

Abgabe 29.06.2000

11. Symmetrische Bilinearformen

41. Sei $\langle -, - \rangle$ die durch die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ gegebene Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^4$.

Gesucht sind

- (a) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.
- (b) drei 1-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ negativ definit ist.
- (c) drei 2-dimensionale Unterräume $U \subset V$, auf denen $\langle -, - \rangle$ identisch Null ist.

42. Sei $\mathcal{D}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige, daß wir durch

$$\langle f, g \rangle = (fg)'(0) \quad (= \text{Auswertung der Ableitung des Produkts an der Stelle } 0)$$

eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{D}$ erhalten und daß das Radikal dieser Bilinearform die Menge der $f \in \mathcal{D}$ ist mit $f(0) = f'(0) = 0$.

43. Seien p, q, r natürliche Zahlen mit $p + q + r = n$. Sei $s = \min\{p, q\}$. Betrachte auf $V = \mathbb{R}^n$ die quadratische Form

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2.$$

Ein Unterraum U von V heißt total-isotrop, falls $\phi(u) = 0$ für alle $u \in U$ gilt.

(a) Zeige: Ist U ein total-isotroper Unterraum von V , so ist $U \cap \text{span}\{e_1, \dots, e_p\} = 0$ und $U \cap \text{span}\{e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\} = 0$. Folgere daraus: $\dim U \leq r + s$.

(b) Zeige: Der von den Vektoren $e_i + e_{p+i}$ mit $1 \leq i \leq s$ und den Vektoren e_j mit $p + q < j \leq n$ erzeugte Unterraum ist total-isotrop (und hat die Dimension $r + s$).

(c)* Jeder total-isotrope Unterraum ist in einem total-isotropen Unterraum der Dimension $r + s$ enthalten.

(d)* Sind U_1, U_2 total-isotrope Unterräume der Dimension $r + s$, so gibt es einen Endomorphismus f von V mit $\phi(f(v)) = \phi(v)$ für alle $v \in V$, der U_1 auf U_2 abbildet.

44. Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$. In der Vorlesung wird gezeigt, daß jedes quadratische Polynom $P(x_1, \dots, x_n)$ in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ mit Koeffizienten in K in eine der folgenden Normalformen überführt werden kann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 & \quad \text{mit } p + q \leq n, \\ \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 - 1 & \quad \text{mit } p + q \leq n, \\ \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2 - x_{p+q+1} & \quad \text{mit } p + q < n. \end{aligned}$$

Betrachte den Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Welche Möglichkeiten gibt es? Für jede der Normalformen $P(x_1, x_2)$ soll eine Zeichnung der Nullstellenmenge $V(P)$ angefertigt werden

$$V(P) = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \mid P(r_1, r_2) = 0\}.$$