von Transpositionen schreiben.

Sei A eine $(m \times n)$-Matrix. Es gebe eine $r \times r$ Matrix, die durch Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgeht und deren Determinante von Null verschieden ist, aber keine $(r+1) \times (r+1)$ Matrix mit diesen Eigenschaften. Zeige: Dann besitzt die Zeilenstufenform genau r Pivot-Positionen.

Ist A eine $(m \times n)$-Matrix und sind r paarweise verschiedene Zeilenindizes i_s und r paarweise Spaltenindizes j_s (dabei sei jeweils $1 \leq s \leq r$) gegeben, so sei $A(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r)$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen aller Zeilen i mit $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ und aller Spalten j mit $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$ entsteht.

Beweis im Fall $m = r$. Es sei $A' = A(1, 2, \ldots, m; j_1, \ldots, j_m)$ mit $\det A' \neq 0$. Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir aus A eine Matrix B in Zeilenstufenform. Diese Matrix habe s Pivot-Positionen. Die verwendeten Zeilenumformungen bringen die Matrix A' in die Form $B' = B(1, 2, \ldots, m; j_1, \ldots, j_m)$, dabei ändert sich die Determinante nur um einen von Null verschiedenen Faktor, also ist $\det B' \neq 0$. Wäre nun $s < m$, so hätte B (also auch B') eine Null-Zeile, dann wäre aber $\det B' = 0$, dies geht nicht. Also muß $s = m$ gelten.

Bemerkung. Für den allgemeinen Fall empfiehlt es sich, Zeilen-Vertauschungen beim Bilden einer Zeilenstufenform erst als letztes vorzunehmen, also zuerst nur mit Zeilenumformungen der Form (III) zu arbeiten. Was man auf diese Weise erhalten kann, sollte man eine "Zeilen-Pivot-Form" nennen:

Die Zeilen-Pivot-Form einer Matrix. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ ist in *Zeilen-Pivot-Form*, falls es r paarweise verschiedene Zeilenindizes i_s und r paarweise verschiedene Spaltenindizes j_s (dabei sei jeweils $1 \leq s \leq r$) gibt mit:

(1) Es ist $a_{i_s,j_s} \neq 0$, für $1 \leq s \leq r$.
(2) Ist $j < j_s$, so gilt $a_{i_s,j} = 0$, für $1 \leq s \leq r$.
(3) Ist $i \neq i_s$, so ist $a_{i,j_s} = 0$, für $1 \leq s \leq r$.
(4) Es ist $a_{ij} = 0$ falls $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Durch elementare Zeilenumformungen der Form (III) kann man jede Matrix in Zeilen-Pivot-Form bringen: Wähle eine beliebige Zeile, die ein von Null verschiedenes Element besitzt, etwa die Zeile mit Index i_1. Sei j_1 minimal mit $a_{i_1,j_1} \neq 0$. Für $s = 1$ gilt also (1), (2); durch Umformungen der Form (III) erhält man (3). Und so weiter ....

Eine Matrix in Zeilen-Pivot-Form kann man durch Zeilenvertauschungen in Zeilenstufenform bringen.

Beweis im allgemeinen Fall. Es sei $\det A(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r) \neq 0$. Bringe A in Zeilen-Pivot-Form, beginne dabei mit den Zeilen mit Index $i_1, \ldots, i_r$. Wegen des Spezialfalls $r = m$ wissen wir, daß diese Zeilen r Pivot-Positionen besitzen. Wir erhalten also aus A eine Zeilen-Pivot-Form mit mindestens r Pivot-Positionen, also nach Umordnen eine Zeilenstufenform mit mindestens r Pivot-Positionen.

Umkehrung: Durch elementare Zeilenumformungen sei aus A eine Matrix B in Zeilenstufen-Form entstanden und B habe mindestens r Pivot-Positionen. Dann erhält man aus A durch Verwendung von Zeilenumformungen der Form (III) auch eine Matrix C in Zeilen-Pivot-Form mit mindestens r Pivot-Positionen. Wähle r Pivot-Positionen von C aus, etwa $(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)$. Sei

$$A' = A(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r) \quad \text{und} \quad C' = C(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r).$$

Dann ist $\det C' \neq 0$, also auch $\det A' \neq 0$, denn C' entsteht aus A' durch elementare Zeilenumformungen der Form (III).

Matrizen-Multiplikation Abgabetermin: 11.11.99

9. A, B seien $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie: Sind A, B obere Dreiecksmatrizen, so ist auch AB eine obere Dreiecksmatrix.

10. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine $(n \times n)$-Matrix. Die *Spur* von A ist durch $\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ definiert.
Seien A, B $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie $\operatorname{spur}(AB) = \operatorname{spur}(BA)$.

