

Aufgabenzettel 1

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Es gibt keine Primzahl p mit

$$n! + 2 \leq p \leq n! + n$$

(es gibt demnach beliebig große Lücken zwischen den Primzahlen).

2. Im Buch *Schlüssel zur Mathematik* von **Neunzert** und **Rosenberger** liest man auf Seite 111:

Oft ist es aber auch so, dass man durch Herumspielen mit Beispielen eine Vermutung findet, der man aber nicht so recht traut. Dann muss man diese Vermutung beweisen oder durch ein Gegenbeispiel widerlegen. Dazu wieder ein einfaches Beispiel. Man interessiert sich für Primzahlen (Homo ludens!), schreibe sie hin:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, \dots$$

merkt, dass die Lücken zwischen den Zahlen größer werden. Vielleicht hören die Primzahlen irgendwann auf, gibt es eine größte Primzahl? Man kann vermuten, dass es eine größte, letzte Primzahl p_N gibt, oder man kann das Gegenteil vermuten. Es ist leicht zu beweisen, dass es eine solche größte Primzahl nicht geben kann: Sind nämlich $p_1, p_2, \dots, p_N$ alle Primzahlen, dann ist auch $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$ eine Primzahl (überlegen Sie einmal, warum dies so ist), und diese Zahl ist größer als p_N . Problem - Vermutung - Beweisidee (die Konstruktion von $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$) - ein typischer Dreierschritt der mathematischen Arbeit.

Seien $p_1 < p_2 < \dots < p_N$ die ersten N Primzahlen. Geben Sie die ersten 10 Zahlen N an, für die $r_N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$ **keine** Primzahl ist, und notieren Sie die Primfaktorzerlegung dieser Zahlen r_N . (Man verwende zum Beispiel MAPLE: vorzulegen sind bei solchen Aufgabenstellungen die Befehlszeilen und die Ergebnisse.)

3. (a) Zeige: Ist $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, so ist jeder Primteiler p von $n! + 1$ wie auch von $n! - 1$ eine Primzahl p mit $n < p$.

(b) Gesucht sind diesmal 10 Werte von n , sodass $n! - 1$ oder $n! + 1$ eine Primzahl ist (zum Beispiel mit MAPLE).

4. Sei $1 < m \in \mathbb{N}$. Zeige: die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

- (i) m ist Primzahl.
- (ii) Ist $m' \neq 1$ ein Teiler von m , so ist $m' > \sqrt{m}$.

1. Let $n \in \mathbb{N}$. Show: there is no prime number p satisfying

$$n! + 2 \leq p \leq n! + n$$

2. Let $p_1 < p_2 < \dots < p_N$ be the first N prime numbers. Find the first 10 numbers N such that $r_N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$ is **not** a prime and determine the factorization of r_N into primes. (One may use MAPLE: in such a case, you should present both the input as well as the output.)

3. (a) Show: If $n \geq 2$ is a natural number, then every prime factor p of $n! + 1$ as well as of $n! - 1$ is a prime number p with $n < p$.

(b) This time, we are looking for 10 values of n , such that $n! - 1$ or $n! + 1$ is a prime (again one may use MAPLE).

4. Let $1 < m \in \mathbb{N}$. Show that the following assertions are equivalent:

- (i) m is a prime.
- (ii) Is $m' \neq 1$ a divisor of m , then $m' > \sqrt{m}$.

Hier das Kleingedruckte: Pro Woche gibt es (meist am Donnerstag) einen Aufgabenzettel mit vier Aufgaben, die bis zum folgenden Donnerstag, 8:10 gelöst werden sollen. Bitte ins Postfach des jeweiligen Tutors werfen.

Am Ende des Semesters wird eine Klausur geschrieben. **Zulassungsvoraussetzung für die Klausur:** (i) Die wöchentlichen Aufgaben sollen *alle* bearbeitet werden, (ii) *mindestens die Hälfte* sollte richtig gelöst sein; (iii) *regelmäßige Teilnahme und Mitarbeit* in den Übungsstunden.

Die Lösungen sind auf Blättern im DIN A4-Format **in deutlich lesbarer Form** abzugeben (Name und Übungsgruppe nicht vergessen). Die Abgabe der Lösungen kann in Zweiergruppe erfolgen; dabei wird davon ausgegangen, daß **jeder der beiden** bereit ist, die Aufgaben in der Übungsstunde vorzurechnen und zu erläutern.

Rules. Every week a sheet with 4 exercises will be distributed, the solutions have to be handed in by the following Thursday, 8:10 (there is a mail box for any tutor).

At the end of the term, there will be a written examination. **To be admitted to the examination**, the following conditions have to be satisfied: (i) one should have tried to solve **all** the exercises. (ii) *at least half of them should have been solved correctly*. (iii) *regular attendance and active participation in the tutorials*.

The solutions should be written on A4-paper (clearly readable, with full proofs; don't forget to write your name and the name of the tutor). The solutions may be worked out in groups of two students; in that case **anyone of the two** is expected to explain the **any** of these solutions in the tutorials.