Aufgabenzettel 5.

5.1. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Die Menge $M(n) = \{nz + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Unterhalbgruppe von $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(b) Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4n - 1$. [Hilfe: Angenommen es gibt nur endlich viele derartige Primzahlen, sagen wir $q_1, \ldots, q_t$. Betrachte die Primteiler der Zahl $4q_1 \cdots q_t - 1$. Zusätzlich verwende (a).]

5.2. Die Euler'sche ϕ-Funktion.

(a) Zeige: Ist p eine Primzahl mit $p|n$, so gilt $(p-1)|\phi(n)$.

(b) Bestimme alle Zahlen n mit $\phi(n) = 24$.

(c) Zeige: Seien m, n natürliche Zahlen, so dass jeder Primteiler von m auch ein Primteiler von n ist. Dann ist $\phi(mn) = m\phi(n)$.

(d) Für welche Paare m, n natürlicher Zahlen gilt $\phi(mn) = \phi(n)$?

5.3. Verwende den Chinesischen Restsatz, um alle Zahlen zu bestimmen, die Rest 1 oder 2 haben, wenn sie durch jede der Zahlen 3, 4 oder 5 geteilt werden.

5.4. (a) Bestimme alle Idempotente im Ring $\mathbb{Z}/900$.

(b) Bestimme alle nilpotenten Elemente im Ring $\mathbb{Z}/27000$.

5.1. (a) Let $n \in \mathbb{N}$. Show: The set $M(n) = \{nz + 1 \mid z \in \mathbb{Z}\}$ is a subsemigroup of $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(b) Claim: There are infinitely many prime numbers of the form $4n - 1$. [Help: Assume there are only finitely many, say $q_1, \ldots, q_t$. Consider the prime factors of $4q_1 \cdots q_t - 1$ and use (a).]

5.2. The Euler ϕ-function.

(a) Show: If p is a prime with $p|n$, then $(p-1)|\phi(n)$.

(b) Determine all natural numbers n with $\phi(n) = 24$.

(c) Claim: If m, n are natural numbers such that if prime divisor of m divides n, then $\phi(mn) = m\phi(n)$.

(d) Determine all pairs of natural numbers m, n such that $\phi(mn) = \phi(n)$?

5.3. Determine all natural numbers which have remainder 1 or 2 when divided by any of the numbers 3, 4 and 5, using the Chinese remainder theorem.

5.4. (a) Determine all idempotent elements in the ring $\mathbb{Z}/900$.

(b) Determine all nilpotent elements in the ring $\mathbb{Z}/27000$.