11. Man nennt A eine *monomiale* Matrix, falls es in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen von Null verschiedenen Koeffizienten gibt. Zeigen Sie:
(a) Das Produkt zweier monomialer $(n \times n)$-Matrizen ist wieder monomial.
(b) Zu jeder monomialen Matrix A gibt es eine monomiale Matrix B mit $AB = BA = I$.
(c) Jede monomiale Matrix ist Produkt einiger Transpositionsmatrizen und einer Diagonalmatrix.

12. Seien A, A' $(m \times n)$-Matrizen, seien B, B' $(n \times r)$-Matrizen. Zeige:
(a) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.
(b) $A(B + B') = AB + AB'$.
(c) $(A + A')B = AB + A'B$.

Zum Üben! Lösungen sollen aber **nicht** abgegeben werden!
Und: Nicht alles macht Sinn!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrizen-Multiplikation II.

13. (a) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle (2×2)-Matrizen A mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, für die

$$A \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} A$$

gilt.

Hinweis: Es gibt **zwei** wesentlich verschiedene Fälle. Welche?

(b) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle (3×3)-Matrizen A mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, für die

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} A$$

gilt.

Hier gibt es **fünf** verschiedene Fälle, drei davon sind aber durchaus ähnlich, jedenfalls auf den zweiten Blick.

14. (a) Zeigen Sie: Ist A eine (2×2)-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, so gilt $A^2 = 0$ genau dann, wenn sowohl $\det A = 0$ als auch $\operatorname{spur} A = 0$ gilt.

(b) Geben Sie (2×2)-Matrizen B, C an mit $\det B = 0$ und $\operatorname{spur} C = 0$, aber $B^2 \neq 0$ und $C^2 \neq 0.$.

(c) Geben Sie eine (3×3)-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ an, mit $\det A = 0$, $\operatorname{spur} A = 0$, aber $A^3 \neq 0$.

15. Zeigen Sie: Jede $(n \times n)$-Matrix läßt sich als Produkt von $n^2 + n$ Elementarmatrizen der Form $S_i(\lambda)$, $Q_{ij}(\mu)$, P_{ij} schreiben.

Zum Knobeln. Kann man $n^2 + n$ durch $n^2 + n - 1$ oder eine noch kleinere Zahl ersetzen?

Und Determinanten.

16. Seien $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, $C = (c_{ij})_{ij}$ $(n \times n)$-Matrizen. Es gebe einen Zeilenindex r mit folgenden Eigenschaften: $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$ falls $i \neq r$ und $c_{rj} = a_{rj} + b_{rj}$ (für alle j). Dann ist

$$\det C = \det A + \det B.$$

Zum Üben (aber nicht zum Abgeben): Schreiben Sie folgende Matrizen als Produkte von Elementarmatrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ähnlichkeit

Seien A, B $(n \times n)$-Matrizen. Definition: Die Matrix A ist ähnlich zu B, falls es eine invertierbare Matrix P mit $B = P^{-1}AP$ gibt.

17. Zeige:

(1) Ist A ähnlich zu B, so ist B ähnlich zu A.

(2) Ist A ähnlich zu B und B ähnlich zu C, so ist A ähnlich zu C.

(3) Ist A ähnlich zu B, so ist $\operatorname{spur} A = \operatorname{spur} B$ und $\det A = \det B$.

(4) Ist A ähnlich zu B und ist B eine Skalarmatrix, so ist $A = B$.

18. Sei $P = (p_{ij})_{ij}$ die $(n \times n)$-Matrix mit $p_{i,n-i+1} = 1$ und $p_{ij} = 0$ falls $j \neq n - i + 1$. Zeige:

(a) $P^{-1} = P$.

(b) Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so ist PAP eine untere Dreiecksmatrix.

(c) Ist A eine untere Dreiecksmatrix, so ist PAP eine obere Dreiecksmatrix.

19. Sei $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$. Zeige: Genau dann ist A zu einer Diagonalmatrix ähnlich, wenn $\lambda \neq \mu$ gilt.

Nilpotenz.

20. Sei $A^n = 0$. Dann ist $I + A$ invertierbar.

(Es gilt sogar: Ist $\lambda \neq 0$, so ist $\lambda I + A$ invertierbar.)

Das Kleingedruckte, Teil II:

(1) Die Übungsgruppenleiter haben herbe Kritik am Aufschreiben der Aufgaben geäußert. Es ist unabdingbar notwendig, daß vor dem Aufschreiben der Lösungen eine Lösungsskizze auf einem (Schmier-)Zettel notiert wird und daß erst dann, wenn der Lösungsweg vollständig klar ist und auch vorformuliert wurde, die endgültige Lösung aufgeschrieben wird.

