Eigenwerte. Sei f unitärer Endomorphismus des unitären Vektorraums V. Ist γ ein Eigenwert von f, so ist $|\gamma| = 1$. Insbesondere ist die Abbildung f injektiv. Ist V endlich-dimensional, so ist f bijektiv und das charakteristische Polynom von f hat die Form $(T-\gamma_1)\cdots(T-\gamma_n)$ mit $|\gamma_i| = 1$ für $1 \le i \le n$.

Orthogonales Komplement. Sei f unitärer Endomorphismus des unitären Vektorraums V. Ist U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V, der f-invariant ist, so ist auch $U^\perp$ f-invariant.

Diagonalisierbarkeit. (Hauptsatz über unitäre Endomorphismen.) *Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, so daß die zugehörige Matrizendarstellung von f eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalkoeffizienten den Betrag 1 haben.*

(5.5) Orthogonale Matrizen, unitäre Matrizen.

Eine reelle $(n \times n)$-Matrix A heißt *orthogonal,* falls A invertierbar ist mit

$$A^{-1} = {}^tA.$$

Die Menge der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen bildet eine Untergruppe $\mathcal{O}(n)$ der Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Ist A eine orthogonale Matrix, so ist $|\det A| = 1$. (Denn es ist $1 = \det A^{-1}A = \det({}^tA \cdot A) = (\det A)^2$.). Ist $\det A = 1$, so nennt man A *orientierungserhaltend* (oder eigentlich), ist $\det A = -1$, so nennt man A *orientierungsumkehrend* (oder uneigentlich).

(1) Genau dann ist A orthogonal, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis des kanonischen euklid'schen Raums $\mathbb{R}^n$ bilden, und auch genau dann, wenn die Transponierten der Zeilen von A eine Orthonormalbasis des kanonischen euklid'schen Raums $\mathbb{R}^n$ bilden.

(1′) Folgerung: Ist V ein n-dimensionaler euklid'scher Raum und sind zwei Orthonormalbasen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben, so ist die Basiswechselmatrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ eine orthogonale Matrix.

(2) Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Genau dann ist A orthogonal, wenn die Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein orthogonaler Endomorphismus (bezüglich des kanonischen inneren Produkts auf $\mathbb{R}^n$) ist.

(3) Ist V ein euklid'scher Vektorraum mit Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$, und ist $f\colon V \to V$ orthogonaler Endomorphismus, so ist die Matrizendarstellung von f bezüglich dieser Basis eine orthogonale Matrix.

(4) **Umformulierung des Haupsatzes über orthogonale Endomorphismen.** *Ist A eine orthogonale Matrix, so gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^{-1}AP = \bigoplus_{i=1}^m C_i$, wobei die Matrizen C_i (1×1)-Matrizen* $[1]$ *oder* $[-1]$ *oder (2×2)-Drehmatrizen zu Winkeln $0 < t_i < \pi$ oder $\pi < t_i < 2\pi$ sind.*

Sei A eine komplexe $(n \times n)$-Matrix. Die Matrix A heißt *unitär,* falls A invertierbar ist mit

$$A^{-1} = {}^t\overline{A}.$$

Die Menge der unitären $(n\times n)$*-Matrizen bildet eine Untergruppe* $\mathcal{U}(n)$ *der Gruppe* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Ist A *eine unitäre Matrix, so ist* $|\det A| = 1$. (Denn es ist $\det\overline{A} = \overline{\det A}$, also $1 = \det A^{-1}A = \det({}^t\overline{A}\cdot A) = \overline{d}\cdot d$ mit $d = \det A$).

(1) Genau dann ist A unitär, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis des kanonischen hermite'schen Raums $\mathbb{C}^n$ bilden, und auch genau dann, wenn die Transponierten der Zeilen von A eine Orthonormalbasis des kanonischen hermite'schen Raums $\mathbb{C}^n$ bilden.

(1′) Folgerung: Ist V ein n-dimensionaler hermite'scher Raum und sind zwei Orthonormalbasen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben, so ist die Basiswechselmatrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ eine unitäre Matrix.

(2) Sei A eine komplexe $(n\times n)$-Matrix. Genau dann ist A unitär, wenn die Abbildung $f_A\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ ein unitärer Endomorphismus (bezüglich des kanonischen inneren Produkts auf $\mathbb{C}^n$) ist.

(3) Ist V ein hermite'scher Vektorraum mit Orthonormalbasis $v_1,\dots,v_n$, und ist $f\colon V\to V$ unitärer Endomorphismus, so ist die Matrizendarstellung von f bezüglich dieser Basis eine unitäre Matrix.

(4) **Umformulierung des Haupsatzes über unitäre Endomorphismen.** *Ist* A *eine unitäre Matrix, so gibt es eine unitäre Matrix* P, *so daß* $P^{-1}AP$ *eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalkoeffizienten den Betrag 1 haben.*

Jede orthogonale Matrix A ist auch eine unitäre Matrix (jede reelle Matrix kann natürlich als komplexe Matrix aufgefaßt werden). Wie wir wissen, gibt es eine orthogonale Matrix P mit $P^{-1}AP = \bigoplus_{i=1}^m C_i$, wobei die Matrizen C_i (1×1)-Matrizen $[1]$ oder $[-1]$ oder (2×2)-Drehmatrizen $D(\alpha_i)$ zu Winkeln $0<\alpha_i<\pi$ oder $\pi<\alpha_i<2\pi$ sind. *Die Drehmatrix* $D(\alpha) = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ *ist (als komplexe Matrix) ähnlich zur Diagonalmatrix mit den Diagonalkoeffizienten* $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ *und* $\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)$; es ist nämlich

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{-i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{-i}{\sqrt2}\end{bmatrix}}_{{}^t\overline{P}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}}_{D(\alpha)}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{i}{\sqrt2}\end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix}\cos\alpha+i\sin\alpha & 0\\ 0 & \cos\alpha-i\sin\alpha\end{bmatrix}$$

dabei ist $P = \begin{bmatrix}\frac{i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{i}{\sqrt2}\end{bmatrix}$ eine unitäre Matrix.

