Abgabe: Donnerstag, 18.05.2000

Aufgabenblatt 5: Unitäre Räume

(Beweise, analog zum Fall der euklid'schen Räume)

Sei $V = (V, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Sei $f\colon V \to V$ ein unitärer Endomorphismus.

17. Orthonormalisierung. (a) Sei U ein Unterraum von V. Sei $u_1, \dots, u_m$ eine Orthonormalbasis von U. Ist $v \in V$, so setze

$$v' = v - \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Zeige erstens: $v' \in U^{\perp}$. Zweitens: Ist $v \in U$, so ist $v' = 0$. Drittens: Ist $v \notin U$, so sind die Vektoren $u_1, \dots, u_m, v$ linear unabhängig.

(b) Folgere daraus: Jeder endlich-dimensionale unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

18. Eigenwerte. (a) Ist γ ein Eigenwert von f, so ist $|\gamma| = 1$.

(b) Die Abbildung f ist injektiv. Ist V endlich-dimensional, so ist f bijektiv.

(c) Ist V endlich-dimensional, so ist das charakteristische Polynom von f von der Form $(T - \gamma_1) \cdots (T - \gamma_n)$ mit $|\gamma_i| = 1$ für $1 \le i \le n$.

19. Orthogonales Komplement. Zeige:

Ist U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V, der f-invariant ist, so ist auch $U^{\perp}$ f-invariant.

20. Diagonalisierbarkeit. Zeige: Es gibt eine Orthonormalbasis von V, so daß die zugehörige Matrizendarstellung von f eine Diagonalmatrix ist.