(2) Da ein derartiges Aufschreiben von Lösungen durchaus zeitintensiv ist, darf ab sofort in Zweiergruppen abgegeben werden: Jeder einzelne muß also nur die Hälfte der Lösungen aufschreiben, dies aber **präzise, sauber und wohl überlegt.**

(3) Bei vier abzugebenden Aufgaben muß jede(r) der beiden jeweils zwei Aufgaben aufschreiben, aber mit den beiden anderen Aufgaben ebenfalls völlig vertraut sein. Üblicherweise sollte in den Übungsstunden vorrechnen, wer die Aufgabe **nicht** aufgeschrieben hat.

Gruppen

21. Sei B eine $(n \times n)$-Matrix. Setze

$$G(B) = \{A \in GL(n, \mathbb{Q}) \mid {}^t ABA = B\}.$$

Zeige:

(a) $G(B)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$.

(b) Ist $\det B \neq 0$ und $A \in G(B)$, so ist $\det A \in \{1, -1\}$.

(c) Berechne in einem Spezialfall $G(B)$. Dabei darf B (also auch n) beliebig gewählt werden, einzige Bedingung: B soll keine Skalarmatrix sein (warum??).

22. Gegeben sind die folgenden beiden (2×2)-Matrizen A, B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sei G die von A und B erzeugte Untergruppe der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$. Bestimme alle Elemente von G und die Multiplikations-Tafel.

23. Sei U eine Untergruppe der Gruppe G, sei $g \in G$. Sei

$$gUg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in G\}$$

(a) Zeige: gUg^{-1} ist eine Untergruppe von G.

(b) Sei $G = S_4$, sei U die von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe. Wieviele Untergruppen der Form gUg^{-1} gibt es?

24. Sei G die Menge aller (2×2)-Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und $(a, b) \neq (0, 0)$. Zeige: Dies ist eine Untergruppe der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$. (Gesucht ist dabei insbesondere eine Formel für g^{-1}, falls $g \in G$.)

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$

25. Sei $A=(a_{ij})_{ij}$ eine $(n\times n)$-Matrix. Setze $A_t=(a_{ij})_{1\le i\le t,1\le j\le t}$. Zeige, daß die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $A=BC$, wobei B eine invertierbare untere Dreiecksmatrix und C eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

(ii) $\det A_t\ne 0$ für $1\le t\le n$.

26. Seien B_1,B_2 unipotente untere Dreiecksmatrizen, C_1,C_2 unipotente obere Dreiecksmatrizen, D_1,D_2 invertierbare Diagonalmatrizen. Ist $B_1D_1C_1=B_2D_2C_2$, so ist $B_1=B_2,\ C_1=C_2,\ D_1=D_2$..

27. Sei $B(n,\mathbb{Q})$ die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$. Seien $d_1,\dots,d_n$ ganze Zahlen. Ist $A=(a_{ij})_{ij}$ in $B(n,\mathbb{Q})$, so setze

$$\chi_d(A)=a_{11}^{d_1}\cdots a_{nn}^{d_n}.$$

Zeige: $\chi_d\colon B(n,\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}^*$ ist ein Gruppen-Homomorphismus.

28. Sei $S(n,\mathbb{Q})$ die Menge der Matrizen $A=(a_{ij})_{ij}$ in $B(n,\mathbb{Q})$ mit $a_{i,j}=a_{i+1,j+1}$ falls $1\le i<n$ und $1\le j<n$. Bilde die $(n\times n)$-Matrix $J=(c_{ij})_{ij}$ mit $c_{i,i+1}=1$ für $1\le i<n$, und $c_{ij}=0$ falls $j\ne i+1$. Zeige:

(a) Die Matrizen in $S(n,\mathbb{Q})$ sind gerade diejenigen Matrizen, die sich in der Form $\sum_{i=0}^{n-1}c_iJ^i$ mit $c_0\in\mathbb{Q}^*$ und $c_1,\dots,c_{n-1}\in\mathbb{Q}$ schreiben lassen.

(b) $S(n,\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe von $B(n,\mathbb{Q})$.

(Insbesondere ist eine Formel für das Inverse von $\sum_{i=0}^{n-1}c_iJ^i$ gesucht.)

Vor allem: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

29. Sei R ein Ring. Die Abbildung $e\colon R[T] \to \mathrm{Abb}(R,R)$ sei durch $e(f)(r) = f(r)$ für $f = f(T)$ definiert.

(a) Zeige: e ist ein Ring-Homomorphismus.

(b) Ist R ein endlicher Ring, so kann e natürlich nicht injektiv sein. Geben Sie im Fall $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vier verschiedene Polynome f_1, f_2, f_3, f_4 mit $e(f_1) = e(f_2) = e(f_3) = e(f_4)$ an.