(5.6) Isometrien des $\mathbb{R}^n$.

Wir betrachten hier den kanonischen euklid'schen Vektorraum $(\mathbb{R}^n,\langle -,-\rangle)$. Sind $a,b\in\mathbb{R}^n$, so setze

$$d(a,b) = ||a-b||,$$

man nennt $d(a,b)$ der *Abstand* der Punkte a,b (man erhält auf diese Weise eine "Metrik" auf $\mathbb{R}^n$).

Eine Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie* (oder *Bewegung*), falls gilt:

$$d(\phi(a),\phi(b)) = d(a,b) \quad \text{für alle} \quad a,b \in \mathbb{R}^n$$

(verlangt wird also nur, daß ϕ abstandserhaltend ist). Zwei Arten von Isometrien spielen eine besondere Rolle: Einerseits die *Translationen* t_a mit $a \in \mathbb{R}^n$; es ist $t_a(x) = x + a$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und andererseits die orthogonalen Endomorphismen.

Satz. *Sei $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie. Dann gibt es einen orthogonalen Endomorphismus $\phi'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\phi = t_a \circ \phi'$.* Der Vektor a wie auch der orthogonale Endomorphismus ϕ' sind durch ϕ eindeutig bestimmt. (Es ist $a = \phi(0)$ und $\phi'(x) = \phi(x) - a$.)

Beweis: Sei $a = \phi(0)$. Sei $\phi'(x) = \phi(x) - a$. Dann ist $\phi'(0) = \phi(0) - a = \phi(0) - \phi(0) = 0$.

(1) Es gilt $d(\phi'(x),\phi'(y)) = d(\phi(x) - a, \phi(y) - a)) = d(\phi(x),\phi(y)) = d(x,y)$.

(2) Es gilt $\langle \phi'(x),\phi'(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$. Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
\langle \phi'(v),\phi'(w)\rangle &= \frac{1}{2}\big(||\phi'(v)||^2 + ||\phi'(w)||^2 - ||\phi'(v) - \phi'(w)||^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(d(\phi'(v),0)^2 + d(\phi'(w),0)^2 - d(\phi'(v),d'(w))^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(d(v,0)^2 + d(w,0)^2 - d(v,w)^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(||v||^2 + ||w||^2 - ||v-w||^2\big) = \langle v,w\rangle
\end{aligned}$$

Es genügt nun, folgendes Lemma zu zeigen:

Lemma. *Ist $\phi'\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit $\langle \phi'(x),\phi'(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$, so ist ϕ' linear* (es gibt also eine Matrix A mit $\phi' = f_A$, und A ist natürlich eine orthogonale Matrix).

Beweis: Betrachte die Vektoren $a_i = \phi'(e_i)$ für $1 \le i \le n$. Nach Voraussetzung ist dies eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Bilde die Matrix A, deren i-te Spalte gerade a_i ist, dies ist eine orthogonale Matrix. Sei $B = {}^tA = A^{-1}$. Wegen $f_A(e_i) = a_i$ ist $f_B(a_i) = f_{A^{-1}}(a_i) = (f_A)^{-1}(a_i) = e_i$. Also ist $h = f_B \circ \phi'$ eine Abbildung mit $h(e_i) = e_i$, und $\langle h(x),h(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$. Ist nun $x \in \mathbb{R}^n$, so schreiben wir $x = \sum x_i e_i$. Wie wir wissen, ist $x_i = \langle x, e_i\rangle$. Wir sehen:

$$\langle h(x), e_i\rangle = \langle h(x), h(e_i)\rangle = \langle x, e_i\rangle = x_i,$$

demnach ist $h(x) = \sum\langle h(x), e_i\rangle e_i = \sum x_i e_i = x$. Also ist h die identische Abbildung und demnach $\phi' = f_B^{-1} = f_A$.

Die Hintereinanderschaltung zweier Isometrien ist wieder eine Isometrie. Aus obigem Satz folgt unmittelbar, daß Isometrien immer bijektiv sind, und natürlich ist dann die Umkehrabbildung wieder eine Isometrie. Die Menge aller Isometrien bildet (bezüglich der Hintereinanderschaltung von Abbildungen) eine Gruppe $\mathcal{B}(n)$. Die Gruppe der orthogonalen Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(n)$; die der Translationen mit $\mathcal{T}(n)$. — Ist $g \in \mathcal{O}(n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, so erhält man das Produkt von $g \circ t_a$ als

$$g \circ t_a = t_{g(a)} \circ g,$$

denn $(g \circ t_a)(x) = g(x+a) = g(x)+g(a) = (t_{g(a)} \circ g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist für $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(n)$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\bigl(t_{a_1} \circ g_1\bigr) \circ \bigl(t_{a_2} \circ g_2\bigr) &= t_{a_1} \circ g_1 \circ t_{a_2} \circ g_2 \\ &= t_{a_1} \circ t_{g(a_2)} \circ g_1 \circ g_2 = t_{a_1+g(a_2)} \circ \bigl(g_1 \circ g_2\bigr),\end{aligned}$$

dabei ist $g_1 \circ g_2$ wieder in $\mathcal{O}(n)$. Das Inverse von $t_a \circ \phi$ ist

$$\bigl(t_a \circ \phi\bigr)^{-1} = t_{a'} \circ \phi^{-1} \quad \text{mit} \quad a' = -\phi^{-1}(a).$$

Wir sehen, daß die Zuordnung $t_a \circ g \mapsto g$ einen Gruppen-Homomorphismus

$$\eta\colon \mathcal{B}(n) \to \mathcal{O}(n)$$

liefert. Eine Bewegung ϕ heißt *orientierungserhaltend* (oder eigentlich), falls $\eta(\phi)$ orientierungserhaltend ist (falls also $\det \eta(\phi) = 1$ gilt), und *orientierungsumkehrend* (oder uneigentlich) sonst.

