9. Geometrie

Abgabe: 15.06.2000

33. Iwasawa-Zerlegung (oder QR-Zerlegung). Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. *Jede invertierbare Matrix $A \in M(n \times n, K)$ läßt sich als Produkt $A = PDU$ schreiben, dabei ist P für $K = \mathbb{R}$ eine orthogonale Matrix, für $K = \mathbb{C}$ eine unitäre Matrix, D eine Diagonalmatrix mit positiven reellen Diagonalkoeffizienten und U eine unipotente obere Dreiecksmatrix.* Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens. (Anleitung: Die Zeilen von A bilden eine Basis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$. — Das Verfahren ersetzt v_j durch eine Linearkombination $v'_j = \sum_{i \le j} b_{ij} v_i$ mit $b_{jj} > 0$. — Wir erhalten also eine obere Dreiecksmatrix $B = (b_{ij})_{ij}$ mit $P := AB$ orthogonal. — Also ist $A = PB^{-1}$. — Natürlich kann B^{-1} in der Form DU geschrieben werden.)

(b) Sei P eine obere $(n \times n)$-Dreiecksmatrix mit Koeffizienten in K, die Diagonalkoeffizienten seien positive reelle Zahlen. Zeige: Ist P orthogonal (im Fall $K = \mathbb{R}$) oder unitär (im Fall $K = \mathbb{C}$), so ist P die Einheitsmatrix.

(c) Folgere aus (b): Die in (a) konstruierte Faktorisierung $A = PDU$ ist eindeutig.

34. Das Wurzelsystem G_2. Betrachte die Menge P der Vektoren in $\mathbb{R}^2$

$$\varepsilon 2e_1,\ \varepsilon((m-3)e_1 + \alpha e_2),\ \varepsilon 2\alpha e_2, \quad \text{mit} \quad \varepsilon \in \{1, -1\},\ m \in \{0, 2, 4, 6\},$$

dabei ist $\alpha = \sqrt{3}$. Zeige: (a) Für jedes $a \in P$ gilt $\sigma_a(P) = P$. (b) Für $a, b \in P$ gilt $\frac{2\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \in \mathbb{Z}$.

35. Abstandsberechnung. Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die Ebenen

$$E(r) = \{{}^t[x, y, z] \mid x + y + z = r\} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechne den Abstand des Punkts ${}^t[1, 2, 3]$ von der Ebene $E(1)$.

(b) Berechne den Abstand der Ebenen $E(1)$ und $E(2)$.

36. (Aus der Biologie). Hier die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen A, AB, B, O bei Eskimos, Bantus, Engländern und Koreanern:

Blutgruppe	Esk	Ban	Eng	Kor
A	0,2914	0,1034	0,2090	0,2208
AB	0,0000	0,0866	0,0696	0,0000
B	0,0316	0,1200	0,0612	0,2069
O	0,6770	0,6800	0,6602	0,5723

Betrachte die jeweiligen Meßwertsätze (die Spalten) als Merkmalsvektoren

$$m^{\mathrm{Esk}},\quad m^{\mathrm{Ban}},\quad m^{\mathrm{Eng}},\quad m^{\mathrm{Kor}} \quad \in \mathbb{R}^4;$$

zum Beispiel also $m^{\mathrm{Esk}} = {}^t[\,0{,}2914 \;\; 0{,}0000 \;\; 0{,}0316 \;\; 0{,}6770\,]$. Aufgabe: Bestimme die Winkel zwischen diesen Vektoren.

Interpretation: Den Winkel zwischen zwei derartigen Merkmalsvektoren, etwa zwischen m^{Esk} und m^{Ban} kann man als eine mögliche Definition für den *genetischen Abstand* (hier der Eskimos und der Bantus) verwenden. In unserem Beispiel: Welches ist der größte Abstand, welches der kleinste?