

Abgabe: Donnerstag, 11.05.2000

Aufgabenblatt 4: Euklid'sche Vektorräume (ein Rechenzettel)

13. Zuordnung einer Matrix zu einer Bilinearform. Sei V der von den Polynomen $1, T, T^2, T^3$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}[T]$. Definiere eine Bilinearform $\varphi(-, -)$ auf V durch

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(T)g(T) \, dT.$$

Berechne die Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$, so daß φ bezüglich der Basis $1, T, T^2, T^3$ durch die Matrix A beschrieben wird:

$$\varphi\left(\sum c_i T^i, \sum d_i T^i\right) = [c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

für alle $c_0, \dots, c_3, d_0, \dots, d_3 \in \mathbb{R}$.

14. Nachweis, daß eine Bilinearform positiv definit ist. Betrachte die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Koeffizienten $a_{ii} = 2$ für $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ für $1 \leq i < n$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Zeige: Die Bilinearform φ_A auf dem $\mathbb{R}^n$ ist positiv definit.

15. Orthonormalisieren. Betrachte den $\mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen inneren Produkt

$$\langle -, - \rangle; \text{ es ist also } \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = \sum x_i y_i.$$

Orthonormalisiere die folgende Folge von Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

16. Bestimmung des orthogonalen Komplements. Betrachten Sie noch einmal den euklid'schen Vektorraum V , der in Aufgabe 13 gegeben wurde. Sei U der von $1, T$ erzeugte Unterraum. Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$, dies ist der Unterraum aller $v \in V$ mit $\varphi(u, v) = 0$ für alle $u \in U$.