Der Kern der kanonischen Abbildung $\eta\colon \mathcal{B}(n) \to \mathcal{O}(n)$ ist gerade die Menge $\mathcal{T}(n)$ der Translationen. Die Gruppe $\mathcal{T}(n)$ der Translationen ist zur additiven Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ isomorph (und zwar vermöge der Zuordnung $a \mapsto t_a$, für $a \in \mathbb{R}^n$), insbesondere ist sie kommutativ.

Sei $n = 3$. *Jede orientierungserhaltende Isometrie mit einem Fixpunkt ist eine Drehung* (um eine Achse, dies ist eine beliebige Gerade im $\mathbb{R}^3$, mit einem Winkel α, dies ist eine beliebige Zahl zwischen 0 und 2π). Beweis: Wir können annehmen, daß der Fixpunkt der Ursprung ist. Also haben wir es mit einer orthogonalen Abbildung zu tun. Da sie orientierungserhaltend ist, hat sie einen Eigenwert 1, also eine "Achse" und ist eine entsprechende Drehung. Dies ist durchaus überraschend: *Die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen einer Kugel mit beliebigen Drehachsen ist wieder eine Drehung!* oder auch die Formulierung bei Fischer ("Satz vom Fußball"): *Bei jedem Fußballspiel gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balls, die zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf dem Anstoßpunkt liegt) an der gleichen Stelle des $\mathbb{R}^3$ liegen.*

(5.7) Ebene Bewegungen.

Sei jetzt also $n = 2$. Wir wollen die möglichen Bewegungen klassifizieren. Zu betrachten sind die **Translationen,** also die Abbildungen t_a mit $a \in \mathbb{R}^2$; ist $a \neq 0$, so besitzt t_a keinen Fixpunkt. Dann die **Drehungen** um einen Punkt a mit Winkel α; eine derartige Abbldung ist von der Form $t_a \circ g \circ t_{-a}$, dabei ist g eine Drehung in $\mathcal{O}(2)$ um den Winkel α. Die Translationen und die Drehungen sind die orientierungserhaltenden Bewegungen. Nun betrachten wir orientierungsumkehrende Bewegungen. Zu jeder Geraden gibt es die **Spiegelung** an dieser Gerade; diese

Gerade ist eine Fixpunktgerade (jeder Punkt der Gerade ist ein Fixpunkt) dieser Abbildung. Schließlich gibt es auch **Gleitspiegelungen:** hier ist eine Gerade ℓ und ein Richtungsvektor $b \neq 0$ zu dieser Geraden gegeben, es ist also $\ell = \{a+rb \mid r \in \mathbb{R}\}$ für ein $a \in \mathbb{R}^2$. Die entsprechende Gleitspiegelung ist die Hintereinanderschaltung der Spiegelung an der Geraden ℓ mit der Translation um den Vektor b.

Satz. *Eine Isometrie der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine Translation, eine Drehung, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.*

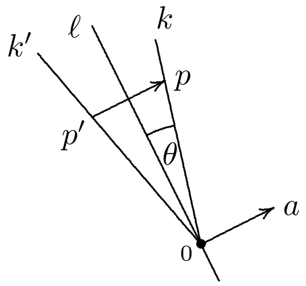
Beweis. Sei ϕ eine Isometrie. Wir zeigen: *Ist ϕ orientierungserhaltend und keine Translation, so hat ϕ einen Fixpunkt.* Beweis: Sei $\phi = t_a \circ g$, dabei sei $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ und g sei Drehung um den Winkel $0 \leq \alpha < 2\pi$. Also ist

$$\phi(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Um einen Fixpunkt zu erhalten, suchen wir also p_1, p_2 mit $\phi(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, also eine Lösung des Gleichungssystems

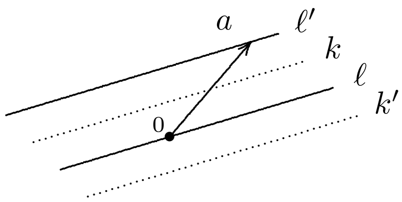
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}.$$

Ist $\alpha \neq 0$, so ist die Koeffizientenmatrix regulär, also gibt es genau eine Lösung. Man kann diesen Fixpunkt folgendermaßen geometrisch konstruieren:



Die Gerade ℓ sei orthogonal zum Vektor a. Der Winkel zwischen den Geraden k und ℓ, wie auch zwischen ℓ und k' sei jeweils $\theta = \frac{1}{2}\alpha$. Verschiebe den Vektor a so, daß der Anfangspunkt p' auf k', der Endpunkt p auf k zu liegen kommt. Die Drehung um den Winkel α bildet p auf p' ab, die Verschiebung t_a bildet p' auf p ab, also ist p ein Fixpunkt von $t_a \circ g$.

Ist ϕ orientierungsumkehrend, so hat ϕ eine Fixgerade.



