

Aufgabenzettel 6.

6.1. Man bestimme alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}/8, +) \times (\mathbb{Z}/2, +)$
(Hinweis: es gibt nicht nur die 8 offensichtlichen Untergruppen).

6.2. Wieder die Eulersche ϕ -Funktion.

(a) Zeige: Ist $(m, n) \neq 1$, so ist $\phi(mn) > \phi(m)\phi(n)$.

(b) Zeige: Zu jeder Zahl t gibt es nur endliche viele natürliche Zahlen n mit $\phi(n) = t$.

(c) Sei $s(t)$ die Kardinalität der Menge $\{n \mid \phi(n) = t\}$ (in (b) haben wir gesehen, dass dies eine endliche Menge ist). Man bestimme die jeweils kleinste natürliche Zahl t mit

$$s(t) = 0, \quad 2, \quad 3, \quad \text{oder} \quad 4$$

ist. (Man vermutet, dass es kein t mit $|\{n \mid \phi(n) = t\}| = 1$ gibt.)

6.3. Man bestimme eine Primitivwurzel modulo 17, lege eine Indextabelle an und löse die folgenden Gleichungen:

$$x^{20} = 13 \pmod{17}$$

$$x^{12} = 13 \pmod{17}$$

$$x^{48} = 9 \pmod{17}$$

$$x^{11} = 9 \pmod{17}$$

6.4. Sei z eine ganze Zahl.

(a) Für jede abelsche Gruppe $(G, \cdot)$ definiere eine Abbildung $\sigma_z: G \rightarrow G$ durch $\sigma_z(g) = g^z$. Sei $G_z = \{g \in G \mid \sigma_z(g) = 1\}$.

Zeige: σ_z ist ein Gruppen-Homomorphismus, G_z ist Untergruppe von G . Und zeige auch: Sind G, H abelsche Gruppen, so ist $(G \times H)_z = G_z \times H_z$.

(b) Definiere eine zahlentheoretische Funktion k_z folgendermaßen: $k_z(n)$ ist die Anzahl der natürlichen Zahlen a mit $1 \leq a \leq n$, die zu n teilerfremd sind, und für die gilt $a^z \equiv 1 \pmod{n}$. Zeige, dass k_z multiplikativ ist und dass für jede ungerade Primzahl und $d \in \mathbb{N}$ gilt: $k_z(p^d) = (d, \phi(p^d))$. Wie sieht $k_z(2^d)$ aus?

6.1. Determine all subgroups of $(\mathbb{Z}/8, +) \times (\mathbb{Z}/2, +)$
(Note that there are more than the 8 obvious ones).

6.2. Again the Euler ϕ -function.

(a) Show: If $(m, n) \neq 1$, then $\phi(mn) > \phi(m)\phi(n)$.

(b) Show: Given a number t , there are only finitely many natural numbers n with $\phi(n) = t$.

(c) Let $s(t)$ be the cardinality of the set $\{n \mid \phi(n) = t\}$ (according to (b), this is a finite set). In the following cases, determine the smallest natural number t such that

$$s(t) = 0, \quad 2, \quad 3, \quad \text{oder} \quad 4.$$

(One conjectures that there is no t with $s(t) = 1$.)

6.3. Determine a primitive root modulo 17, calculate the index table and solve the following equations:

$$x^{20} = 13 \pmod{17}$$

$$x^{12} = 13 \pmod{17}$$

$$x^{48} = 9 \pmod{17}$$

$$x^{11} = 9 \pmod{17}$$

6.4. Let z be an integer.

(a) For every abelian group $(G, \cdot)$ we define a map $\sigma_z: G \rightarrow G$ by $\sigma_z(g) = g^z$.
Let $G_z = \{g \in G \mid \sigma_z(g) = 1\}$

Show: σ_z is a group homomorphism, G_z is a subgroup of G . Also show: If G, H are abelian groups, then $(G \times H)_z = G_z \times H_z$.

(b) We define a number theoretical function k_z as follows: $k_z(n)$ counts the numbers a with $1 \leq a \leq n$, such that $(a, n) = 1$ and such that in addition $a^z \equiv 1 \pmod{n}$. Show that k_z is multiplicative and that $k_z(p^d) = (d, \phi(p^d))$ for every odd prime p and every natural number d . What is $k_z(2^d)$?