

Aufgabenzettel 2.

2.1. Die Primfaktorzerlegung von $n!$. (a) Zeige mit Hilfe der Legendre-Formel: Sind $p < q$ Primzahlen, so ist

$$w_p(n!) \leq w_q(n!) \quad \text{für jede natürliche Zahl } n.$$

Folgerung: Seien $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ die ersten t Primzahlen. Es sei $n! = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$ mit $e_t > 0$. Dann ist $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_t$.

(b) Zeige: $e_t = 1$, falls $n \geq 2$.

(c) Bestimme alle Zahlen $n \geq 3$ mit $e_{t-1} > 1$.

2.2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) $0 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$.

(b) Ist $0 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 1$, so ist $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

(c) Ist dagegen $1 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$, so ist $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(d) Zusatzfrage: Was ist die Bedeutung von $x - \lfloor x \rfloor$?

2.3. Teiler von $\binom{m}{n}$. Wir betrachten den Binomialkoeffizienten $\binom{m}{n}$, mit $0 \leq n \leq \frac{1}{2}m$. Sei p eine Primzahl. Zeige:

(a) Ist $m - n < p \leq m$, so ist p ein Teiler von $\binom{m}{n}$. (Dies verallgemeinert unsere Aussage (1).)

(b) Ist $\frac{1}{3}m < p$ und $p \leq n$, so ist p kein Teiler von $\binom{m}{n}$ (Dies verallgemeinert unsere Aussage (2).)

(c) Immer gilt $\binom{m}{n}_p \leq m$. (Dies verallgemeinert unsere Aussage (3).) Wie lautet die entsprechende Aussage zu (3')?

2.4. Sei p eine Primzahl, sei $t \geq 1$ eine natürliche Zahl. Gesucht ist eine Vermutung für $\binom{p^t}{n}_p$ für $0 \leq n \leq p^t$. Dazu schaue man sich zumindest alle Fälle mit $p^t \leq 50$ und $t \geq 2$ an (MAPLE). (Gesucht ist diesmal nur eine Vermutung, und die entsprechenden MAPLE-Ausdrucke, noch nicht der Beweis.)

Abgabe (ins Postfach des jeweiligen Tutors): Donnerstag, 2.11.2006, 8:10.

Aufgabenzettel 2.

2.1. (a) Use the Legendre formula in order to show: If $p < q$ are prime numbers, then

$$w_p(n!) \leq w_q(n!) \quad \text{for every natural number } n.$$

Consequence: If $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ are the first t primes and $n! = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$ with $e_t > 0$, then $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_t$.

(b) Show: $e_t = 1$, if $n \geq 2$.

(c) Find all numbers $n \geq 3$ with $e_{t-1} > 1$.

2.2. Let $x, y \in \mathbb{R}$. Show:

(a) $0 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$.

(b) If $0 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 1$, then $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

(c) If $1 \leq x - \lfloor x \rfloor + y - \lfloor y \rfloor < 2$, then $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(d) Additional question: What is the meaning of $x - \lfloor x \rfloor$?

2.3. Consider the binomial coefficient $\binom{m}{n}$, with $0 \leq n \leq \frac{1}{2}m$. Let p be a prime. Show:

(a) If $m - n < p \leq m$, then p is a divisor of $\binom{m}{n}$. (This generalizes the assertion (1).)

(b) If $\frac{1}{3}m < p$ und $p \leq n$, then p is not a divisor of $\binom{m}{n}$ (This generalizes the assertion (2).)

(c) Always, we have $\binom{m}{n}_p \leq m$. (This generalizes the assertion (3).) Formulate and proof the assertion corresponding to (3')?)

2.4. Let p be a prime, let $t \geq 1$ be a natural number. We are looking for a conjecture concerning the value of $\binom{p^t}{n}_p$ for $0 \leq n \leq p^t$. Consider at least all the cases with $p^t \leq 50$ and $t \geq 2$ (say using MAPLE). (We ask only for the formulation of a conjecture as well as the corresponding MAPLE outprints, but not yet for a proof).

To be handed in by Thursday, November 2, 2006 (mailbox of the tutor).