Beweis: Sei $\phi = t_a \circ g$ mit einer Spiegelung $g \in \mathcal{O}(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$. Sei L die Spiegelachse; sei ℓ' die Gerade durch a, parallel zu ℓ. Wir brauchen zwei weitere zu ℓ parallele Geraden k, k', nämlich diejenigen Geraden, für die die Abstände zwischen

k' und ℓ, zwischen ℓ und k und zwischen k und ℓ' gleich groß sind. Dann ist k die gesuchte Fixgerade: denn unter der Spiegelung an der Geraden ℓ wird k auf k' abgebildet, unter der Translation t_a wird k' auf k abgebildet. — Wir können auch folgendermaßen argumentieren: Sei $\ell = \{rb \mid r \in \mathbb{R}\}$ mit $0 \neq b \in \mathbb{R}^2$. Zerlege $a = a'+rb$ mit a' orthogonal zu b und $r \in \mathbb{R}$. Es ist $t_a = t_{rb} \circ t_{a'}$. Man rechnet leicht nach, daß $t_{a'} \circ g$ die Spiegelung an der Geraden $k = \{\frac{1}{2}a' + rb \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist. Demnach ist $t_a \circ g = t_{rb} \circ (t_{a'} \circ g)$ die Hintereinanderschaltung dieser Spiegelung mit der Translation t_{rb}, und der Verschiebungsvektor rb ist ein Vielfaches des Richtungsvektors b von ℓ, also ist dies eine Gleitspiegelung.

Wir betrachten jetzt explizit die Zuordnung $\eta\colon \mathcal{B}(2) \to \mathcal{O}(2)$. Die orientierungserhaltenden Elemente von $\mathcal{O}(2)$ sind die Drehungen

$$D(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

die Abbildung $D(\alpha)$ ist gerade die Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel α. Daneben gibt es in $\mathcal{O}(n)$ noch die Spiegelungen

$$S(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix},$$

dies ist gerade die Spiegelung, deren Spiegelachse die folgende Ursprungsgerade ist:

$$\{r \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ 1-\cos(\alpha) \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Sei nun ϕ eine Isometrie der Ebene. Wir haben gesehen: *Ist $\eta(\phi) = D(\alpha)$, so ist ϕ eine Drehung um den Winkel α* (das Zentrum kann ein beliebiger Punkt der Ebene sein). *Ist $\eta(\phi) = S(\alpha)$ und ist ℓ die Spiegelachse von $S(\alpha)$, so ist ϕ eine Spiegelung oder Gleitspiegelung, deren Achse parallel zu ℓ ist* (hier kann die Achse eine beliebige Gerade parallel zu ℓ sein, entsprechend kann der Verschiebungsvektor ein beliebiger Richtungsvektor der Geraden ℓ sein).

Vergleicht man die Ordnung eines Elements $\phi \in \mathcal{B}(2)$ und seines Bilds $\eta(\phi)$ in $\mathcal{O}(2)$, so ergibt sich folgendes: Ist ϕ eine Translation, so ist $\eta(\phi) = 1$, dagegen hat eine Translation t_a mit $a \neq 0$ immer unendliche Ordnung. Ist $\phi = t_a \circ g \circ t_{-a}$ eine Drehung um den Punkt a, so ist $\eta(\phi) = g$; insbesondere gilt: Die Ordnung von ϕ in der Gruppe $\mathcal{B}(2)$ ist gleich der Ordnung von $\eta(\phi)$ in $\mathcal{O}(2)$. Ist ϕ eine Spiegelung, so ist die Ordnung von ϕ wie von $\eta(\phi)$ gleich 2. Ist ϕ eine Gleitspiegelung, so hat ϕ unendliche Ordnung, während $\eta(\phi)$ eine Spiegelung ist, also Ordnung 2 hat.

(5.8) Diskrete ebene Bewegungsgruppen.

Erinnerung: Die volle Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks haben wir mit $\mathcal{D}_n$ bezeichnet, seine Drehgruppe soll mit $\mathcal{C}_n$ bezeichnet werden, dies ist die zyklische Gruppe der Ordnung n. Man nennt die Gruppen $\mathcal{D}_n$ die *Diedergruppen.* Es ist $\mathcal{C}_n$ eine Untergruppe von $\mathcal{D}_n$. Die Gruppe $\mathcal{C}_n$ enthält die n Drehungen mit den Drehwinkeln $\frac{s2\pi}{n}$ mit $0 \leq s < n$. Bei den Elementen in $\mathcal{D}_n \setminus \mathcal{C}_n$ handelt es sich gerade um n Spiegelungen. Als Untergruppe von $\mathcal{O}(2)$ besteht $\mathcal{C}_n$ aus den Matrizen

$$D(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{s2\pi}{n} \quad \text{und} \quad 0 \leq s < n.$$

Die Untergruppe $\mathcal{D}_n$ enthält zusätzlich die Matrizen

$$S(\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{s2\pi}{n} \quad \text{und} \quad 0 \leq s < n.$$

Die zyklischen Gruppen $\mathcal{C}_n$ sind kommutativ, die Diedergruppen $\mathcal{D}_n$ sind für $n \geq 3$ nicht-kommutativ. Die Gruppen $\mathcal{C}_2$ und $\mathcal{D}_1$ sind isomorph, als Untergruppen von $\mathcal{O}(2)$ sind sie aber unterscheidbar: das Element $g \neq 1$ in $\mathcal{C}_2$ ist eine Drehung, also $\det g = 1$; das Element $h \neq 1$ in $\mathcal{D}_1$ ist eine Spiegelung, also $\det h = -1$.

Beachte: Sei $\alpha = \frac{s2\pi}{n}$ mit $0 \leq s < n$. Die Drehung $D(\alpha)$ hat genau dann die Ordnung n, wenn k, n teilerfremd sind und dann läßt sich die Drehung $D(\frac{2\pi}{n})$ als Potenz von $D(\alpha)$ schreiben: Die Bézout'sche Gleichung $s's + n'n = 1$ mit $s', n' \in \mathbb{Z}$ liefert nämlich $D(\frac{s2\pi}{n})^{s'} = D(\frac{2\pi}{n})$. Insbesondere gilt: Enthält eine Untergruppe G von $\mathcal{O}(2)$ eine Drehung der Ordnung n, so enthält G die Drehung $D(\frac{2\pi}{n})$.

