

12. Quadratische Polynome, symmetrische Matrizen.

45. Sei Q einschaliges Hyperboloid oder hyperbolisches Paraboloid im $\mathbb{R}^3$. Zeige: Zu jedem Punkt $p \in Q$ gibt es genau zwei Geraden g_1, g_2 mit $p \in g_i \subset Q$, für $1 \leq i \leq 2$.

Hinweis: Hier die entsprechenden Gleichungen (schon in isometrischer Normalform):

einschaliges Hyperboloid: $r_1 X_1^2 + r_2 X_2^2 - r_3 X_3^2 = 1$

hyperbolisches Paraboloid: $r_1 X_1^2 - r_2 X_2^2 - X_3$

mit positiven reellen Zahlen r_1, r_2, r_3 .

46. Für $c \neq 0$ beschreibt

$$cT_1^2 + c(c-1)T_2^2 + cT_3^2 - 2cT_1T_3 + 4T_1 + 2T_3$$

eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$. Welche?

47. (a) Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Setze $f(x) = {}^t x A x$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Die Menge

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x+z) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n\}$$

ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Bestimme seine Dimension in Abhängigkeit vom Rang der Matrix A .

(b) Nimm die Liste der isometrischen Normalformen reeller quadratischer Polynome f in 3 Variablen und bestimme in allen Fällen $Z(f)$.

48. Betrachte die reellen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gesucht sind orthogonale Matrizen P, Q , so daß $P^{-1}AP$ und $Q^{-1}BQ$ Diagonalmatrizen sind.

Abgabe 05.07.2000