Abgabe: Donnerstag, 04.05.2000

Aufgabenblatt 3: Die Jordan'sche Normalform

9. Sei K ein Körper. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Das charakteristische Polynom χ_A zerfalle in Linearfaktoren. Zeige: Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom μ_A keine mehrfachen Nullstellen hat.

10. Sei K ein Körper, sei $A \in M(n \times n, K)$. Sei $\gamma \in K$ ein Eigenwert von A mit eindimensionalem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \gamma)$. Hat $T - \gamma$ im charakteristischen Polynom χ_A die Multiplizität d, so ist A ähnlich zu einer Matrix der Form $(\gamma I_d + J((d))) \oplus B$, dabei ist B eine $(n-d) \times (n-d)$ Matrix.

11. Bestimme (ohne Computer) die Jordan'sche Normalform für folgende Matrix in $M(4 \times 4, \mathbb{C})$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Bestimme für die reelle Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(auch hier ohne Computer) die Potenz A^{50} auf folgende Weise:

(a) Suche eine invertierbare Matrix S, eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N mit $A = S^{-1}(D+N)S$ und $DN = ND$.

(b) Zeige: Es ist $A^{50} = S^{-1}(D+N)^{50}S$, also berechnet man als erstes $(D+N)^{50}$.

(c) Wegen $DN = ND$ gilt $(D+N)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{m}{k} D^k N^{m-k}$ (und glücklicherweise sind in dieser Summe nur ganz wenige Summanden von Null verschieden – warum?).