

Unter dem charakteristischen Polynom einer $(n \times n)$ -Matrix soll in Zukunft das Polynom $\chi_A(T) = \det(T \cdot I_n - A)$ verstanden werden (und nicht, wie im Leitfaden, $\chi_A(-T)$).

Aufgabenblatt 1: Polynome

1. Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar mit den (paarweise verschiedenen) Eigenwerten $a_1, \dots, a_m$. Sei μ_A das Minimalpolynom von A . Zeige:

- (a) $\mu_A = \prod_{i=1}^m (T - a_i)$.
- (b) Genau dann ist $\mu_A = \chi_A$, wenn $m = n$ gilt.

2. Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n, K)$ nilpotent, und zwar ähnlich zu $J(\lambda)$, wobei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ eine Partition von n ist. Sei μ_A das Minimalpolynom von A . Zeige:

- (a) $\mu_A = T^{\lambda_1}$.
- (b) Genau dann ist $\mu_A = \chi_A$, wenn $m = 1$ gilt.

Hinweis zu den Aufgaben 1 und 2: Zuerst zeige man, daß für das Polynom $f = \prod_{i=1}^m (T - a_i)$ bzw. $f = T^{\lambda_1}$ gilt: $f(A) = 0$. Also ist μ_A ein Teiler von f . Man nimmt nun einen echten Teiler g von f und zeigt: $g(A) \neq 0$.

3. Sei $f \in \mathbb{R}[T]$ ein normiertes Polynom vom Grad 2. Man zeige, daß f genau dann irreduzibel ist, wenn es reelle Zahlen a, b mit $b \neq 0$ gibt, so daß $f = (T - a)^2 + b^2$ gilt.

4. Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Man bestimme alle irreduziblen Polynome $f \in K[T]$ mit $\deg f \leq 4$.

Abgabetermin: 20.04.2000

Das Kleingedruckte. Ohne die intensive Beschäftigung mit den wöchentlich gestellten Übungsaufgaben ist ein Verständnis der in der Vorlesung dargestellten Ergebnisse kaum möglich; deshalb wird dringend geraten, dass alle Übungszettel bearbeitet und dass Lösungsansätze untereinander diskutiert werden. Jede Woche wird (meist in der Donnerstags-Vorlesung) ein solcher Aufgabenzettel verteilt, er ist jeweils ab Donnerstag 12:00 auch im Internet abrufbar.

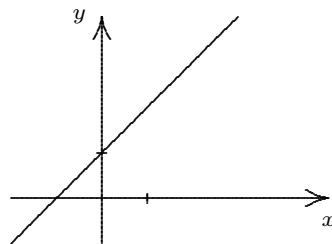
Die Lösungen sind auf Blättern im DIN A4-Format (nicht vergessen: Name und Übungsgruppe) **in deutlich lesbarer Form** abzugeben. Die Lösungen werden von den Tutorinnen und Tutoren korrigiert, pro Aufgabe gibt es 4 Punkte. Die Aufgaben können in Zweiergruppen bearbeitet werden. Die Lösungen werden in den Übungsstunden besprochen, dabei tragen jeweils Studenten ihre Lösungen oder Lösungsansätze vor. Wenn in Zweiergruppen abgegeben wird, so wird erwartet, dass jeder der beiden bereit ist, die vorgelegte Lösung vorzutragen.

Für die **Bescheinigung über die erfolgreiche Teilnahme** an den Übungen wird erwartet, dass jeder Aufgabenzettel bearbeitet wird und dass dabei jeweils mindestens 50 % der Punkte erzielt werden: erforderlich sind jeweils 32 Punkte für die Aufgabenzettel 1-4, 5-8 und 9-12. Das Bearbeiten und Lösen der Übungsaufgaben ist auf jeden Fall auch dann notwendig, wenn Sie keinen Übungsschein mehr brauchen.

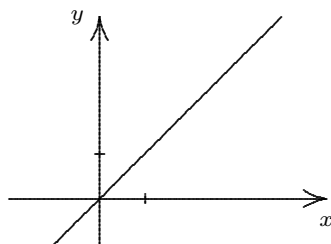
Zum Aufgabenblatt 1

Zur Aufgabe 3. Es sollte kurz thematisiert werden, daß der “Fundamentalsatz der Algebra” gerade besagt, daß die irreduziblen Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ Grad 1 oder 2 haben. **Also kennt man mit Aufgabe 3 alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[T]$.** Und es gilt: Jedes normierte Polynom läßt sich als Produkt von normierten linearen Polynomen und normierten quadratischen Polynomen darstellen.

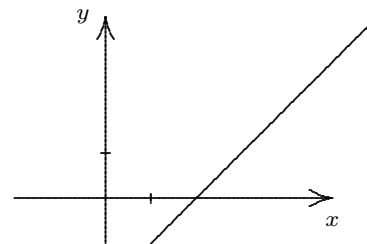
Verweis auf Analysis, insbesondere auch die des Schul-Unterrichts: Hier sind entsprechende Graphen:



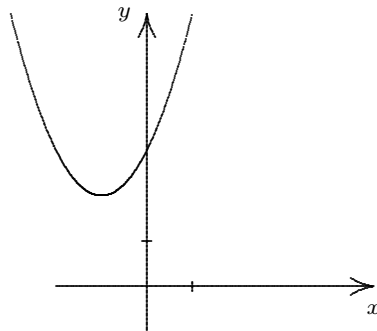
$$T + 1$$



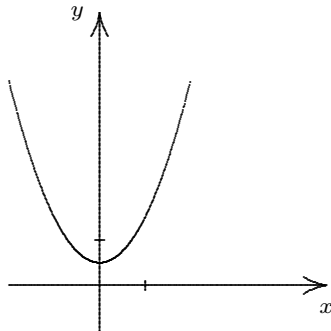
$$T$$



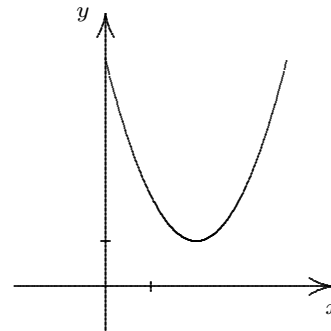
$$T - 2$$



$$(T + 1)^2 + 2$$



$$T^2 + \frac{1}{2}$$



$$(T - 2)^2 + 1$$

Das Multiplizieren von Funktionen sollte auch anhand der Graphen geübt werden (nicht unbedingt in der Übungsstunde, sondern von den Studenten parallel zu den Vorlesungen). Zum Beispiel erhält man die nicht-irreduziblen quadratischen Polynome als Produkt zweier linearer Polynome

Aufgabenblatt 2: Verschiedenes

5. Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit $n \geq 1$.

(a) Sei $0 \neq v \in K^n$. Sei g ein Polynom in $K[T]$ mit $g(A)v = 0$. Zeige: g und χ_A sind nicht teilerfremd.

(b) Folgere daraus: Ist χ_A irreduzibel, und ist $0 \neq v \in K^n$, so sind die Vektoren $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ linear unabhängig (bilden also eine Basis).

6. Sei K ein Körper. (a) Seien $c_0, \dots, c_{n-1} \in K$. Zeige: Die Matrix

$$B(c_0, \dots, c_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{n-1} \end{bmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom $T^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i T^i$. Folgere daraus, daß jedes normierte Polynom in $K[T]$ das charakteristische Polynom einer Matrix ist.

(b) Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A = \sum_{i=0}^n a_i T^i$ (mit $a_n = 1$) irreduzibel ist. Zeige: Die Matrix A ist zur Matrix $B(-a_0, \dots, -a_{n-1})$ ähnlich.

Hinweis: Wähle einen beliebigen Vektor $v \neq 0$ in K^n . Zeige $A^n v = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i v$. Warum folgt daraus die Behauptung?

7. Seien $U_1, \dots, U_t$ Unterräume eines Vektorraums V . Zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (i) Jedes Element $v \in V$ läßt sich eindeutig in der Form $v = \sum_{i=1}^t u_i$ mit $u_i \in U_i$ schreiben.
- (ii) (a) Jedes Element $v \in V$ läßt sich in der Form $v = \sum_{i=1}^t u_i$ mit $u_i \in U_i$ schreiben.
(b) Ist $\sum_{i=1}^t u_i = 0$ mit $u_i \in U_i$, so ist $u_i = 0$ für alle i .
- (iii) Einerseits ist $V = \sum_{i=1}^t U_i$ und andererseits gilt $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = 0$ für alle $1 \leq j \leq t$.

8. (a) Folgere aus dem Satz von Bézout den "Chinesischer Restsatz": Sei R ein euklid'scher Ring. Seien paarweise teilerfremde Elemente $g_1, \dots, g_s$ gegeben. Zeige: Zu jedem s -Tupel von Elementen $r_1, \dots, r_s \in R$ gibt es ein $r \in R$, so daß $r - r_i$ durch g_i teilbar ist.

(b) Gesucht ist eine ganze Zahl r mit $r \equiv 3 \pmod{5}$, $r \equiv 5 \pmod{8}$ und $r \equiv 2 \pmod{7}$.

Abgabe: Donnerstag, 04.05.2000

Aufgabenblatt 3: Die Jordan'sche Normalform

9. Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Das charakteristische Polynom χ_A zerfalle in Linearfaktoren. Zeige: Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom μ_A keine mehrfachen Nullstellen hat.

10. Sei K ein Körper, sei $A \in M(n \times n, K)$. Sei $\gamma \in K$ ein Eigenwert von A mit eindimensionalem Eigenraum $\text{Eig}(A, \gamma)$. Hat $T - \gamma$ im charakteristischen Polynom χ_A die Multiplizität d , so ist A ähnlich zu einer Matrix der Form $(\gamma I_d + J((d))) \oplus B$, dabei ist B eine $(n - d) \times (n - d)$ Matrix.

11. Bestimme (ohne Computer) die Jordan'sche Normalform für folgende Matrix in $M(4 \times 4, \mathbb{C})$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Bestimme für die reelle Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(auch hier ohne Computer) die Potenz A^{50} auf folgende Weise:

(a) Suche eine invertierbare Matrix S , eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N mit $A = S^{-1}(D + N)S$ und $DN = ND$.

(b) Zeige: Es ist $A^{50} = S^{-1}(D + N)^{50}S$, also berechnet man als erstes $(D + N)^{50}$.

(c) Wegen $DN = ND$ gilt $(D + N)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} D^k N^{50-k}$ (und glücklicherweise sind in dieser Summe nur ganz wenige Summanden von Null verschieden – warum?).

Abgabe: Donnerstag, 11.05.2000

Aufgabenblatt 4: Euklid'sche Vektorräume (ein Rechenzettel)

13. Zuordnung einer Matrix zu einer Bilinearform. Sei V der von den Polynomen $1, T, T^2, T^3$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}[T]$. Definiere eine Bilinearform $\varphi(-, -)$ auf V durch

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(T)g(T) \, dT.$$

Berechne die Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$, so daß φ bezüglich der Basis $1, T, T^2, T^3$ durch die Matrix A beschrieben wird:

$$\varphi\left(\sum c_i T^i, \sum d_i T^i\right) = [c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

für alle $c_0, \dots, c_3, d_0, \dots, d_3 \in \mathbb{R}$.

14. Nachweis, daß eine Bilinearform positiv definit ist. Betrachte die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Koeffizienten $a_{ii} = 2$ für $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ für $1 \leq i < n$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Zeige: Die Bilinearform φ_A auf dem $\mathbb{R}^n$ ist positiv definit.

15. Orthonormalisieren. Betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen inneren Produkt $\langle -, - \rangle$; es ist also $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = \sum x_i y_i$.

Orthonormalisiere die folgende Folge von Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

16. Bestimmung des orthogonalen Komplements. Betrachten Sie noch einmal den euklid'schen Vektorraum V , der in Aufgabe 13 gegeben wurde. Sei U der von $1, T$ erzeugte Unterraum. Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$, dies ist der Unterraum aller $v \in V$ mit $\varphi(u, v) = 0$ für alle $u \in U$.

Abgabe: Donnerstag, 18.05.2000

Aufgabenblatt 5: Unitäre Räume

(Beweise, analog zum Fall der euklid'schen Räume)

Sei $V = (V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Sei $f: V \rightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus.

17. Orthonormalisierung. (a) Sei U ein Unterraum von V . Sei $u_1, \dots, u_m$ eine Orthonormalbasis von U . Ist $v \in V$, so setze

$$v' = v - \sum_{i=1}^m \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Zeige erstens: $v' \in U^\perp$. Zweitens: Ist $v \in U$, so ist $v' = 0$. Drittens: Ist $v \notin U$, so sind die Vektoren $u_1, \dots, u_m, v$ linear unabhängig.

(b) Folgere daraus: Jeder endlich-dimensionale unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

18. Eigenwerte. (a) Ist γ ein Eigenwert von f , so ist $|\gamma| = 1$.

(b) Die Abbildung f ist injektiv. Ist V endlich-dimensional, so ist f bijektiv.

(c) Ist V endlich-dimensional, so ist das charakteristische Polynom von f von der Form $(T - \gamma_1) \cdots (T - \gamma_n)$ mit $|\gamma_i| = 1$ für $1 \leq i \leq n$.

