Aufgabenzettel 11: Summen von Quadraten.

11.1. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige: die Menge

$$\{n \in R \mid \text{ es gibt } x_i \in R \text{ mit } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = n\}$$

ist abgeschlossen unter Multiplikation.

11.2. Behauptung: Keine der Zahlen der Form $8 \cdot 4^n$ lässt sich als Summe von vier positiven Quadratzahlen schreiben.

Anleitung: Induktion nach n. Beim Induktionsschritt zeige man: Ist $8 \cdot 4^n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ mit ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_4$, so sind alle diese Zahlen x_i gerade Zahlen (man rechne dazu modulo 8).

11.3. Man zeige, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 170$ als Summe von fünf positiven Quadratzahlen schreiben lässt. (Hilfe: Wende den Satz von Lagrange auf $n - 169$ an. Beachte, dass sich 169 auf ganz verschiedene Weisen als Summe von Quadraten schreiben lässt).

11.4. (a) Man zeige (zum Beispiel mit Maple), dass die einzigen Zahlen $n \leq 169$, die sich nicht als Summe von fünf positiven Quadratzahlen schreiben lassen, die Zahlen $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33$ sind.

(b) Folgern Sie aus (a), dass es nur ganz wenige natürliche Zahlen m gibt, die sich nicht als Summe von sechs positiven Quadratzahlen schreiben lassen. Welche sind dies?

11.1. Let R be a commutative ring. Show that the set

$$\{n \in R \mid \text{ there are } x_i \in R \text{ with } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = n\}$$

is closed under multiplication.

11.2. Show that none of the numbers of the form $8 \cdot 4^n$ can be written as a sum of 4 positive squares.

Hint: Use induction on n. Show that for $8 \cdot 4^n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ with integers $x_1, \ldots, x_4$, all the numbers x_i are even (calculate modulo 8).

11.3. Show that every natural number $n \geq 170$ can be written as a sum of 5 positive squares. (Hint: Apply the theorem of Langrange to $n - 169$. Note that 169 can be written in many different ways as a sum of squares.)

11.4. (a) Show (for example, using Maple), that the only natural numbers $n \leq 169$, which cannot be written as a sum of 5 positive squares, are the numbers $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33$.

(b) Derive from (a), that there are only few natural numbers m which cannot be written as a sum of 6 positive squares. Which ones?