Aufgabenzettel 12

12.1. Zeige: Eine ganze Zahl z lässt sich genau dann als Differenz der Quadrate zweier ganzer Zahlen schreiben, wenn $z \not\equiv 2 \mod 4$. (Show that an integer z can be written as the difference of the squares of two integers if and only if $z \not\equiv 2 \mod 4$.)

Hilfe: Ist $z = a^2 - b^2$, so unterscheide man, ob a oder b gerade oder ungerade ist. Beginnt man umgekehrt mit $z \not\equiv 2 \mod 4$, so ist z entweder durch 4 teilbar oder aber ungerade .... (Hint: If $z = a^2 - b^2$, then distinguish whether a or b are even or odd. Conversely, starting with $z \not\equiv 2 \mod 4$, then either z is divisible by 4 or odd ....)

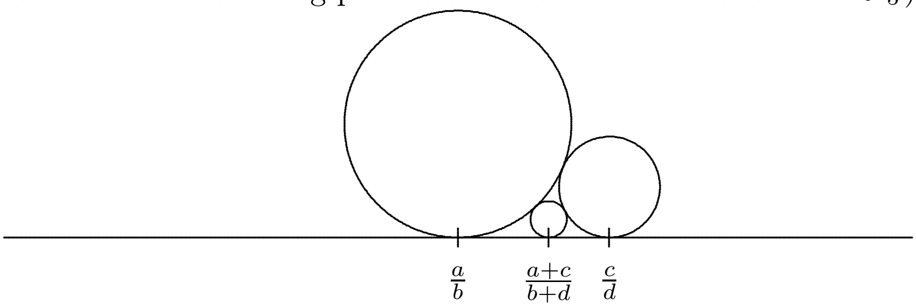
Zusatz: Zeige: Eine ganze Zahl z lässt sich genau dann als Differenz der Quadrate zweier natürlicher Zahlen schreiben, wenn erstens $z \not\equiv 2 \mod 4$ und zweitens $z \notin \{1, 4\}$. (Show that an integer can be written as the difference of the squares of two natural numbers if and only if both $z \not\equiv 2 \mod 4$ and $z \notin \{1, 4\}$.)

12.2. Man zeige: Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^4$ besitzt unendlich viele Lösungen $[x, y, z] \in \mathbb{N}^3$. (Show that the equation $x^2 + y^2 = z^4$ has infinitely many solutions $[x, y, z] \in \mathbb{N}^3$.)

12.3. Ford'sche Kreise (Ford circles). Ist $\frac{p}{q}$ ein gekürzter Bruch, so sei $K(\frac{p}{q})$ der Kreis in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $[\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}]$ und Radius $\frac{1}{2q^2}$. (If $\frac{p}{q}$ is a reduced fraction, consider the circle $K(\frac{p}{q})$ in the plane $\mathbb{R}^2$ with center $[\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}]$ and radius $\frac{1}{2q^2}$.)

Zeige: Sind $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ gekürzte Brüche, so haben die Kreise $K(\frac{a}{b})$ und $K(\frac{c}{d})$ nie innere Punkte gemeinsam. Sie berühren sich genau dann, wenn $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn sind. (Show: if $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ are reduced fractions, then $K(\frac{a}{b})$ and $K(\frac{c}{d})$ never have inner points in common. They touch each other if and only if $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ are Farey neighbors.)

Interpretiere die folgende Skizze und zeichne die Ford'schen Kreise für $\mathcal{F}_5$. (Give an interpreation of the following picture and draw the Ford circles for $\mathcal{F}_5$).



12.4. Wir betrachten die Farey-Folge (consider the Farey sequence):

$$\mathcal{F}_n = \{ \tfrac{p_0}{q_0} < \tfrac{p_1}{q_1} < \cdots < \tfrac{p_t}{q_t} \}.$$

(a) Zeige: (show that) $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{q_{i-1}q_i} = 1$, und interpretiere dies geometrisch (give also a geometrical interpretation.)

(b) Zeige: (show that) $\min_i\{\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}\} = \frac{1}{n(n-1)}$, $\max_i\{\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}\} = \frac{1}{n}$.