19. Orthogonales Komplement. Zeige:

Ist U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V , der f -invariant ist, so ist auch $U^\perp$ f -invariant.

20. Diagonalisierbarkeit. Zeige: Es gibt eine Orthonormalbasis von V , so daß die zugehörige Matrizendarstellung von f eine Diagonalmatrix ist.

Abgabe: Donnerstag, 25.05.2000

Aufgabenblatt 6: Isometrien. Diesmal nur Geometrie.

Es gibt hierzu drei Beilagen I, II, III.

21. Es gibt ein Spiel- und Zeichengerät (*Spirograph*), mit dem man interessante geschlossene Kurven zeichnen kann (siehe Beilage I): Entlang des Inneren eines Kreises A mit einem Zahnkranz wird ein Zahnrad B abgerollt, in dem ein Zeichenstift steckt. Zeige:

- (a) Die Anzahl der Zähne von A sei r , die von B sei s (natürlich ist $s < r$ und meist ist $s \geq 5$). Bestimme die Symmetriegruppe der Kurve, die entsteht, wenn sich der Zeichenstift in einer Öffnung C befindet, die nicht im Mittelpunkt von B liegt.
- (b) Die zweite Abbildung der Beilage I entstand mit einem Kreis A mit 105 Zähnen. Wie viele Zähne hatte das Zahnrad B ?

22. In der Beilage II findet man einige Friese: Als erstes einige Beispiel aus der Kunstgeschichte. Dann Keramik-Friese (zum Teil mexikanisch). Als letztes die Fährten des Rothirsches: **a** ziehend, **b** flüchtend. Gib jeweils die zugehörigen Symmetriegruppen an.

23. Geben Sie zu jeder der 17 ebenen Kristallgruppen G die Punktgruppe $\overline{G}$ an:

- (a) Ist $\overline{G}$ eine Drehgruppe, so soll ein erzeugendes Element von $\overline{G}$ angegeben werden. Ist $\overline{G}$ keine Drehgruppe, so gebe man ein erzeugendes Element der Untergruppe aller Drehungen und zusätzlich Spiegelachsen und Gleitspiegelachsen an, so dass für die zugehörigen Bewegungen $h_1, \dots, h_n$ gilt: Die Restklassen $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_n$ in $\overline{G}$ sind paarweise verschieden und liefern alle Spiegelungen in $\overline{G}$.

- (b) Es gibt genau einen Fall mit Punktgruppe C_3 . In diesem Fall, und in einem der Fälle mit Punktgruppe D_2 zeige man explizit, daß die Punktgruppe keine weiteren Elemente besitzt.

24. Die Beilage III enthält einige Muster. Geben Sie zu jedem Muster den zugehörigen Typ an.

Abgabe: **Mittwoch**, 31.05.2000, 12:00**7. Ebene diskrete Gruppen. Schraubungen in $\mathbb{R}^3$**

Eine Untergruppe L von $(\mathbb{R}^n, +)$ heißt *diskrete* Untergruppe, wenn es ein $\epsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist $0 \neq v \in L$, so ist $\|v\| \geq \epsilon$.

25. Zeigen Sie, daß es (zu vorgebenem $\epsilon > 0$ und d) eine explizite Schranke b mit folgender Eigenschaft gibt: Sind $v_1, \dots, v_t$ Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ für $i \neq j$ und $\|v_i\| \leq d$ für alle i , so ist $t \leq b$.

Für Tapfere: Man zeige das Gleiche für Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Kommentar: In der Vorlesung (wie auch im Leitfaden) wird mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß gezeigt: Ist L eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$, und ist $d \in \mathbb{R}$, so gibt es nur endlich viele Vektoren $v \in L$ mit $\|v\| \leq d$. Wie wir hier sehen, braucht man dafür aber den Satz von Bolzano-Weierstraß gar nicht.

26. (a) Zeigen Sie: Ist L eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$, so ist die Anzahl der kürzesten von Null verschiedenen Vektoren 2, 4 oder 6.

(b) Die kürzesten von Null verschiedenen Vektoren in L können L erzeugen, müssen dies aber nicht. Geben Sie zu jeder der Zahlen $k = 2, 4, 6$ jeweils eine diskrete Untergruppe L an, die genau k Vektoren der Länge 1 besitzt und von diesen erzeugt wird, und auch eine diskrete Untergruppe L' , die genau k Vektoren der Länge 1 besitzt, von diesen nicht erzeugt wird, während aber alle von Null verschiedenen Vektoren Länge mindestens 1 haben.