30. Gesucht ist eine (2×2)-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a_{ij} \neq 0$ für alle i, j, die modulo 3 und modulo 5 invertierbar ist, aber modulo der Zahlen $2, 7, 11$ nicht invertierbar ist.

31. Zeigen Sie: Sei K ein Körper. Eine (2×2)-Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

(1) Es ist $[a, b] \neq [0, 0]$.
(2) Es gibt kein $\lambda \in K$ mit $[c, d] = \lambda[a, b]$.

32. Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

(Hinweis: Zum Abzählen der Elemente kann man das Ergebnis aus 31 verwenden!)

Grundbegriffe der Algebra

33. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: Genau dann besitzt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mindestens ein von Null verschiedenes nilpotentes Element, wenn es eine Primzahl p gibt, so daß p^2 ein Teiler von n ist.

34. Sei K die Menge der reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Zeige: Dies ist ein Körper.

35. Sei K' die Menge der Matrizen $\begin{bmatrix} a & 2\,b \\ b & a \end{bmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

(a) Zeige: Dies ist ein Unterkörper von $M(2 \times 2, \mathbb{Q})$.

(b) Zeige: Die Abbildung $\gamma\colon K' \to K$ mit

$$\gamma(\begin{bmatrix} a & 2\,b \\ b & a \end{bmatrix}) = a + b\sqrt{2}$$

ist ein Körper-Isomorphismus.

36. Einige sollten folgendes Schiebe-Spiel kennen: in einem Rahmen sind 15 Plättchen mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 15$, die horizontal und vertikal verschoben werden können; zusätzlich gibt es ein Leerfeld; ein Zug besteht darin, eine der Nachbarzahlen des Leerfelds auf das Leerfeld zu ziehen. Hier links die Ausgangsstellung und vier mögliche Züge:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\overset{v_{15}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14		15

$\overset{v_{11}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		12
13	14	11	15

$\overset{v_{12}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	
13	14	11	15

$\overset{v_{8}}{\mapsto}$

1	2	3	4
5	6	7	
9	10	12	8
13	14	11	15

Zeige: Es ist unmöglich, ausgehend von der Anfangsstellung die folgende Stellung zu erhalten:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Hinweis: Es empfiehlt sich, dem Leerfeld den Namen 16 zu gehen und die Bewegung v_i als Transposition $\tau_{i,16}$ zu interpretieren. Nach unseren vier Zügen haben wir also die Permutation

$$\tau_{8,16}\tau_{12,16}\tau_{11,16}\tau_{15,16}$$

erhalten.Die Menge der möglichen Positionen des Spiels entspricht auf diese Weise einer Untermenge $M \subseteq S_{16}$ (diese Untermenge M ist **keine** Untergruppe). Zeigen Sie, daß die Menge der $\phi \in M$ mit $\phi(16) = 16$ nur gerade Permutationen enthält. Und natürlich, daß daraus die Behauptung folgt.

Lineare Unabhängigkeit

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum.

37. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V seien linear unabhängig. Sei $v \in V$.
Zeige: Genau dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n, v$ linear unabhängig, wenn $v \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$.

38. Sei K ein endlicher Körper, sei $\dim V = n$. Bestimmen Sie die Anzahl der Basen von V.

(Hinweis: Zu bestimmen ist also die Anzahl $a(n)$ der linear unabhängigen Folgen $(v_1, \ldots, v_n)$. Wieviele Möglichkeiten gibt es für v_1? Wenn v_1 gewählt ist, wieviele Möglichkeiten gibt es für v_2,? Usw.)

39. (a) Zeigen Sie, daß folgende beiden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\dim V \geq n$.
(ii) Es gibt Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n \subseteq V$.

(b) Zeigen Sie, daß folgende beiden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\dim V \leq n$.
(ii) Gibt es Unterräume $0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_m \subseteq V$, so ist $m \leq n$.

40. Sei M eine Menge. Für jedes $t \in \mathbb{N}_0$ sei eine Abbildung $f_t \colon M \to K$ gegeben. Ist $f_t^{-1}(0) \subset f_{t+1}^{-1}(0)$, für alle $t \in \mathbb{N}_0$, so sind die Abbildungen $f_0, f_1, \ldots$ linear unabhängig (d.h.: Die Folge $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ ist für jedes n linear unabhängig).

(Man sieht auf diese Weise, daß die Funktionen $f_t(x) = \cos(tx) \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $t \in \mathbb{N}_0$ linear unabhängig sind.)

Lineare Abbildungen

Sei K ein Körper, seien V, W K-Vektorräume. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

41. Zeige:

(a) Ist V' ein Unterraum von V, so ist $f^{-1}f(V') = V' + \mathrm{Ker}(f)$ (insbesondere ist also $f^{-1}f(V') \supseteq V'$).

