Aufgabenzettel 4.

4.1. Let Φ be the set of maps $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. In addition to the convolution $*$ we also consider an addition $+$ on Φ, namely pointwise addition defined by $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$ for $n \in \mathbb{N}$ and $f, g \in \Phi$. Show that in this way Φ is a commutative ring without zero-divisors. (Recall that a ring R is said to be without zero-divisors provided $rr' = 0$ with $r, r' \in R$ implies that $r = 0$ or $r' = 0$.)

4.2. Let $x \in \mathbb{R}$. Define $\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$. (a) Show that σ_x is multiplicative and provide a formula for $\sigma_x(n)$ which refers to the prime factorization of n.

(b) For which values x is σ_x strongly mutiplicative?

4.3. The functions μ and τ (One-line-arguments). Show:

(a) The number n has an odd number of divisors if and only if n is a square number.

(b) Calculate $\mu(t!)$ for all natural numbers t.

(c) It is $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(\frac{d}{n}) = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(d) The number of divisors d of n with $\mu(d) \neq 0$ is a power of 2, for any natural number n.

4.4. The Euler ϕ function. Show:

(a) If the number n has t pairwise different odd prime factors, then 2^t divides $\phi(n)$.

(b) One has

$$\phi(n) = \begin{cases} \phi(n) & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2\phi(n) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

(c) If m divides n, then $\phi(m)$ divides $\phi(n)$.

(d) It is easy to check that:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}\phi(3) &= 1+2 \\ \tfrac{4}{2}\phi(4) &= 1+3 \\ \tfrac{5}{2}\phi(5) &= 1+2+3+4 \\ \tfrac{6}{2}\phi(6) &= 1+5 \\ \tfrac{7}{2}\phi(7) &= 1+2+3+4+5+6 \end{aligned}$$

What is the general assertion? Prove it.

Aufgabenzettel 4.

4.1. Sei Φ die Menge der Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Neben der in der Vorlesung definierten Faltung $*$ definieren wir auf Φ auch eine Addition, nämlich punktweise, also $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f, g \in \Phi$. Man zeige, dass Φ ein kommutativer Ring ohne Nullteiler ist. (Erinnerung: ein Ring R heißt nullteilerfrei, wenn aus $rr' = 0$ mit $r, r' \in R$ folgt, dass $r = 0$ oder $r' = 0$ gilt.)

4.2. Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere $\sigma_x(n) = \sum_{d|n} d^x$. (a) Man zeige, dass diese Funktion multiplikativ ist und gebe eine Formel für $\sigma_x(n)$ an, die die Primfaktorzerlegung von p verwendet.

(b) Für welche x ist σ_x stark multiplikativ?

4.3. Die Funktionen μ und τ (Einzeilenbeweise). Man zeige:

(a) Genau dann hat n eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n Quadratzahl ist.

(b) Man berechne $\mu(t!)$ für alle natürlichen Zahlen t.

(c) Es ist $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(\frac{d}{n}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Die Anzahl der Teiler d von n mit $\mu(d) \neq 0$ ist eine Zweierpotenz.

4.4. Die Eulersche ϕ-Funktion. Man zeige:

(a) Die Zahl n habe t paarweise verschiedene ungerade Primfaktoren. Dann ist 2^t ein Teiler von $\phi(n)$.

(b) Es gilt

$$\phi(n) = \begin{cases} \phi(n) & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 2\phi(n) & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

(c) Ist m ein Teiler von n, so ist $\phi(m)$ ein Teiler von $\phi(n)$.

(d) Man rechnet leicht nach, dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{2}\phi(3) &= 1+2 \\
\tfrac{4}{2}\phi(4) &= 1+3 \\
\tfrac{5}{2}\phi(5) &= 1+2+3+4 \\
\tfrac{6}{2}\phi(6) &= 1+5 \\
\tfrac{7}{2}\phi(7) &= 1+2+3+4+5+6
\end{aligned}$$

Wie lautet die allgemeine Aussage? Man beweise sie.