27. Zeige: Sind v_1, v_2 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$, so ist die Menge $L = \{z_1 v_1 + z_2 v_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{Z}^2, +)$ (man nennt eine derartige Untergruppe L ein *Gitter* und v_1, v_2 eine *Gitterbasis* von L).

(a) Zeige: Sei v_1, v_2 eine Gitterbasis des Gitters $L \subset \mathbb{R}^2$. Genau dann ist $w = z_1 v_1 + z_2 v_2$ Element einer Gitterbasis w, w' von L , wenn die ganzen Zahlen z_1, z_2 teilerfremd sind.

(b) Zeige: Die Menge der Vektoren $[a, b] \in \mathbb{Z}^2$, für die $a + b$ eine gerade Zahl ist, ist ein Gitter. Man gebe 10 verschiedene Gitterbasen für dieses Gitter an (mit 10 Zeichnungen).

(c) Zeige: Die Menge K der Vektoren $\frac{1}{2}[a, b\sqrt{3}]$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $2 \mid a + b$ bildet eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$. Bestimme eine Gitterbasis.

Kommentar. K ist ein typischer Zahlbereich, der im Rahmen der algebraischen Zahlentheorie untersucht wird: die Menge der “ganzen” Zahlen in einem Zahlkörper. Wer Lust hat, sollte zeigen, daß K ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.)

28. Eine Gerade ℓ im $\mathbb{R}^3$ ist durch einen Vektor a (Ortsvektor) und einen von Null verschiedenen Vektor b (Richtungsvektor) gegeben: $\ell = \{a + rb \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Sei ϕ eine eigentliche Bewegung des $\mathbb{R}^3$. Zeige als erstes: Es gibt eine Fixgerade ℓ . Zweitens: Entweder ist ϕ eine Drehung um diese Gerade, oder es gibt einen Richtungsvektor b zu dieser Geraden, so daß ϕ die Hintereinanderschaltung einer Drehung um die Achse ℓ und der Verschiebung um den Vektor b ist (in diesem Fall spricht man von einer *Schraubung*).

8. Noch einmal: Bewegungen. Und reguläre Polyeder.

29. (a) Zeige: Die Zuordnung $\eta: \mathcal{B}(n) \rightarrow GL(n+1, \mathbb{R})$

$$\eta(t_a \circ f_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } A \in \mathcal{O}(n)$$

ist ein injektiver Gruppen-Homomorphismus; ist $\phi \in \mathcal{B}(n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

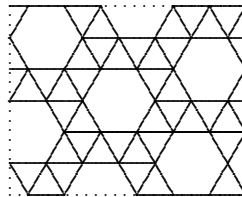
$$\eta(\phi) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi(x) \end{bmatrix}.$$

(b) Sei nun $n = 2$. Wie sieht $\eta(\phi)$ aus, wenn ϕ eine Translation, eine Drehung mit Drehwinkel $0 < \alpha < 2\pi$, eine Spiegelung, bzw. eine Gleitspiegelung ist?

30. Sei $n_1, \dots, n_t$ eine Folge natürlicher Zahlen $n_i \geq 3$ mit $\sum_i \frac{n_i-2}{n_i} = 2$, zum Beispiel also $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 4, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$,

(a) Wieviele derartige Folgen gibt es (bis auf zyklische Vertauschungen und Umkehr der Reihenfolge)?

(b) Zu jeder solchen Folge versuche man, eine "Pflasterung" der Ebene aus regulären n_i -Ecken mit Kantenlänge 1 zu konstruieren, dabei sollen in jedem Eckpunkt ein n_1 -Eck, ein n_2 -Eck, usw. aneinanderstoßen, entsprechend der Folge $(n_1, n_2, \dots, n_t)$ (oder ihrer Umkehrung). Zeige: In genau 11 Fällen ist dies möglich. (In diesen Fällen skizziere man die Pflasterungen; in den übrigen Fälle beweise man die Unmöglichkeit.) Hier als Beispiel ein Ausschnitt der Pflasterung zur Folge $(3, 3, 3, 3, 6)$:



Zeige: die jeweilige Symmetriegruppe ist eine ebene Kristallgruppe. Bestimme jeweils den Typ. (Für eine vollständige Lösung dieser etwas langwierigen Aufgabe gibt es 4 Extrapunkte).