(b) Ist W' ein Unterraum von W, so ist $ff^{-1}(W') = W' \cap \mathrm{Im}(f)$ (insbesondere ist also $ff^{-1}(W') \subseteq W'$).

(c) Konstruiere eine von Null verschiedene lineare Abbildung $g\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ und Unterräume $V', W' \subseteq \mathbb{Q}^2$ mit

$$g^{-1}g(V') \neq V' \quad \text{und} \quad gg^{-1}(W') \neq W'.$$

42. Seien U, U' Unterräume von V.

(a) Zeige: $f(U \cap U') \subseteq f(U) \cap f(U')$.

(b) Sei $V = W = \mathbb{Q}^4$ und $U = \mathbb{Q}^2 \times 0^2$, $U' = 0^2 \times \mathbb{Q}^2$. Konstruiere drei lineare Abbildungen $f_0, f_1, f_2\colon V \to V$ mit $\dim f_i(U) \cap f_i(U') = i$.

43. Sei $W = V$. Seien $\lambda \neq \lambda' \in K$. Zeige:

(a) Die Menge

$$U(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\}$$

ist ein Unterraum von V.

(b) Es ist

$$U(\lambda) \cap U(\lambda') = 0.$$

44. (a) Sei $V = W$. Sei $v \in V$ mit $f^{t-1}(v) \neq 0$ und $f^t(v) = 0$ für ein $t \in \mathbb{N}_1$. Zeige: die Vektoren $(v, f(v), \ldots, f^{t-1}(v))$ sind linear unabhängig.

(Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis!
Wären die Vektoren $(v, f(v), \ldots, f^{t-1}(v))$ linear abhängig, so zeige man, daß es $0 \leq s < t$ gibt, so daß sich $f^s(v)$ als Linearkombination der Vektoren f^i mit $i > s$ schreiben läßt. Wende nun auf $f^s(v)$ eine geeignete Potenz von f an (welche?), um einen Widerspruch zu erhalten.)

(b) Folgerung: Ist A eine nilpotente $(n \times n)$-Matrix, so ist $A^n = 0$.

Basen, lineare Abbildungen

45. In $\mathbb{Q}^3$ mit der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 sei die Menge S der folgenden 18 Vektoren gegeben:

$$(*) \qquad e_i,\ -e_i,\ e_i + e_j,\ e_i - e_j,\ -e_i + e_j,\ -e_i - e_j, \quad \text{mit} \quad i \neq j$$

und $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Gesucht ist eine Basis b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{Q}^3$, so daß sich alle Vektoren $v \in S$ als Linearkombinationen $v = \sum_i \lambda_i b_i$ schreiben lassen, wobei alle λ_i ganzzahlig sind und entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig nicht-positiv sind.

(Es sollte auch eine Skizze zur Veranschaulichung angefertigt werden! Für Mutige: Man betrachte die entsprechende Menge $(*)$ in $\mathbb{Q}^n$.)

46. Betrachte die Matrix $N(n) = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{Q})$ mit $a_{i,i+1} = 1$ für alle i und $a_{ij} = 0$ für $j \neq i + 1$.

(a) Berechne $\operatorname{Ker} f^t_{N(n)}$ und $\operatorname{Im} f^t_{N(n)}$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

(b) Bestimme alle Unterräume $U \subseteq \mathbb{Q}^n$ mit $f_{N(n)}(U) \subseteq U$.

47. Betrachte folgende Unterräume von $\mathbb{Q}^4$

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_i \in \mathbb{Q}, \sum x_i = 0\} \\ U_1 &= \{(0, x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \\ U_2 &= \{(x, x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

(a) Gesucht sind (4×4)-Matrizen A, B mit $\operatorname{Ker} f_A = U = \operatorname{Im} f_B$.

(b) Gesucht sind (4×4)-Matrizen $A(i,j)$ mit $\operatorname{Ker} f_{A(i,j)} = U_i$ und $\operatorname{Im} f_{A(i,j)} = U_j$, für alle $i, j \in \{1, 2\}$.

