

Nebenrechnungen bitte auf den Zusatzblättern (oder auf der Rückseite); die Nebenrechnungen werden **nicht** bewertet.

Für jede richtige Lösung gibt es einen Punkt. Zum Bestehen der Klausur ist die Hälfte der möglichen Punkte erforderlich.

1. Man gebe eine Bezout'sche Gleichung für den größten gemeinsamen Teiler von 17 und 100 an.

2. Man gebe $(1000!)_5$ an.

3. Die Zahl $n = 2^{10 \cdot 19} - 1$ ist keine Primzahl. Wie findet man einen Faktor m mit $1 < m < n$?

4. Welche der folgenden Primzahlen p sind Teiler von $\binom{62}{31}$?

Man schreibe J für JA und N für NEIN.

p	11	29	31	59	61	79
J/N						

5. Gesucht ist x mit

$$x \equiv 1 \pmod{7}, \quad x \equiv 4 \pmod{8}, \quad x \equiv 6 \pmod{9}.$$

Hinweis:

$$1 = 31 \cdot 7 + (-3) \cdot 8 \cdot 9, \quad 1 = 8 \cdot 8 + (-1) \cdot 9 \cdot 7, \quad 1 = 25 \cdot 9 + (-4) \cdot 7 \cdot 8.$$

6. Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$n \leq 2^{\pi(n)} \sqrt{n}.$$

Beweis.

7. Man gebe die Werte einiger zahlentheoretischer Funktionen an:

n	13	14	15	16
$\phi(n)$				
$\sigma(n)$				
$\tau(n)$				

8. Man berechne $\mu(\frac{n!}{3!})$ für alle $n \geq 3$.

9. Sei p eine Primzahl. Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ folgendermaßen definiert: Es sei $f(n) = 1$ falls p kein Teiler von n ist, und $f(n) = 0$ sonst. Ist diese Funktion multiplikativ?

Antwort, mit Begründung.

10. Man gebe die Ordnung der Restklassen $\bar{a}$ in $(\mathbb{Z}/7)^*$ an für $1 \leq a \leq 6$.

$\bar{a}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
Ordnung						

11. Man gebe alle Elemente der Ordnung 2 in $(\mathbb{Z}/11 \times \mathbb{Z}/13)^*$ an.

12. Gibt es eine natürliche Zahl x mit $x^2 \equiv 15 \pmod{103}$?

Antwort, mit Begründung.

13. Sei $p > 2$ eine Primzahl. Man beweise: Die kleinste natürliche Zahl q mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ist eine Primzahl.

14. Sei $\alpha = \frac{1}{8}\sqrt{11}$. Gesucht sind Farey-Nachbarn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (gekürzt) mit $b, d > 4$ und $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$. Hinweis: $\alpha \approx 0,415$.

15. Sei $\mathcal{F}_n = \{ \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \dots < \frac{p_t}{q_t} \}$ eine Farey-Folge. Zeige: $\sum_{i=1}^t \frac{1}{q_{i-1}q_i} = 1$.

Beweis.

16. Man schreibe 221 auf zwei wesentlich verschiedene Weisen als Summe von zwei Quadratzahlen (Hinweis: $221 = 13 \cdot 17$).

17. Gesucht ist eine natürliche Zahl n , die sich als Summe der Quadratzahlen von a natürlichen Zahlen schreiben lässt mit $a = 1, 2, 3, 4$. Man gebe auch diese Summendarstellungen an.

18. Sei p Primzahl mit $p \equiv 3 \pmod{4}$. Folgere aus dem Satz von Wilson, dass gilt:

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$