31. Seien $k, n \geq 3$ natürliche Zahlen mit $\frac{k(n-2)}{n} < 2$. Bestimme alle Möglichkeiten für k, n und zeige, daß zu jedem dieser Fälle in natürlicher Weise ein reguläres Polyeder gehört (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Isokaeder).

32. Betrachte die Punkte $A = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$,

mit $a = \sqrt{2}$. Bestimme alle Drehungen des $\mathbb{R}^3$, die die Menge $\{A, B, C, D\}$ in sich überführen (gesucht sind die entsprechenden (3×3) -Matrizen bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$). Bestimme jeweils auch die Drehachse.

Die 17 ebenen Kristallgruppen

nach A.Schoenflies (1891) und E.S.Fedorow (1892).

Es gibt 17 verschiedene ebene Kristallgruppen. Hier ein **Entscheidungsverfahren** zur Bestimmung des jeweiligen Typs. Sei G eine ebene Kristallgruppe, sei d die höchste Ordnung einer Drehung in G . Es sei $\overline{G}$ die zugehörige Punktgruppe.

(Gleitspiegelachsen bezeichnen wir einfach als Achsen. Unter einem Viererzentrum verstehen wir das Drehzentrum einer Drehung der Ordnung 4; analog ist ein Dreierzentrum definiert.)

d	Typ	$\overline{G}$
Fall 1. <i>Alle Symmetrien in G sind eigentliche Bewegungen.</i>		
1	p1	$\mathcal{C}_1$
2	p2	$\mathcal{C}_2$
3	p3	$\mathcal{C}_3$
4	p4	$\mathcal{C}_4$
6	p6	$\mathcal{C}_6$

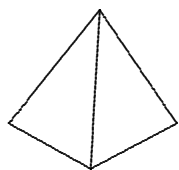
Fall 2. *Es gibt Symmetrien in G , die uneigentliche Bewegungen sind.*

1	Jede Achse ist Spiegelachse.	pm	$\mathcal{D}_1$
	Es gibt keine Spiegelachse.	pg	$\mathcal{D}_1$
	Es gibt Spiegelachsen, aber auch Achsen, die keine Spiegelachsen sind.	cm	$\mathcal{D}_1$
2	Jedes Drehzentrum liegt auf zwei orthogonalen Spiegelachsen.	pmm	$\mathcal{D}_2$
	Ein Drehzentrum liegt auf genau einer Achse.	pmg	$\mathcal{D}_2$
	Ein Drehzentrum liegt auf keiner Achse.	pgg	$\mathcal{D}_2$
	Es gibt ein Drehzentrum, das auf zwei orthogonalen Achsen, die keine Spiegelachsen sind, liegt.	cmm	$\mathcal{D}_2$
3	Jedes Dreierzentrum liegt auf einer Spiegelachse.	p3m1	$\mathcal{D}_3$
	Es gibt ein Dreierzentrum, das auf keiner Spiegelachse liegt.	p31m	$\mathcal{D}_3$
4	Ein Viererzentrum liegt auf einer Spiegelachse.	p4m	$\mathcal{D}_4$
	Ein Viererzentrum liegt auf keiner Spiegelachse.	p4g	$\mathcal{D}_4$
6		p6m	$\mathcal{D}_6$

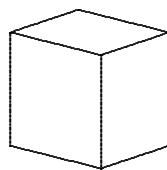
Es gibt genau 230 räumliche Kristallgruppen.

Auch sie wurden von A.Schoenflies und E.S.Fedorow klassifiziert.

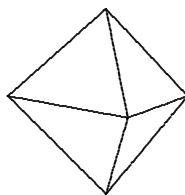
Die regulären Polyeder:



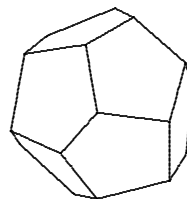
Tetraeder



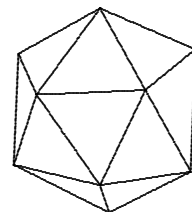
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

9. Geometrie

Abgabe: 15.06.2000

33. Iwasawa-Zerlegung (oder QR-Zerlegung). Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Jede invertierbare Matrix $A \in M(n \times n, K)$ läßt sich als Produkt $A = PDU$ schreiben, dabei ist P für $K = \mathbb{R}$ eine orthogonale Matrix, für $K = \mathbb{C}$ eine unitäre Matrix, D eine Diagonalmatrix mit positiven reellen Diagonalkoeffizienten und U eine unipotente obere Dreiecksmatrix. Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens. (Anleitung: Die Zeilen von A bilden eine Basis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$. — Das Verfahren ersetzt v_j durch eine Linearkombination $v'_j = \sum_{i \leq j} b_{ij} v_i$ mit $b_{jj} > 0$. — Wir erhalten also eine obere Dreiecksmatrix $B = (b_{ij})_{ij}$ mit $P := AB$ orthogonal. — Also ist $A = PB^{-1}$. — Natürlich kann B^{-1} in der Form DU geschrieben werden.)

