

Aufgabenzettel 3.

3.1. Let p be a prime, and t, n natural numbers with $1 \leq n \leq p^t$. If s is maximal such that p^s divides n , then

$$\binom{p^t}{n}_p = p^{t-s}.$$

Hints for the proof: First, we show: Let x, x', y be positive real numbers with $\frac{x+x'}{y} \in \mathbb{N}$. If $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$, then

$$\lfloor \frac{x+x'}{y} \rfloor = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor + \lfloor \frac{x'}{y} \rfloor.$$

If $\frac{x}{y}$ is not a natural number, then

$$\lfloor \frac{x+x'}{y} \rfloor = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor + \lfloor \frac{x'}{y} \rfloor - 1.$$

Show that this implies: $\lfloor \frac{p^t}{p^i} \rfloor = \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor + \lfloor \frac{p^t-n}{p^i} \rfloor$ if and only if p^i divides n . And show that this implies the assertion.

3.2. (Erdős). Use the following considerations in order to show:

$$\pi(n) \geq \frac{1}{2 \ln 2} \ln n.$$

- (a) Show that there are at most $\sqrt{n}$ square numbers m with $m \leq n$ is
- (b) Show that there are at most $2^{\pi(n)}$ squarefree numbers m with $m \leq n$.
- (c) Show that the unique factorization property implies that

$$n \leq \sqrt{n} 2^{\pi(n)},$$

and that this implies the assertion.

(d) Compare this inequality with the inequality $\pi(n) \geq \frac{\ln 2}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$ which has been shown in the lecture.

3.3. Determine the smallest natural number m with the following property: If $n > m$, there are at least 3 prime numbers p such that $n < p < 2n$.

3.4. Fermat numbers. These are the numbers of the form $F_n = 2^{2^n} + 1$ with $n \in \mathbb{N}_0$. (a) Let $G_n = F_n - 2 = 2^{2^n} - 1$. Show that $F_n G_n = G_{n+1}$ for $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Show that this implies $\prod_{t=0}^n F_t = G_{n+1}$.

(c) Use this in order to show that the Fermat numbers have pairwise no proper common divisor.

(d) Show that this implies that there are infinitely many prime numbers.

3.1. Die Aufgabe 2.4 legt folgende Vermutung nahe: Sei p Primzahl, seien t, n natürliche Zahlen mit $1 \leq n \leq p^t$. Ist s maximal, sodass p^s Teiler von n ist, so gilt

$$\binom{p^t}{n}_p = p^{t-s}.$$

Beweis der Vermutung: Zeige zuerst: Seien x, x', y positive reelle Zahlen mit $\frac{x+x'}{y} \in \mathbb{N}$. Ist auch $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$, so ist

$$\lfloor \frac{x+x'}{y} \rfloor = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor + \lfloor \frac{x'}{y} \rfloor.$$

Ist dagegen $\frac{x}{y}$ keine natürliche Zahl, so ist

$$\lfloor \frac{x+x'}{y} \rfloor = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor + \lfloor \frac{x'}{y} \rfloor - 1.$$

Folgere: $\lfloor \frac{p^t}{p^i} \rfloor = \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor + \lfloor \frac{p^t-n}{p^i} \rfloor$ genau dann, wenn p^i ein Teiler von n ist. Folgere daraus die Behauptung.

3.2. (Erdős). Zeige mit Hilfe der folgenden Überlegungen:

$$\pi(n) \geq \frac{1}{2 \ln 2} \ln n.$$

(wieder ein Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt...)

- (a) Zeige: Die Anzahl der Quadratzahlen m mit $m \leq n$ ist höchstens $\sqrt{n}$.
- (b) Die Anzahl der quadratfreien Zahlen m mit $m \leq n$ ist höchstens $2^{\pi(n)}$.
- (c) Folgere aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung, dass demnach gilt:

$$n \leq \sqrt{n} 2^{\pi(n)},$$

und zeige damit die Behauptung.

(d) Vergleiche diese Abschätzung mit der Abschätzung $\pi(n) \geq \frac{\ln 2}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$, die in der Vorlesung gezeigt wurde.

3.3. Bestimme die kleinste natürliche Zahl m mit folgender Eigenschaft: Ist $n > m$, so gibt es mindestens drei Primzahlen p mit $n < p < 2n$.

3.4. Fermat-Zahlen. Die Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ nennt man *Fermat-Zahlen*.

- (a) Setze $G_n = F_n - 2 = 2^{2^n} - 1$. Zeige: $F_n G_n = G_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Folgerung: $\prod_{t=0}^n F_t = G_{n+1}$.
- (c) Folgerung: Die Fermat-Zahlen sind paarweise teilerfremd.
- (d) Folgere daraus: Es gibt unendliche viele Primzahlen.