Abgabe: **Mittwoch,** 31.05.2000, 12:00

7. Ebene diskrete Gruppen. Schraubungen in $\mathbb{R}^3$

Eine Untergruppe L von $(\mathbb{R}^n, +)$ heißt *diskrete* Untergruppe, wenn es ein $\epsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist $0 \neq v \in L$, so ist $||v|| \geq \epsilon$.

25. Zeigen Sie, daß es (zu vorgebenem $\epsilon > 0$ und d) eine explizite Schranke b mit folgender Eigenschaft gibt: Sind $v_1, \ldots, v_t$ Vektoren in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ für $i \neq j$ und $||v_i|| \leq d$ für alle i, so ist $t \leq b$.

Für Tapfere: Man zeige das Gleiche für Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Kommentar: In der Vorlesung (wie auch im Leitfaden) wird mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß gezeigt: Ist L eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$, und ist $d \in \mathbb{R}$, so gibt es nur endlich viele Vektoren $v \in L$ mit $||v|| \leq d$. Wie wir hier sehen, braucht man dafür aber den Satz von Bolzano-Weierstraß gar nicht.

26. (a) Zeigen Sie: Ist L eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$, so ist die Anzahl der kürzesten von Null verschiedenen Vektoren $2, 4$ oder 6.

(b) Die kürzesten von Null verschiedenen Vektoren in L können L erzeugen, müssen dies aber nicht. Geben Sie zu jeder der Zahlen $k = 2, 4, 6$ jeweils eine diskrete Untergruppe L an, die genau k Vektoren der Länge 1 besitzt und von diesen erzeugt wird, und auch eine diskrete Untergruppe L', die genau k Vektoren der Länge 1 besitzt, von diesen nicht erzeugt wird, während aber alle von Null verschiedenen Vektoren Länge mindestens 1 haben.

27. Zeige: Sind v_1, v_2 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$, so ist die Menge $L = \{z_1 v_1 + z_2 v_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{Z}^2, +)$ (man nennt eine derartige Untergruppe L ein *Gitter* und v_1, v_2 eine *Gitterbasis* von L).

(a) Zeige: Sei v_1, v_2 eine Gitterbasis des Gitters $L \subset \mathbb{R}^2$. Genau dann ist $w = z_1 v_1 + z_2 v_2$ Element einer Gitterbasis w, w' von L, wenn die ganzen Zahlen z_1, z_2 teilerfremd sind.

(b) Zeige: Die Menge der Vektoren $[a, b] \in \mathbb{Z}^2$, für die $a + b$ eine gerade Zahl ist, ist ein Gitter. Man gebe 10 verschiedene Gitterbasen für dieses Gitter an (mit 10 Zeichnungen).

(c) Zeige: Die Menge K der Vektoren $\frac{1}{2}[a, b\sqrt{3}]$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $2|a + b$ bildet eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$. Bestimme eine Gitterbasis.

Kommentar. K ist ein typischer Zahlbereich, der im Rahmen der algebraischen Zahlentheorie untersucht wird: die Menge der "ganzen" Zahlen in einem Zahlkörper. Wer Lust hat, sollte zeigen, daß K ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.)

---

28. Eine Gerade ℓ im $\mathbb{R}^3$ ist durch einen Vektor a (Ortsvektor) und einen von Null verschiedenen Vektor b (Richtungsvektor) gegeben: $\ell = \{a + rb \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Sei ϕ eine eigentliche Bewegung des $\mathbb{R}^3$. Zeige als erstes: Es gibt eine Fixgerade ℓ. Zweitens: Entweder ist ϕ eine Drehung um diese Gerade, oder es gibt einen Richtungsvektor b zu dieser Geraden, so daß ϕ die Hintereinanderschaltung einer Drehung um die Achse ℓ und der Verschiebung um den Vektor b ist (in diesem Fall spricht man von einer *Schraubung*).