Eine Untergruppe G von $\mathcal{B}(2)$ heißt *diskret,* wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß folgendes gilt: Sei $t_a \circ g$ in G, dabei sei g eine Drehung mit Drehwinkel $0 \leq \alpha < 2\pi$ und $a \in \mathbb{R}^2$. Dann ist erstens $a = 0$ oder $||a|| \geq \epsilon$ und zweitens $\alpha = 0$ oder $\epsilon \leq \alpha \leq 2\pi - \epsilon$ (es gibt also keine Translationen mit beliebig kleinem Translationsvektor, und keine Drehungen mit beliebig kleinem Drehwinkel).

Ist G eine Untergruppe von $\mathcal{B}(2)$, so sei $\overline{G}$ das Bild von G unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{B}(2) \to \mathcal{O}(2)$. Man nennt $\overline{G}$ die *Punktgruppe* zu G.

Satz. *Sei G eine diskrete Untergruppe von $\mathcal{B}(2)$. Dann gilt* (A), (B) *oder* (C):

(A) **(Rosettengruppen)** *Es gibt außer der Identität keine Translation in G. Dann ist $G = \overline{G}$ eine endliche Gruppe und zwar zyklisch oder eine Diedergruppe.*

(B) **(Friesgruppen)** *Es gibt einen von Null verschiedenen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so daß die Translationen in G gerade die Translationen der Form t_{za} mit $z \in \mathbb{Z}$ sind. Dann ist $\overline{G}$ eine der Gruppen $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n$ mit $n = 1$ oder 2.*

(C) **(Ebene Kristallgruppen)** *Es gibt zwei linear unabhängige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$, so daß die Translationen in G gerade die Translationen der Form t_c mit $c = za + z'b$ und $z, z' \in \mathbb{Z}$ sind. Dann ist $\overline{G}$ eine der Gruppen $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n$ mit $n = 1, 2, 3, 4, 6$*

Beweis. Setze

$$L = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid t_a \in G\}.$$

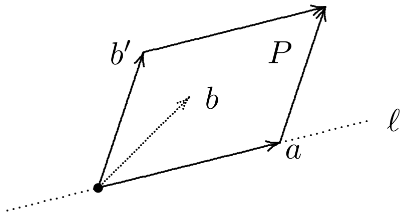
Dies ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$, denn $t_a + t_b = t_{a+b}$ und $t_{-a} = (t_a)^{-1}$.

Setzen wir voraus, daß G Translationen t_a mit $a \neq 0$ enthält, so gilt: *Es gibt in L einen kürzesten von Null verschiedenen Vektor a* (also: $0 \neq a \in L$, und ist $0 \neq b \in L$, so ist $||a|| \leq ||b||$; ein derartiger Vektor a ist aber keineswegs eindeutig bestimmt). Beweis: Sei $b \neq 0$ ein beliebiger von Null verschiedener Vektor. Betrachte die Menge L' aller Vektoren $c \in L$ mit $||c|| \leq ||b||$. Dies ist eine beschränkte Menge in der Ebene. Wäre L' unendlich, so gäbe es in L' einen Häufungspunkt (nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß), insbesondere gäbe es also in L' Punkte $c \neq c'$ mit $d(c, c') < \epsilon$. Aber $d(c, c') = ||c - c'||$ und mit $c, c' \in L$ liegt auch $c - c' \in L$ (und ist von Null verschieden). Widerspruch zur Voraussetzung, daß G eine diskrete Gruppe ist.

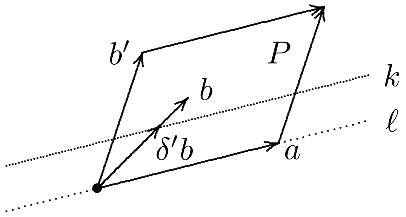
Sei a ein kürzester von Null verschiedener Vektor in L.

Fall 1. Jeder Vektor in L ist von a linear abhängig. Sei $b \in L$, etwa $b = \gamma a$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Schreibe $\gamma = z + \gamma'$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \gamma' < 1$. Dann ist auch $\gamma' a = b - za \in L$ und es ist $||\gamma' a|| < ||a||$. Wegen der Minimalität der Länge von a folgt $\gamma' a = 0$, also $b = za$. Wir sehen also: Jeder Vektor in L ist ein ganzzahliges Vielfaches von a, wir sind also im Fall (B).

Fall 2. Es gibt einen Vektor b' in L, so daß a, b' linear unabhängig sind. Betrachte das von a und b' aufgespannte Parallelogramm P. In diesem Parallelogramm gibt es nur endlich viele Vektoren, die zu L gehören (wieder wegen Bolzano-Weierstraß und der Diskretheit von G), wähle also in P einen Vektor b, der nicht auf der Ursprungsgeraden ℓ durch a liegt, aber zu dieser Geraden den kürzesten Abstand hat.



Sei nun c ein beliebiger Vektor in L. Da a, b eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, können wir $c = \gamma a + \delta b$ schreiben, mit $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Sei $\delta = z + \delta'$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \delta' < 1$. Mit b, c liegt auch $c - zb = \gamma a + \delta' b$ in L. Dieser Punkt hat einen kürzeren Abstand von ℓ als b, das gleiche gilt für alle Punkte der Form $p(z') = c - zb + z'a$ mit $z' \in \mathbb{Z}$, sie liegen auf der Geraden k, die parallel zu ℓ verläuft und durch den Punkt $\delta' b$ geht.