(b) Sei P eine obere $(n \times n)$ -Dreiecksmatrix mit Koeffizienten in K , die Diagonalkoeffizienten seien positive reelle Zahlen. Zeige: Ist P orthogonal (im Fall $K = \mathbb{R}$) oder unitär (im Fall $K = \mathbb{C}$), so ist P die Einheitsmatrix.

(c) Folgere aus (b): Die in (a) konstruierte Faktorisierung $A = PDU$ ist eindeutig.

34. Das Wurzelsystem G_2 . Betrachte die Menge P der Vektoren in $\mathbb{R}^2$

$$\varepsilon 2e_1, \varepsilon((m-3)e_1 + \alpha e_2), \varepsilon 2\alpha e_2, \quad \text{mit } \varepsilon \in \{1, -1\}, m \in \{0, 2, 4, 6\},$$

dabei ist $\alpha = \sqrt{3}$. Zeige: (a) Für jedes $a \in P$ gilt $\sigma_a(P) = P$. (b) Für $a, b \in P$ gilt $\frac{2\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \in \mathbb{Z}$.

35. Abstandsberechnung. Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die Ebenen

$$E(r) = \{^t[x, y, z] \mid x + y + z = r\} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechne den Abstand des Punkts $^t[1, 2, 3]$ von der Ebene $E(1)$.

(b) Berechne den Abstand der Ebenen $E(1)$ und $E(2)$.

36. (Aus der Biologie). Hier die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen A, AB, B, O bei Eskimos, Bantus, Engländern und Koreanern:

Blutgruppe	Esk	Ban	Eng	Kor
A	0,2914	0,1034	0,2090	0,2208
AB	0,0000	0,0866	0,0696	0,0000
B	0,0316	0,1200	0,0612	0,2069
O	0,6770	0,6800	0,6602	0,5723

Betrachte die jeweiligen Meßwertsätze (die Spalten) als Merkmalsvektoren

$$m^{\text{Esk}}, \quad m^{\text{Ban}}, \quad m^{\text{Eng}}, \quad m^{\text{Kor}} \in \mathbb{R}^4;$$

zum Beispiel also $m^{\text{Esk}} = ^t[0,2914 \ 0,0000 \ 0,0316 \ 0,6770]$. Aufgabe: Bestimme die Winkel zwischen diesen Vektoren.

Interpretation: Den Winkel zwischen zwei derartigen Merkmalsvektoren, etwa zwischen m^{Esk} und m^{Ban} kann man als eine mögliche Definition für den *genetischen Abstand* (hier der Eskimos und der Bantus) verwenden. In unserem Beispiel: Welches ist der größte Abstand, welches der kleinste?

10. Symmetrische Matrizen

37. (Ein-Zeilen-Beweise). Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrische Matrizen.

- (a) Ist A invertierbar, so ist auch A^{-1} symmetrisch. Ganz allgemein gilt: die komplementäre Matrix $A^\sharp$ ist symmetrisch.
- (b) Genau dann ist AB symmetrisch, wenn $AB = BA$ gilt.
- (c) Ist A nilpotent, so ist $A = 0$.
- (d) Genau dann ist das charakteristische Polynom von A sein Minimalpolynom, wenn A n paarweise verschiedene Eigenwerte hat.

38. (Andere Grundkörper). Gesucht ist jeweils eine nilpotente symmetrische (2×2) -Matrix $A \neq 0$ mit Koeffizienten in K , dabei sei

$$(a) \quad K = \mathbb{F}_2, \quad (b) \quad K = \mathbb{Q}, \quad (c) \quad K = \mathbb{C}.$$

In zwei der drei Fälle ist dies möglich (je ein Beispiel angeben), in einem Fall nicht (Ein-Zeilen-Beweis).

39. Bestimme zur folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix S , so daß tSAS eine Diagonalmatrix ist.

40. Sei K ein Körper, sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V . Ist $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $c_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, so sagt man, daß die Bilinearform $\langle -, - \rangle$ (bezüglich der Basis $\mathcal{A}$) durch die Matrix $C = (c_{ij})_{ij}$ beschrieben wird. Zeige: Die Matrizen, die diese Bilinearform (bezüglich irgendwelcher Basen) beschreiben, sind genau die Matrizen der Form tPCP mit $P \in \text{GL}(n, K)$.

