Unter dem charakteristischen Polynom einer $(n \times n)$-Matrix soll in Zukunft das Polynom $\chi_A(T) = \det(T \cdot I_n - A)$ verstanden werden (und nicht, wie im Leitfaden, $\chi_A(-T)$).

Aufgabenblatt 1: Polynome

1. Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar mit den (paarweise verschiedenen) Eigenwerten $a_1, \ldots, a_m$. Sei μ_A das Minimalpolynom von A. Zeige:
(a) $\mu_A = \prod_{i=1}^m (T - a_i)$.
(b) Genau dann ist $\mu_A = \chi_A$, wenn $m = n$ gilt.

2. Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n, K)$ nilpotent, und zwar ähnlich zu $J(\lambda)$, wobei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ eine Partition von n ist. Sei μ_A das Minimalpolynom von A. Zeige:
(a) $\mu_A = T^{\lambda_1}$.
(b) Genau dann ist $\mu_A = \chi_A$, wenn $m = 1$ gilt.

Hinweis zu den Aufgaben 1 und 2: Zuerst zeige man, daß für das Polynom $f = \prod_{i=1}^m (T - a_i)$ bzw. $f = T^{\lambda_1}$ gilt: $f(A) = 0$. Also ist μ_A ein Teiler von f. Man nimmt nun einen echten Teiler g von f und zeigt: $g(A) \neq 0$.

3. Sei $f \in \mathbb{R}[T]$ ein normiertes Polynom vom Grad 2. Man zeige, daß f genau dann irreduzibel ist, wenn es reelle Zahlen a, b mit $b \neq 0$ gibt, so daß $f = (T - a)^2 + b^2$ gilt.

4. Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Man bestimme alle irreduziblen Polynome $f \in K[T]$ mit $\deg f \leq 4$.

Abgabetermin: 20.04.2000

Das Kleingedruckte. Ohne die intensive Beschäftigung mit den wöchentlich gestellten Übungsaufgaben ist ein Verständnis der in der Vorlesung dargestellten Ergebnisse kaum möglich; deshalb wird dringend geraten, dass alle Übungszettel bearbeitet und dass Lösungsansätze untereinander diskutiert werden. Jede Woche wird (meist in der Donnerstags-Vorlesung) ein solcher Aufgabenzettel verteilt, er ist jeweils ab Donnerstag 12:00 auch im Internet abrufbar.

Die Lösungen sind auf Blättern im DIN A4-Format (nicht vergessen: Name und Übungsgruppe) **in deutlich lesbarer Form** abzugeben. Die Lösungen werden von den Tutorinnen und Tutoren korrigiert, pro Aufgabe gibt es 4 Punkte. Die Aufgaben können in Zweiergruppen bearbeitet werden. Die Lösungen werden in den Übungsstunden besprochen, dabei tragen jeweils Studenten ihre Lösungen oder Lösungsansätze vor. Wenn in Zweiergruppen abgegeben wird, so wird erwartet, dass jeder der beiden bereit ist, die vorgelegte Lösung vorzutragen.

Für die **Bescheinigung über die erfolgreiche Teilnahme** an den Übungen wird erwartet, dass jeder Aufgabenzettel bearbeitet wird und dass dabei jeweils mindestens 50 % der Punkte erzielt werden: erforderlich sind jeweils 32 Punkte für die Aufgabenzettel 1-4, 5-8 und 9-12. Das Bearbeiten und Lösen der Übungsaufgaben ist auf jeden Fall auch dann notwendig, wenn Sie keinen Übungsschein mehr brauchen.