Diese Punkte $p(z')$ mit $z' \in \mathbb{Z}$ liegen im Abstand $||a||$ auf der Geraden k, insbesondere muß also einer dieser Punkte im Parallelogramm P liegen. Da dieser Punkt einen kürzeren Abstand von ℓ hat und zu L gehört, sehen wir, daß $\delta' = 0$ gelten muß. Es ist also $c - zb = \gamma a$ ein reelles Vielfaches von a. Wir wissen aber schon, daß reelle Vielfache von a, die zu L gehören, ganzzahlige Vielfache von a sein müssen. Dies zeigt, daß c eine ganzzahlige Linearkombination von a und b ist. Wir sind also im Fall (C). Insgesamt haben wir gezeigt, daß nur die drei Fälle (A),(B),(C) auftreten können.

Fall (A): Die einzige Translation in G ist die Identität. Dann besteht G nur aus Drehungen und Spiegelungen und offensichtlich gibt es einen gemeinsamen Fixpunkt. Insgesamt sehen wir, daß wir G als Untergruppe von $\mathcal{O}(2)$ auffassen können (wenn wir den gemeinsamen Fixpunkt als Urspung wählen). Wir betrachten die Drehungen in G. Zu jeder Drehung der Ordnung n enthält G die Drehung $D(\frac{2\pi}{n})$. Da wir voraussetzen, daß G diskrete Bewegungsgruppe ist, gibt es also eine Schranke für die Ordnung der Drehungen. Sei nun g eine Drehung der Ordnung n und sei n maximal. Ist dann g' eine Drehung der Ordnung m, so muß m ein Teiler von n sein, denn sonst erhalten wir eine Drehung, deren Ordnung das kleinste gemeinsame Vielfache von n, m ist. Wir sehen also: Die Drehungen in G sind genau alle Drehungen der Form $D(\frac{s2\pi}{n})$ mit $0 \leq s < n$. Besitzt G keine Spiegelung, so ist $G = \mathcal{C}_n$.

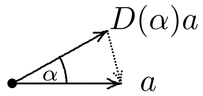
Besitzt G eine Spiegelung S, so auch die Spiegelungen $D(\frac{s2\pi}{n})S$ mit $0 \leq s < n$. Wir kennen alle Drehungen in G. Sei nun S' eine beliebige Spiegelung in G. Dann ist $S'S$ eine Drehung, also $S'S = D(\alpha)$, mit $\alpha = \frac{s2\pi}{n}$ und $0 \leq s < n$. Dann ist aber $S' = S'SS = D(\alpha)S$ (wir verwenden hier, daß $S^2 = 1$ gilt, da S Spiegelung ist). Wir sehen also, $G = \mathcal{D}_n$.

Bevor wir die Fälle (B) und (C) genauer analysieren, brauchen wir folgende Vorüberlegung: Die Gruppe $\overline{G}$ operiert auf L. Das heißt: *Ist $g \in \overline{G}$, etwa $g = \overline{\phi}$ mit $\phi = t_u \circ g$ für ein $u \in \mathbb{R}^2$, und ist $x \in L$, so ist auch $g(x) \in L$.* (Im Fall (A) ist dies selbverständlich, deshalb wird dies erst jetzt bewiesen.) Beweis. Es ist $\phi^{-1} = g^{-1} \circ (t_u)^{-1}$ und $(t_u)^{-1} = t_{-u}$. Beachte: $g \circ t_x = t_{g(x)} \circ g$. In G liegt das Element

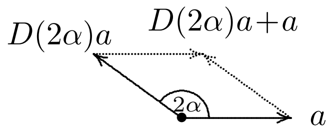
$$\begin{aligned}\phi \circ t_x \circ \phi^{-1} &= t_u \circ g \circ t_x \circ g^{-1} \circ t_{-u} \\ &= t_u \circ t_{g(x)} \circ g \circ g^{-1} \circ t_{-u} \\ &= t_u \circ t_{g(x)} \circ t_{-u} = t_{g(x)}.\end{aligned}$$

Fall (B). Sei g eine Drehung in $\overline{G}$ der Ordnung n. Es ist $g(a) \in L$, also kann $g(a)$ nur a oder $-a$ sein, g ist also eine Drehung der Ordnung 1 oder 2. Demnach ist $\overline{G}$ entweder eine zyklische Gruppe $\mathcal{C}_1$ oder $\mathcal{C}_2$ oder eine Diedergruppe $\mathcal{D}_1$ oder $\mathcal{D}_2$.

Nun zum Fall (C). Die **kristallographische Bedingung:** *Jede Drehung in $\overline{G}$ hat die Ordnung* $1, 2, 3, 4$ *oder* 6. In $\overline{G}$ gebe es Drehungen der Ordnung n, also ist $\mathcal{C}_n$ eine Untergruppe von $\overline{G}$. Die Drehung $D(\alpha)$ mit Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ gehört also zu $\overline{G}$. Sei nun a ein kürzester von Null verschiedener Vektor in L. Wie wir wissen, gehört auch $D(\alpha)a$ zu L. Ist $n \geq 7$, so ist aber $D(\alpha)a - a$ ein Vektor in L, dessen Länge kürzer als die von a ist. Unmöglich.

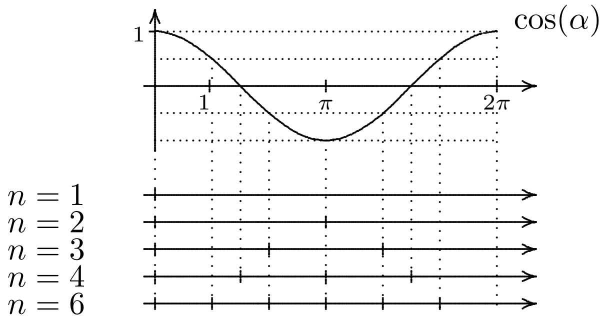


Ist $n = 5$, so betrachten wir $D(2\alpha)$. Auch diese Drehung gehört zu $\overline{G}$ und demnach $D(2\alpha)a$ zu L. Aber $D(2\alpha)a + a$ hat kürzere Länge als a. Ebenfalls unmöglich.