Abgabe: **Mittwoch**, 21.06.2000, 14:00

Abgabe 29.06.2000

11. Symmetrische Bilinearformen

41. Sei $\langle -, - \rangle$ die durch die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ gegebene Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^4$.

Gesucht sind

- (a) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.
- (b) drei 1-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ negativ definit ist.
- (c) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ identisch Null ist.

42. Sei $\mathcal{D}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige, daß wir durch

$$\langle f, g \rangle = (fg)'(0) \quad (= \text{Auswertung der Ableitung des Produkts an der Stelle } 0)$$

eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{D}$ erhalten und daß das Radikal dieser Bilinearform die Menge der $f \in \mathcal{D}$ ist mit $f(0) = f'(0) = 0$.

43. Seien p, q, r natürliche Zahlen mit $p + q + r = n$. Sei $s = \min\{p, q\}$. Betrachte auf $V = \mathbb{R}^n$ die quadratische Form

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2.$$

Ein Unterraum U von V heißt total-isotrop, falls $\phi(u) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

(a) Zeige: Ist U ein total-isotroper Unterraum von V , so ist $U \cap \text{span}\{e_1, \dots, e_p\} = 0$ und $U \cap \text{span}\{e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\} = 0$. Folgere daraus: $\dim U \leq r + s$.

(b) Zeige: Der von den Vektoren $e_i + e_{p+i}$ mit $1 \leq i \leq s$ und den Vektoren e_j mit $p + q < j \leq n$ erzeugte Unterraum ist total-isotrop (und hat die Dimension $r + s$).

(c)* Jeder total-isotrope Unterraum ist in einem total-isotropen Unterraum der Dimension $r + s$ enthalten.

(d)* Sind U_1, U_2 total-isotrope Unterräume der Dimension $r + s$, so gibt es einen Endomorphismus f von V mit $\phi(f(v)) = \phi(v)$ für alle $v \in V$, der U_1 auf U_2 abbildet.

44. Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$. In der Vorlesung wird gezeigt, daß jedes quadratische Polynom $P(x_1, \dots, x_n)$ in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ mit Koeffizienten in K in eine der folgenden Normalformen überführt werden kann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 & \quad \text{mit } p + q \leq n, \\ \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 - 1 & \quad \text{mit } p + q \leq n, \\ \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 - x_{p+q+1} & \quad \text{mit } p + q < n. \end{aligned}$$

Betrachte den Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Welche Möglichkeiten gibt es? Für jede der Normalformen $P(x_1, x_2)$ soll eine Zeichnung der Nullstellenmenge $V(P)$ angefertigt werden

$$V(P) = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \mid P(r_1, r_2) = 0\}.$$

12. Quadratische Polynome, symmetrische Matrizen.

45. Sei Q einschaliges Hyperboloid oder hyperbolisches Paraboloid im $\mathbb{R}^3$. Zeige: Zu jedem Punkt $p \in Q$ gibt es genau zwei Geraden g_1, g_2 mit $p \in g_i \subset Q$, für $1 \leq i \leq 2$.

Hinweis: Hier die entsprechenden Gleichungen (schon in isometrischer Normalform):

einschaliges Hyperboloid: $r_1 X_1^2 + r_2 X_2^2 - r_3 X_3^2 = 1$

hyperbolisches Paraboloid: $r_1 X_1^2 - r_2 X_2^2 - X_3$

mit positiven reellen Zahlen r_1, r_2, r_3 .

46. Für $c \neq 0$ beschreibt

$$cT_1^2 + c(c-1)T_2^2 + cT_3^2 - 2cT_1T_3 + 4T_1 + 2T_3$$

eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$. Welche?

47. (a) Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Setze $f(x) = {}^t x A x$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Die Menge

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x+z) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Bestimme seine Dimension in Abhängigkeit vom Rang der Matrix A .

(b) Nimm die Liste der isometrischen Normalformen reeller quadratischer Polynome f in 3 Variablen und bestimme in allen Fällen $Z(f)$.

48. Betrachte die reellen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gesucht sind orthogonale Matrizen P, Q , so daß $P^{-1}AP$ und $Q^{-1}BQ$ Diagonalmatrizen sind.

Abgabe 05.07.2000