48. Betrachte im Polynomring $\mathbb{Q}[T]$ den Unterraum $\mathcal{P}_n$ aller Polynome vom Grad höchstens n. Für $0 \leq k \leq n$ setze

$$\binom{T}{k} = \frac{1}{k!} T \cdot (T-1) \cdot \cdots \cdot (T-k+1).$$

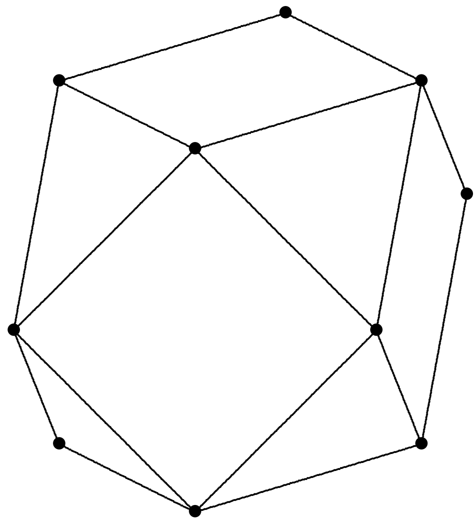
Zeige:

(a) Die Folge $\mathcal{A}(n) = \left(\binom{T}{0}, \binom{T}{1}, \ldots, \binom{T}{n}\right)$ ist eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

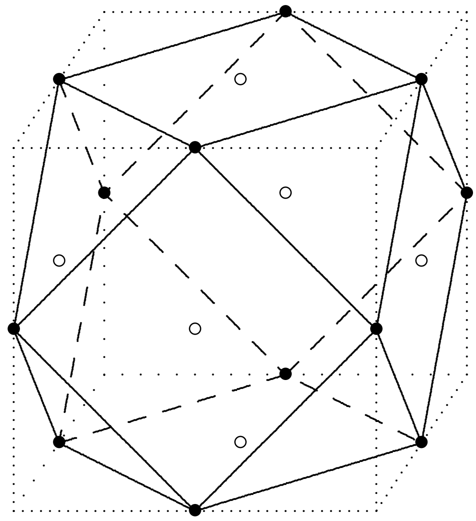
(b) Für $0 \leq i \leq 4$, schreibe T^i als Linearkombination von Elementen der Basis $\mathcal{A}(4)$.

(c) Es gilt $\binom{T}{k} + \binom{T}{k-1} = \binom{T+1}{k}$.

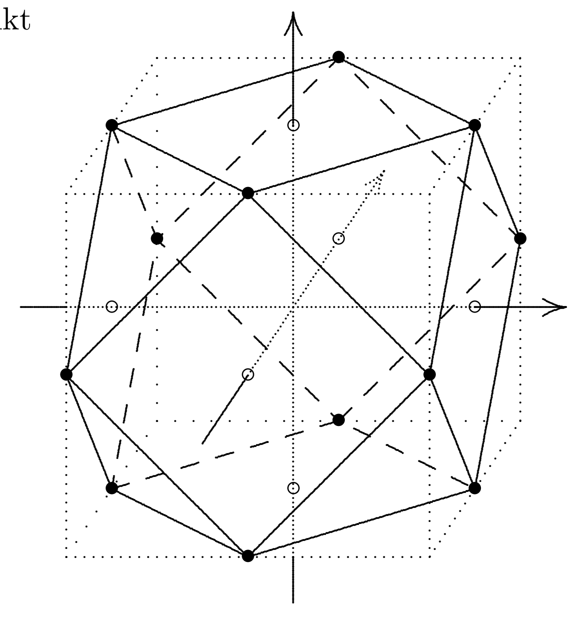
Kuboktaeder (= Wurzelsystem A_3)



Kuboktaeder mit den Mittelpunkten der Quadratseiten (= Wurzelsystem B_3)



• Kantenmittelpunkt
∘ Flächenmittelpunkt



Sei K ein Körper.

49. Im FISCHER, p.216 steht folgende Warnung: Sei F ein Endomorphismus von K^n. *Selbst wenn F diagonalisierbar ist, braucht nicht* **jeder** *Vektor ungleich Null ein Eigenvektor zu sein.* Dies sollte Ihnen völlig klar sein! Zeigen Sie dazu, daß für jede $(n \times n)$-Matrix A gilt:

(a) Sind v_1, v_2 Eigenvektoren zu A mit Eigenwerten λ_1, beziehungsweise λ_2, und ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist $v_1 + v_2$ von Null verschieden und **kein** Eigenvektor.

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Jeder von Null verschiedene Vektor des K^n ist Eigenvektor für A.
(ii) Die Matrix A ist ähnlich zu einer Skalarmatrix.
(iii) Die Matrix A **ist** *eine Skalarmatrix.*

50. Zeige: *Sei A eine diagonalisierbare $(n \times n)$-Matrix, sei $f = f_A$. Ist U ein Unterraum von K^n mit $f(U) \subseteq U$, so hat U eine Basis aus Eigenvektoren von f.*

Anleitung für einen Beweis: Ist $0 \neq u \in U$, so schreibe $u = \sum_{i=1}^t v_i$, wobei die v_i Eigenvektoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten sind. Zeige: Die Eigenvektoren v_i lassen sich als Linearkombinationen der Vektoren $u, f(u), \ldots, f^{t-1}(u)$ schreiben (gehören also zu U). (Zum Beweis zeige, daß es eine $(t \times t)$-Matrix C mit

$$\begin{bmatrix} u \\ f(u) \\ \vdots \\ f^{t-1}(u) \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \end{bmatrix}$$

gibt. Wie sieht diese Matrix C aus? Was wissen wir über eine derartige Matrix?) Warum folgt daraus die Behauptung?