Zweiter Beweis: Sei $g \in \overline{G}$ eine Drehung um den Winkel α, also $g = D(\alpha)$. Wie wir wissen, bildet g das Gitter $L = \{za + z'b \mid z, z' \in \mathbb{Z}\}$ in sich ab. Sei $g(a) = z_{11}a + z_{21}b$, und $g(b) = z_{12}a + z_{22}b$, dann ist also $A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$ die Matrix-Darstellung der Drehung g bezüglich der Basis a, b. Insbesondere sehen wir, daß die Matrizen $D(\alpha)$ und A ähnlich sind. Ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur. Die Spur von A ist eine $z_{11} + z_{22}$ ist eine ganze Zahl, die von $D(\alpha)$ ist $2\cos(\alpha)$. Also sehen wir: $2\cos(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt aber $\alpha = \frac{s2\pi}{n}$ mit $0 \leq s < n$

und $n = 1, 2, 3, 4$ oder 6. Hier zur Verdeutlichung der Graph des Cosinus und für $n = 1, 2, 3, 4$ und 6 die Position der Zahlen $\frac{s2\pi}{n}$ mit $0 \leq s < n$ auf der Zahlengerade



Die kristallographische Bedingung entspricht also der Bedingung $2\cos(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Um ebene Bewegungsgruppen G skizzenhaft zu beschreiben, verwenden wir folgende Symbole: Wir markieren in der Ebene alle Zentren nicht-trivialer Drehungen, die zu G gehören, als Kreise $\circ$; so weit notwendig, notieren wir die Ordnung der Drehung: wir ersetzen $\circ$ durch eine der Zahlen $3, 4, 6$; im Fall der Ordnung 2 markieren wir das Zentrum einfach als schwarzen Punkt $\bullet$. Spiegelachsen zeichnen wir durchgezogen ———, Gleitspiegelachsen punktiert ··············. Manchmal wird bei Gleitspiegelungen auch ein Verschiebungsvektor gestrichelt eingefügt:

Im Fall einer ebenen Kristallgruppe geben wir jeweils zwei Vektoren a, b an, so daß die Translationsuntergruppe von G durch t_a, t_b erzeugt wird, etwa . Grundsätzlich müßte man zu jeder Gleitspiegelachse die Länge eines zugehörigen Verschiebungsvektors c notieren. Darauf kann aber bei den ebenen Kristallgruppen verzichtet werden: Sei ϕ eine Gleitspiegelung, deren Achse keine Spiegelachse ist, sei c der Verschiebungsvektor. Da ϕ^2 eine Translation ist, ist $2c$ in L, also $2c = za + z'b$ mit $z, z' \in \mathbb{Z}$. Dabei gibt es immer eine Gleitspiegelung, bei der z, z' teilerfremd sind (mindestens eine der Zahlen z, z' muß ungerade sein, denn sonst wäre $c \in L$; besitzen z, z' einen echten ungeraden Teiler, so schalte man eine geeignete Translation hinter ϕ).

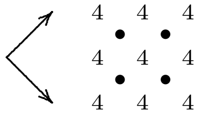
Zu untersuchen sind nun die möglichen Fälle:

- Es gibt keine echten Drehungen (also $\overline{G} = \mathcal{C}_1$ oder $\mathcal{D}_1$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 2 und jede Drehung hat Ordnung 1 oder 2 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_2$ oder $\mathcal{D}_2$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 4 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_4$ oder $\mathcal{D}_4$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 3, aber keine Drehung der Ordnung 6 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_3$ oder $\mathcal{D}_6$).
- Es gibt eine Drehung der Ordnung 6 (also $\overline{G} = \mathcal{C}_6$ oder $\mathcal{D}_6$).

Wir diskutieren hier nur einen einziger Fall; die anderen Fälle sind ähnlich, manche sogar einfacher:

Ebene Kristallgruppen mit einer Drehung der Ordnung 4. Sei G eine ebene Kristallgruppen mit einer Drehung der Ordnung 4. Wir verwenden ein Koordinatensystem, in dem der Ursprung 0 und der kanonische Basisvektor $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Zentren von Viererdrehungen sind. Wir können annehmen, daß der Abstand von je zwei Zentren von Viererdrehungen mindestens 1 ist. Es folgt, daß die Zentren der Viererdrehungen gerade die Menge $\mathbb{Z}^2$ bilden. Sei $d_0 = D(\frac{2\pi}{4})$ und d_1 die entsprechende Drehung mit Zentrum e_1.

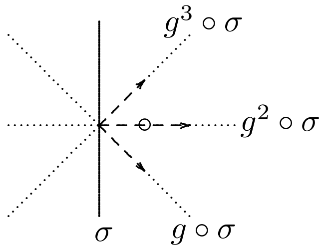
Es ist $d_0 d_1$ Zweierdrehung mit Zentrum $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ (nachrechnen) und demnach ist $t = (d_0 d_1) d_0^2$ als Hintereinanderschaltung zweier Zweierdrehungen eine Translation, und zwar mit dem Verschiebungsvektor $b = e_1 + e_2$, entsprechend ist $t' = d_1^2(d_0 d_1)$ Translation mit Verschiebungsvektor $a = e_1 - e_2$. Beachte: Die Translation t_{e_1} kann nicht zu G gehören, denn es ist dt_{e_1} Viererdrehung mit Zentrum $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, diese Viererdrehung gehört aber nicht zur Gruppe G. Wir sehen also: Die beiden Translationen t, t' erzeugen die Translationsuntergruppe von G (denn Elemente in G müssen die Viererdrehungszentren auf Viererdrehungszentren abbilden). Wir kennen jetzt die Untergruppe G_0 aller eigentlichen Bewegungen in G, insgesamt besteht G_0 aus folgenden Symmetrien:



Nun nehmen wir an, daß G auch uneigentliche Bewegungen enthält. In diesem Fall ist $\overline{G}$ isomorph zur Diedergruppe $\mathcal{D}_4$. Wie wir wissen, operiert $\overline{G}$ auf dem Gitter $L = \{za + z'b \mid z, z' \in \mathbb{Z}\}$. Da die Elemente von $\overline{G} \subset \mathcal{O}(2)$ die Norm von Vektoren erhalten, operiert $\overline{G}$ auf den Vektoren in L mit Norm $\sqrt{2}$, dies sind die vier Vektoren a, $-a$, b, $-b$, die links im Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ gezeichnet sind, rechts sind die vier Spiegelachsen eingetragen:

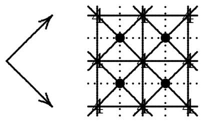
Da die y-Achse eine dieser Spiegelachsen ist, sehen wir: es gibt in G eine Spiegelung oder Gleitspiegelung mit einer vertikalen Achse ℓ. Da durch die entsprechende Spiegelung oder Gleitspiegelung die Menge der $\mathbb{Z}^2$ auf sich abgebildet werden muß, sieht man leicht, daß ℓ eine Gerade der Form $x = m$ oder $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ ist. Verwenden wir die Verschiebungen t_a mit $a \in L$, so sehen wir, daß zumindest eine der beiden Geraden $x = -1$ oder $x = -\frac{1}{2}$ als Achse einer Spiegelung oder Gleitspiegelung in G auftritt.

Bevor wir die möglichen Fälle diskutieren, betrachten wir ganz allgemein eine Spiegelung σ an einer Geraden ℓ und eine Drehung g der Ordnung 4, deren Zentrum nicht auf ℓ liegt. $(*)$ *Dann sind* $g \circ \sigma$, $g^2 \circ \sigma$ *und* $g^3 \circ \sigma$ *Gleitspiegelungen!* Zum Beweis können wir annehmen, daß ℓ die Gerade $x = -\lambda$ mit $\lambda > 0$ ist und daß das Drehzentrum von g der Ursprung ist. Das folgende Bild zeigt die Achsen und die Verschiebungsvektoren:

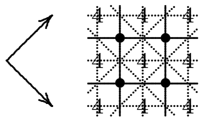


Die Gleitspiegelachse von $g \circ \sigma$ ist die Gerade $y = -x - \lambda$, der Verschiebungsvektor ist $\lambda(e_1 - e_2)$; die Gleitspiegelachse von $g^2 \circ \sigma$ ist die Gerade $y = 0$, der Verschiebungsvektor ist $2\lambda e_1$; die Gleitspiegelachse von $g^3 \circ \sigma$ ist die Gerade $y = x + \lambda$, der Verschiebungsvektor ist $\lambda(e_1 + e_2)$.

Fall 1: Die Spiegelung s an der y-Achse gehöre zu G. Mit Hilfe der Translationen sieht man, daß auch die Gerade $x = -1$ Spiegelachse ist. Wegen $(*)$ folgt, daß auch die Geraden $y = x+1,\ y = 0,\ y = x-1$ Gleitspiegelachsen sind und zwar mit Verschiebungsvektoren $e_1 + e_2,\ 2e_1,\ e_1 - e_2$. Aber diese Vektoren gehören alle zu L, demnach sind die Geraden $y = x+1,\ y = 0,\ y = x-1$ Spiegelachsen. Wenden wir nun $(*)$ auf die Gerade $y = x+1$ an (hier ist $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2}$), so erhalten wir als zusätzliche Gleitspiegelachsen die Geraden $x = -\frac{1}{2}$ mit dem Verschiebungsvektor $-e_2$ und die Gerade $y = \frac{1}{2}$ mit dem Verschiebungsvektor e_1. Insgesamt erhalten wir also folgende Symmetrien:



Fall 2: Die Spiegelung s' an der Gerade $x = -\frac{1}{2}$ gehöre zu G. Wegen $(*)$ wissen wir, daß die Geraden $y = x + \frac{1}{2},\ y = x,\ y = x - \frac{1}{2}$ Gleitspiegelachsen sind, mit Verschiebungsvektoren $\frac{1}{2}(e_1 + e_2), e_1, \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$. Durch Verschiebungen und Drehungen erhalten wir folgende Symmetrien:



Es bleibt zu zeigen, daß es keine weiteren Möglichkeiten gibt. Wie wir wissen, ist zumindest eine der beiden Geraden $x = -1$ und $x = -\frac{1}{2}$ Spiegelachse oder Gleitspiegelachse. Handelt es sich dabei um eine Gleitspiegelachse, so gibt es eine zugehörige Gleitspiegelung mit Verschiebungsvektor e_2. Im Fall 1 ist $x = -1$ Spiegelachse, und $x = -\frac{1}{2}$ Gleitspiegelachse mit Verschiebungsvektor e_2. Im Fall 2 ist $x = -1$ Gleitspiegelachse mit Verschiebungsvektor e_2 und $x = -\frac{1}{2}$ Spiegelachse. Zusammen mit G_0 erzeugt eine derartige Spiegelung oder Drehspiegelung die Gruppe G. Dies zeigt: gibt es in G mindestens eine uneigentliche Bewegung, so liegt einer der beiden Fälle 1 oder 2 vor.

Beachte, daß diese beiden Fälle auf folgende Weise unterschieden werden können: Im Fall 1 gibt es durch jedes Zentrum einer Viererdrehung vier verschiedene Spiegelachsen, im Fall 2 dagegen verläuft keine einzige Spiegelachse durch ein Zentrum einer Viererdrehung.