Aufgabenblatt 2: Verschiedenes

5. Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$ mit $n \geq 1$.

(a) Sei $0 \neq v \in K^n$. Sei g ein Polynom in $K[T]$ mit $g(A)v = 0$. Zeige: g und χ_A sind nicht teilerfremd.

(b) Folgere daraus: Ist χ_A irreduzibel, und ist $0 \neq v \in K^n$, so sind die Vektoren $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ linear unabhängig (bilden also eine Basis).

6. Sei K ein Körper. (a) Seien $c_0, \dots, c_{n-1} \in K$. Zeige: Die Matrix

$$B(c_0, \dots, c_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{n-1} \end{bmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom $T^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i T^i$. Folgere daraus, daß jedes normierte Polynom in $K[T]$ das charakteristische Polynom einer Matrix ist.

(b) Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ (mit $a_n = 1$) irreduzibel ist. Zeige: Die Matrix A ist zur Matrix $B(-a_0, \dots, -a_{n-1})$ ähnlich.

Hinweis: Wähle einen beliebigen Vektor $v \neq 0$ in K^n. Zeige $A^n v = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i v$. Warum folgt daraus die Behauptung?

7. Seien $U_1, \dots, U_t$ Unterräume eines Vektorraums V. Zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Jedes Element $v \in V$ läßt sich eindeutig in der Form $v = \sum_{i=1}^{t} u_i$ mit $u_i \in U_i$ schreiben.

(ii) (a) Jedes Element $v \in V$ läßt sich in der Form $v = \sum_{i=1}^{t} u_i$ mit $u_i \in U_i$ schreiben.
(b) Ist $\sum_{i=1}^{t} u_i = 0$ mit $u_i \in U_i$, so ist $u_i = 0$ für alle i.

(iii) Einerseits ist $V = \sum_{i=1}^{t} U_i$ und andererseits gilt $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = 0$ für alle $1 \leq j \leq t$.

8. (a) Folgere aus dem Satz von Bézout den "Chinesischer Restsatz": Sei R ein euklid'scher Ring. Seien paarweise teilerfremde Elemente $g_1, \dots, g_s$ gegeben. Zeige: Zu jedem s-Tupel von Elementen $r_1, \dots, r_s \in R$ gibt es ein $r \in R$, so daß $r - r_i$ durch g_i teilbar ist.

(b) Gesucht ist eine ganze Zahl r mit $r \equiv 3 \mod 5$, $r \equiv 5 \mod 8$ und $r \equiv 2 \mod 7$.

Abgabe: Donnerstag, 27.04.2000