

8. Noch einmal: Bewegungen. Und reguläre Polyeder.

29. (a) Zeige: Die Zuordnung $\eta: \mathcal{B}(n) \rightarrow GL(n+1, \mathbb{R})$

$$\eta(t_a \circ f_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{O}(n)$$

ist ein injektiver Gruppen-Homomorphismus; ist $\phi \in \mathcal{B}(n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

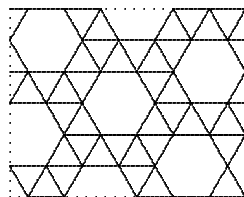
$$\eta(\phi) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi(x) \end{bmatrix}.$$

(b) Sei nun $n = 2$. Wie sieht $\eta(\phi)$ aus, wenn ϕ eine Translation, eine Drehung mit Drehwinkel $0 < \alpha < 2\pi$, eine Spiegelung, bzw. eine Gleitspiegelung ist?

30. Sei $n_1, \dots, n_t$ eine Folge natürlicher Zahlen $n_i \geq 3$ mit $\sum_i \frac{n_i-2}{n_i} = 2$.

(a) Zeige: Bis auf zyklische Vertauschungen und Umkehr der Reihenfolge gibt es genau 11 solche Folgen (zum Beispiel $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 4, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 6), \dots$).

(b) Zu jeder solchen Folge kann man eine “Pflasterung” der Ebene aus regulären n_i -Ecken mit Kantenlänge 1 konstruieren, so daß in jedem Eckpunkt t n -Ecke aneinanderstoßen, und zwar ein n_1 -Eck, ein n_2 -Eck, usw., entsprechend der Folge $(n_1, n_2, \dots, n_t)$. Skizziere alle diese Pflasterungen. Hier als Beispiel ein Ausschnitt der Pflasterung zur Folge $(3, 3, 3, 3, 6)$:



Zeige: die jeweilige Symmetriegruppe ist eine ebene Kristallgruppe. Bestimme jeweils den Typ.

31. Seien $k, n \geq 3$ natürliche Zahlen mit $\frac{k(n-2)}{n} < 2$. Bestimme alle Möglichkeiten für k, n und zeige, daß zu jedem dieser Fälle in natürlicher Weise ein reguläres Polyeder gehört (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Isokaeder).

32. Betrachte die Punkte $A = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$,

mit $a = \sqrt{2}$. Bestimme alle Drehungen des $\mathbb{R}^3$, die die Menge $\{A, B, C, D\}$ in sich überführen (gesucht sind die entsprechenden (3×3) -Matrizen bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$). Bestimme jeweils auch die Drehachse.

Abgabe: 08.05.2000

Die 17 ebenen Kristallgruppen

nach A.Schoenflies (1891) und E.S.Fedorow (1892).

Es gibt 17 verschiedene ebene Kristallgruppen. Hier ein **Entscheidungsverfahren** zur Bestimmung des jeweiligen Typs. Sei G eine ebene Kristallgruppe, sei d die höchste Ordnung einer Drehung in G . Es sei $\overline{G}$ die zugehörige Punktgruppe.

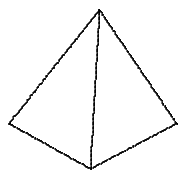
(Gleitspiegelachsen bezeichnen wir einfach als Achsen. Unter einem Viererzentrum verstehen wir das Drehzentrum einer Drehung der Ordnung 4; analog ist ein Dreierzentrum definiert.)

d	Typ	$\overline{G}$
Fall 1. <i>Alle Symmetrien in G sind eigentliche Bewegungen.</i>		
1	p1	$\mathcal{C}_1$
2	p2	$\mathcal{C}_2$
3	p3	$\mathcal{C}_3$
4	p4	$\mathcal{C}_4$
6	p6	$\mathcal{C}_6$
Fall 2. <i>Es gibt Symmetrien in G, die uneigentliche Bewegungen sind.</i>		
1 Jede Achse ist Spiegelachse.	pm	$\mathcal{D}_1$
Es gibt keine Spiegelachse.	pg	$\mathcal{D}_1$
Es gibt Spiegelachsen, aber auch Achsen, die keine Spiegelachsen sind.	cm	$\mathcal{D}_1$
2 Jedes Drehzentrum liegt auf zwei orthogonalen Spiegelachsen.	pmm	$\mathcal{D}_2$
Ein Drehzentrum liegt auf genau einer Achse.	pmg	$\mathcal{D}_2$
Ein Drehzentrum liegt auf keiner Achse.	pgg	$\mathcal{D}_2$
Es gibt ein Drehzentrum, das auf zwei orthogonalen Achsen, die keine Spiegelachsen sind, liegt.	cmm	$\mathcal{D}_2$
3 Jedes Dreierzentrum liegt auf einer Spiegelachse.	p3m1	$\mathcal{D}_3$
Es gibt ein Dreierzentrum, das auf keiner Spiegelachse liegt.	p31m	$\mathcal{D}_3$
4 Ein Viererzentrum liegt auf einer Spiegelachse.	p4m	$\mathcal{D}_4$
Ein Viererzentrum liegt auf keiner Spiegelachse.	p4g	$\mathcal{D}_4$
6	p6m	$\mathcal{D}_6$

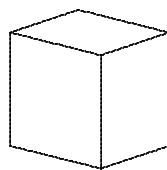
Es gibt genau 230 räumliche Kristallgruppen.

Auch sie wurden von A.Schoenflies und E.S.Fedorow klassifiziert.

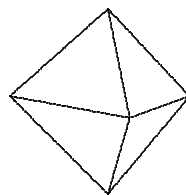
Die regulären Polyeder:



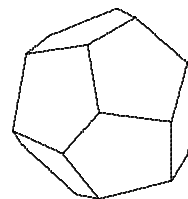
Tetraeder



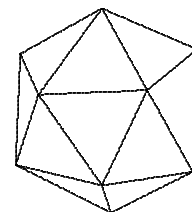
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder