1.5. Das Wachstum der Primzahlen.

Wir bezeichnen mit p_k die k-te Primzahl, also $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5$, usw.

Satz. *Es gibt positive reelle Zahlen $A < 1 < B$, mit*

$$\boxed{A \cdot n \cdot \ln n \ \le\ p_n \ \le\ B \cdot n \cdot \ln n,}$$

zum Beispiel $A = \frac{1}{6 \cdot \ln 2}$, und $B = \frac{8}{\ln 2}$.

Remark: Die zweite Ungleichung liefert einen weiteren Beweis für den Satz von Euklid.

Beweis des Satzes: Wir wissen, dass es $b > 1$ gibt mit $\pi(x) \le b \cdot \frac{x}{\ln x}$. Nun ist $\pi(p_n) = n$, also gilt:

$$n = \pi(p_n) \le b\frac{p_n}{\ln p_n} = b\frac{p_n}{\ln p_n},$$

also

$$p_n \ge \frac{1}{b} \cdot n \cdot \ln p_n \ge \frac{1}{b} \cdot n \cdot \ln n$$

(denn $p_n \ge n$). Nimm also $A = \frac{1}{b}$.

Nun zur oberen Abschätzung. Verwende die Formel $a\frac{x}{\ln x} \le \pi(x)$ für $x = p_n$, also $\pi(p_n) = n$:

$$a \cdot \frac{p_n}{\ln p_n} \le \pi(p_n) = n,$$

also

$$p_n \le \frac{1}{a} \cdot n \cdot \ln p_n \le \frac{1}{a} \cdot n \cdot \ln(n^2) = \frac{2}{a} \cdot n \cdot \ln n$$

(dabei verwenden wir $p_n \le n^2$). Nimm also $B = \frac{2}{a}$.

Folgerung. *Die Reihe $\sum_p \frac{\ln p}{p}$ ist divergent.*

Beweis: Wegen $p_n \ge n$ und $p_n \le B \cdot n \cdot \ln n$ gilt

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{n=1}^{m} \frac{\ln p_n}{p_n} \ &\ge\ \sum_{n=1}^{m} \frac{\ln n}{B \cdot n \cdot \ln n} \\ &= \frac{1}{B} \sum\nolimits_{n=1}^{m} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_p \frac{\ln p}{p}$ majorisiert also das $\frac{1}{B}$-Fache der harmonischen Reihe $\sum_n \frac{1}{n}$. Nun ist aber die harmonische Reihe divergent, daraus folgt die Behauptung.

Hinweis. Es gilt sogar: Die Reihe $\sum_p \frac{1}{p}$ ist divergent, siehe 1.6.2.

1.6. Noch einmal: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

1.6.1. Eulers Beweis: Die harmonische Reihe als Produkt geometrischer Reihen. Seien $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen. Dann ist

$$\prod_i (1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots) = \sum_{n \in X} \frac{1}{n},$$

dabei ist X die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primteiler die Form $p_1, \dots, p_n$ haben (trivialerweise gilt $\geq$; es gilt $\leq$ wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung). Die Faktoren der linken Seiten sind geometrische Reihen, also von der Form

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots = \frac{p}{p-1}.$$

Demnach ist die linke Seite gleich

$$\prod_i (1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots) = \prod_i \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

Es folgt, dass X eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ sein muss, da die harmonische Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ divergiert. (Beachte: das Produkt absolut konvergenter Reihen ist wieder konvergent).

1.6.2. Die Reihe $\sum \frac{1}{p}$ divergiert. Angenommen, $\sum_p \frac{1}{p} = \beta \in \mathbb{R}$. Für jede natürliche Zahl n sei $Q(n)$ die Menge der quadratfreien Zahlen $m < n$, und Q die Menge aller quadratfreien natürlichen Zahlen. Jede Zahl in $Q(m)$ läßt sich als Produkt von Primzahlen $p < n$ schreiben, daher ist

$$\sum_{m \in Q(n)} \frac{1}{m} \leq \prod_{p<n} (1 + \frac{1}{p})$$

Für jede Zahl $x > 0$ gilt $1 + x < \exp(x)$ (wegen der Reihenentwicklung von exp), also ist

$$\prod_{p<n} (1 + \frac{1}{p}) < \prod_{p<n} \exp(\frac{1}{p}) = \exp(\sum_{p<n} \frac{1}{p}) \leq \exp(\beta).$$

Dies zeigt, dass die Reihe $\sum_{m \in Q} \frac{1}{m}$ konvergiert, da die Partialsummen $\sum_{m \in Q(n)} \frac{1}{m}$ beschränkt sind.

Bekanntlich konvergiert auch $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$. Es ist aber

$$(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2})(\sum_{m \in Q} \frac{1}{m})$$

die harmonische Reihe, und die harmonische Reihe konvergiert nicht! (Wir verwenden hier, dass sich jede natürliche Zahl eindeutig als Produkt einer Quadratzahl und einer quadratfreien Zahl darstellen läßt.)

1.6.3. *Für $n > 2$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \le n!$.*

Beweis: Wegen $n > 2$ ist $n! - 1 > 1$. Sei p der kleinste von 1 verschiedene Teiler von $n! - 1$. Dies ist eine Primzahl, es ist $p < n!$. Wäre $p \le n$, so wäre p Teiler von $n!$ und von $n! - 1$, also von 1, Widerspruch.

1.6.4. Beweis mit Hilfe der Fermat'schen Zahlen. Die Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n+1}$ mit $n \ge 0$ nennt man Fermat'sche Zahlen. Zeige (Übungsaufgabe): Je zwei Fermat'sche Zahlen sind teilerfremd.

1.7. Wie findet man Primzahlen? Das Sieb des Eratosthenes.

Man beginnt etwa mit einer Tabelle der Zahlen größer oder gleich 2 (und zum Beispiel kleiner oder gleich $n = 100$). Man markiert im 1.Schritt die Zahl 2, und streicht alle anderen Vielfache der 2. Dann markiert man im 2.Schritt die Zahl 3, und streicht alle weiteren Vieflache von 3. Im n-ten Schritt sucht man die erste Zahl, die weder markiert noch gestrichen ist — dies ist die n-Primzahl p_n und man streicht alle echten Vielfachen dieser Zahl.

Lemma (Primzahltest). *Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft:*
(T) *Ist p eine Primzahl mit $p \le \sqrt{n}$, so ist p kein Teiler von n.*
Dann ist n eine Primzahl.

Beweis: Sei p der kleinste Primteiler von n. Ist n keine Primzahl, so ist $1 < p < n$. Also ist $n/p > 1$. Ist p' ein Primteiler von n/p, so auch von n, also ist $p \le p'$ und demnach $p \le p' \le n/p$. Es folgt $p^2 \le n$, also $p \le \sqrt{n}$.

Um also die Primzahlen $n \le 100$ zu finden, muss man die Primzahlen $p \le \sqrt{100} = 10$ kennen, also $p = 2, 3, 5, 7$. Eine Zahl $1 < n \le 100$ ist genau dann Primzahl, wenn sie nicht durch $2, 3, 5, 7$ teilbar ist.

1.8. Anhang: Bericht über den Primzahlsatz.

Seien Funktionen $f, g\colon [a, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben mit $a \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $f \sim g$ falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt (dies bedeutet: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $x_0 \in [a, \infty)$, sodass $|\frac{f(x)}{g(x)} - 1| \le \epsilon$ für alle $x \ge x_0$ gilt).

Der Primzahlsatz liefert eine Reihe von Funktionen f mit $f \sim \pi$. Neben der Funktion $f = \frac{x}{\ln x}$ ist hier die Funktion $\mathrm{li}(x)$ ("logarithmisches Integral") von Interesse, mit

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^\infty \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t.$$

Der Primzahlsatz (Hadamard, de la Vallée Poussin). *Es ist*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \left(\sim \frac{x}{\ln x - 1} \sim \mathrm{li}(x)\right).$$

Vermutet wurde dieser Satz von Gauß, bewiesen wurde er 1895 von Hadamard und de la Vallée Poussin. Der Beweis ist nicht ganz einfach und kann hier nicht gegeben werden. Einige Anmerkungen zum Verständnis der Aussage sollen hier aber eingefügt werden.

Eigenschaften der Relation $\sim$. Seien $f, g, h\colon [a,\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(1) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, es gilt also: Es ist $f \sim f$. Ist $f \sim g$, so auch $g \sim f$. Und aus $f \sim g,\ g \sim h$ folgt $f \sim h$.

(2) Ist $f \sim cf$ für ein $c \in \mathbb{R}$, so ist $c = 1$.

(3) Ist $f = g + h$ und gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$, so ist $f \sim g$ (denn es ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)+h(x)}{g(x)} = 1 + \frac{h(x)}{g(x)}$).

(4) Insbesondere gilt: Ist f unbeschränkt, so ist $f + c \sim f$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$. (Denn $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{f(x)} = 0$).

Beweis von $\frac{x}{\ln x} \sim \mathrm{li}(x)$. Wegen der Eigenschaft (4) reicht es zu zeigen: $\frac{x}{\ln x} \sim \int_e^\infty \frac{1}{\ln t}\, \mathrm{d}\, t$. Die Ableitung der Funktion $\frac{x}{\ln x}$ ist $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$, also ist

$$\frac{x}{\ln x} - \frac{e}{\ln e} = \int_e^x \big(\frac{t}{\ln t}\big)'\, \mathrm{d}\, t = \int_e^x \frac{1}{\ln t}\, \mathrm{d}\, t - \int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t.$$

Wir zerlegen das Integral

$$\int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t = \int_e^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t.$$

Beim ersten Summanden verwenden wir: aus $t \ge e$ folgt $\ln t \ge 1$, also ist die zu integrierende Funktion $\frac{1}{(\ln t)^2} \le 1$. Das Integrationsintervall hat Länge $< \sqrt{x}$, also gilt

$$|\int_e^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t| < \sqrt{x}.$$

Beim zweiten Summanden verwenden wir: aus $t \ge \sqrt{x}$ folgt $\frac{1}{\ln t} \le \frac{2}{\ln x}$, also ist die zu integrierende Funktion durch $\frac{4}{(\ln x)^2}$ nach oben beschränkt. Das Integrationsintervall hat Länge $< x$, also ist

$$|\int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t| < x \cdot \frac{4}{(\ln x)^2}.$$

Insgesamt sehen wir:

$$\frac{\ln x}{x} \int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t \le \frac{\ln x}{x} \cdot x^{1/2} + \frac{\ln x}{x} \cdot x \cdot \frac{4}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^{1/2}} + \frac{4}{\ln x},$$

daher ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_e^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, \mathrm{d}\, t = 0$. Die Behauptung folgt nun aus (3).