

## 10. Symmetrische Matrizen

**37. (Ein-Zeilen-Beweise).** Seien  $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrische Matrizen.

(a) Ist  $A$  invertierbar, so ist auch  $A^{-1}$  symmetrisch. Ganz allgemein gilt: die komplementäre Matrix  $A^\sharp$  ist symmetrisch.

(b) Genau dann ist  $AB$  symmetrisch, wenn  $AB = BA$  gilt.

(c) Ist  $A$  nilpotent, so ist  $A = 0$ .

(d) Genau dann ist das charakteristische Polynom von  $A$  sein Minimalpolynom, wenn  $A$   $n$  paarweise verschiedene Eigenwerte hat.

**38. (Andere Grundkörper).** Gesucht ist jeweils eine nilpotente symmetrische  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A \neq 0$  mit Koeffizienten in  $K$ , dabei sei

$$(a) \quad K = \mathbb{F}_2, \quad (b) \quad K = \mathbb{Q}, \quad (c) \quad K = \mathbb{C}.$$

In zwei der drei Fälle ist dies möglich (je ein Beispiel angeben), in einem Fall nicht (Ein-Zeilen-Beweis).

**39.** Bestimme zur folgenden Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix  $S$ , so daß  ${}^tSAS$  eine Diagonalmatrix ist.

**40.** Sei  $K$  ein Körper, sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Sei  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Ist  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $c_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ , so sagt man, daß die Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  (bezüglich der Basis  $\mathcal{A}$ ) durch die Matrix  $C = (c_{ij})_{ij}$  beschrieben wird. Zeige: Die Matrizen, die diese Bilinearform (bezüglich irgendwelcher Basen) beschreiben, sind genau die Matrizen der Form  ${}^tPCP$  mit  $P \in \text{GL}(n, K)$ .

Abgabe: **Mittwoch**, 21.06.2000, 14:00