51. Seien A, B zwei diagonalisierbare $(n \times n)$-Matrizen mit $AB = BA$. Zeige:

(a) Es gibt eine invertierbare Matrix P, so daß die beiden Matrizen $P^{-1}AP$ und $P^{-1}BP$ Diagonalmatrizen sind.

(b) Die Matrix $A + B$ ist diagonalisierbar.

Hinweis zu (a): Sei $\lambda \in K$ und $U = \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ der zugehörige Eigenraum zur Abbildung f_A. Zeige: (1) Es ist $f_B(U) \subseteq U$. (2) Wegen Aufgabe 50 wissen wir, daß $f_B(U)$ eine Basis besitzt, die aus Eigenvektoren für f_B besteht. (3) Warum folgt daraus die Behauptung? Verwende (a), um (b) zu zeigen.

52. Sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $v \in V$. Es gebe $\lambda \in K$ mit folgender Eigenschaft: $f(v) - \lambda v = \sum_{i=1}^t v_i$, wobei jedes v_i ein Eigenvektor von f (mit Eigenwert λ_i) ist. Zeige:

(a) Ist $\lambda \neq \lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq t$, so gibt es Skalare μ_i $(1 \leq i \leq t)$ (welche?), so daß $v' = v + \sum_{i=1}^t \mu_i v_i$ ein Eigenvektor von f ist.

(b) Im allgemeinen gibt es keinen Eigenvektor zu f, der die Form $v' = v + \sum_{i=1}^t \mu_i v_i$ mit $\mu_i \in K$ hat. (Hier wird also ein Beispiel gesucht.)

Eigenwerte, Eigenvektoren, nilpotente Matrizen.

53. Einmal eine Rechenaufgabe: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen $A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Können die Matrizen diagonalisiert werden?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

54. Sei K ein Körper, sei $A \in M(n \times n, K)$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalkoeffizienten $a_1, \ldots, d_n$. Sei $f = f_A\colon K^n \to K^n$. Zeige: Genau dann gibt es einen Vektor $v \in K^n$, so daß $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ eine Basis von K^n ist, wenn die Elemente $d_1, \ldots, d_n$ paarweise verschieden sind.

55. Sei K ein Körper, sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, sei $f = f_A$. Zeige:
(a) Ist $A^2 = A$, so gilt $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = 0$ und $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) = K^n$.
(b) Folgere daraus, daß genau dann $A^2 = A$ gilt, wenn A zu einer Diagonalmatrix, deren Diagonalkoeffizienten nur 0 und 1 sind, ähnlich ist.

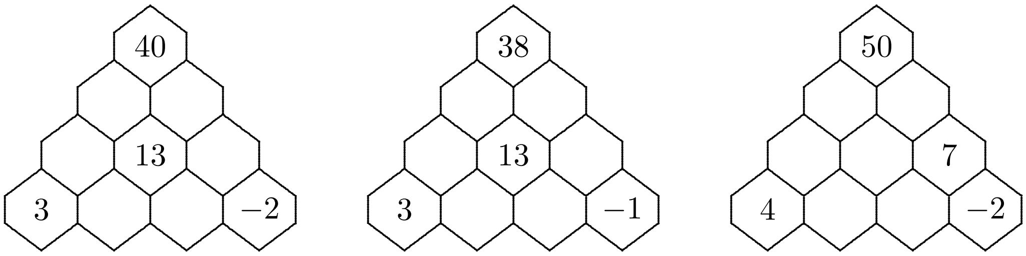
56. Sei K ein Körper.
(a) Sind $A, B \in M(n \times n, K)$ nilpotente Matrizen mit $AB = BA$, so ist auch $A+B$ nilpotent.
(b) Konstruiere nilpotente Matrizen $A, B \in M(3 \times 3, K)$ mit $AB \neq BA$, so daß auch $A + B$ nilpotent ist.
(c) Konstruiere nilpotente Matrizen $A, B \in M(2 \times 2, K)$ mit $A + B$ invertierbar.

Zu den Übungsaufgaben. Ohne die intensive Beschäftigung mit den wöchentlich gestellten Übungsaufgaben ist ein Verständnis der in der Vorlesung dargestellten Ergebnisse kaum möglich; deshalb wird dringend geraten, daß auch dieser Übungszettel bearbeitet wird und daß Lösungsansätze untereinander diskutiert werden. Die Lösungen für diese vier hier vorgelegten Aufgaben brauchen nicht abgegeben zu werden, sie werden auch nicht korrigiert. Für Rückfragen stehen die Veranstalter und die Tutorinnen natürlich zur Verfügung.

Die Festlegung einer Mindestpunktzahl für den Erhalt eines Scheins hat offensichtlich bei einigen zur irrigen Annahme geführt, daß sie nach dem Erreichen dieser Punktzahl keine weiteren Aufgaben zu bearbeiten brauchen. Dies ist äußerst leichtsinnig. In der Vorlesung "Lineare Algebra II" im kommenden Semester (wie in allen anderen Vorlesungen auch) wird erwartet, daß Sie die jeweils notwendigen Vorkenntnisse besitzen, also den **gesamten** Stoff der Vorlesung "Lineare Algebra I".

Scheinvergabe. Die Bescheinigungen über die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen gibt es ab Freitag, 11.02.2000 im Sekretariat V5-210 bei Frau Scharsche. Leider liegt bisher nicht von allen Übungsgruppen-Teilnehmern eine detaillierte Punkt-Aufstellung für die einzelnen Übungsaufgaben vor. Ich bitte daher **alle**, die Punktaufteilung auf der Grundlage der zurückgegebenen Lösungen selbst in die verteilten Listen einzutragen und diese Liste so bald wie möglich bei den Tutorinnen (oder im Sekretariat V5-210) abzugeben. Das Durchsehen Ihrer Lösungen sollte für Sie eine gute Gelegenheit sein, sich noch einmal alle Aufgabenstellungen vor Augen zu führen. Ich hoffe, daß Sie nun im nachhinein feststellen, daß keine dieser Aufgaben wirklich schwer war.

57. In den folgenden Pyramiden gelte die Regel: Der Eintrag in einer Wabe ist gleich der Summe der beiden darunterliegenden Waben (falls solche existieren). Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die drei Pyramiden mit rationalen Zahlen zu vervollständigen:



58. (Aus der Topologie) Ein Komplex endlich-dimensionaler Vektorräume ist eine Folge

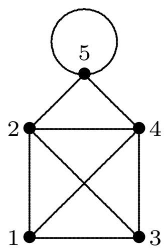
$$0 \xrightarrow{d_{n+1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} V_{n-2} \to \cdots \xrightarrow{d_1} V_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

mit $d_i \circ d_{i+1} = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Durch $\beta_i = \dim \operatorname{Ker} d_i - \dim \operatorname{Im} d_{i+1}$ werden die Bettizahlen β_i definiert. Zeige:

$$\sum (-1)^i \beta_i = \sum (-1)^i \dim V_i.$$

59. (Aus der Graphentheorie). Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{Q})$ eine symmetrische Matrix, deren Koeffizienten nur 0 und 1 sind (symmetrisch bedeutet: $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j). Zeichne einen Graphen $\Gamma(A)$ mit n Ecken und bezeichne diese Ecken mit $1, 2, \ldots, n$. Verbinde die Ecke i mit der Ecke j durch eine Kante, falls $a_{ij} = 1$ gilt. Zum Beispiel liefert die Matrix links den Graphen rechts:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



(a) Zeigen Sie: Der (i, j)-Koeffizient von A^n ist die Anzahl der "Wege" der Länge n von der Ecke i zur Ecke j (definieren Sie, was man unter einem "Weg" verstehen soll). (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Weg der Länge 100, der bei 1 startet, beim Punkt 5 endet.

60. Sei $M \subset \mathbb{Z}^2$ eine nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{Z}^2$. Ein Punkt $(a, b) \in M$ heißt *innerer* Punkt von M, falls die benachbarten Punkte $(a + 1, b)$, $(a - 1, b)$, $(a, b + 1)$, $(a, b - 1)$ in $\mathbb{Z}^2$ auch zu M gehören; alle anderen Punkte heißen *Randpunkte.* Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch,* falls für jeden inneren Punkt (a, b) die Gleichung

$$f(a, b) = \frac{1}{4}\big(f(a + 1, b) + f(a - 1, b) + f(a, b + 1) + f(a, b - 1)\big)$$

gilt. Zeigen Sie:

(a) Es gilt das Maximumsprinzip: Eine harmonische Funktion nimmt ihr Maximum in einem Randpunkt an. Es gilt ebenfalls ein entsprechendes Minimumprinzip.

(b) Eine harmonische Funktion ist durch ihre Werte auf den Randpunkten bestimmt; diese Randwerte können beliebig vorgegeben werden.