0. Grundbegriffe

Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir den *Ring der ganzen Zahlen.* Ist x eine reelle Zahl, so sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Beachte: $\lfloor x \rfloor$ ist diejenige ganze Zahl z mit $z \leq x < z+1$.

0.1. Lemma.

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \qquad \text{für alle} \qquad x, y, \in \mathbb{R}.}$$

Beweis: $\lfloor x \rfloor \leq x$ und $\lfloor y \rfloor \leq y$ impliziert $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y$ und damit die linke Ungleichung. Und es ist $x+y < \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor + 1$; rechts steht eine ganze Zahl z, die echt größer als $x+y$ ist; demnach ist $\lfloor x+y \rfloor \leq z-1$; dies liefert die zweite Ungleichung.

Mit $\mathbb{N}_1$ (oder auch nur $\mathbb{N}$, zumindest in dieser Vorlesung) werde die Menge $\{1, 2, \dots\}$ der ganzen Zahlen $n \geq 1$ bezeichnet; wir nennen diese Zahlen die *natürlichen* Zahlen.

Wir verwenden das Induktionsprinzip: *Jede nicht leere Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *besitzt ein kleinstes Element* (und dieses ist eindeutig bestimmt!).

Teiler. Seien a, b natürliche Zahlen. Man sagt a teilt b, falls es eine natürliche Zahl a' mit $aa' = b$ gibt; man nennt dann a einen *Teiler* von b und man schreibt $a|b$.

Wichtig. Die Zahl 1 besitzt nur einen Teiler, nämlich sich selbst.

Man nennt die natürlichen Zahlen a, b *teilerfremd,* wenn 1 der einzige gemeinsame Teiler ist.

Primzahl. Eine natürliche Zahl p heißt *Primzahl,* wenn $p > 1$ gilt und $1, p$ die einzigen Teiler von p sind.

Wichtig. *Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n ist eine Primzahl.* (Der "kleinste" Teiler von n existiert nach dem Induktionsprinzip.)

Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheore: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es Primzahlen $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_t$ mit $n = p_1 p_2 \cdots p_t$, und *diese Zahlenfolge ist eindeutig.*

Dieser Satz ist **keinesfalls trivial** und auch **gar nicht offensichtlich,** auch wenn man sich durch den Schulunterricht an ihn gewöhnt hat! Ein Beweis wird üblicherweise in der Vorlesung *Lineare Algebra* gegeben. Später soll dies auch in dieser Vorlesung thematisiert werden. Jetzt wird der Satz als bekannt vorausgesetzt.

Folgerung. Ist n eine natürliche Zahl und p Primzahl, so sei n_p die höchste p-Potenz, die n teilt. *Es gilt $n = \prod_p n_p$.*

Ist $n_p = p^s$, so schreibt man auch $w_p(n) = s$. Man nennt w_p die p-adische Bewertung. Es gilt also $n = \prod_p p^{w_p(n)}$.

Beispiele: $w_2(12) = 2,\ w_3(12) = 1,\ w_5(12) = 0.$

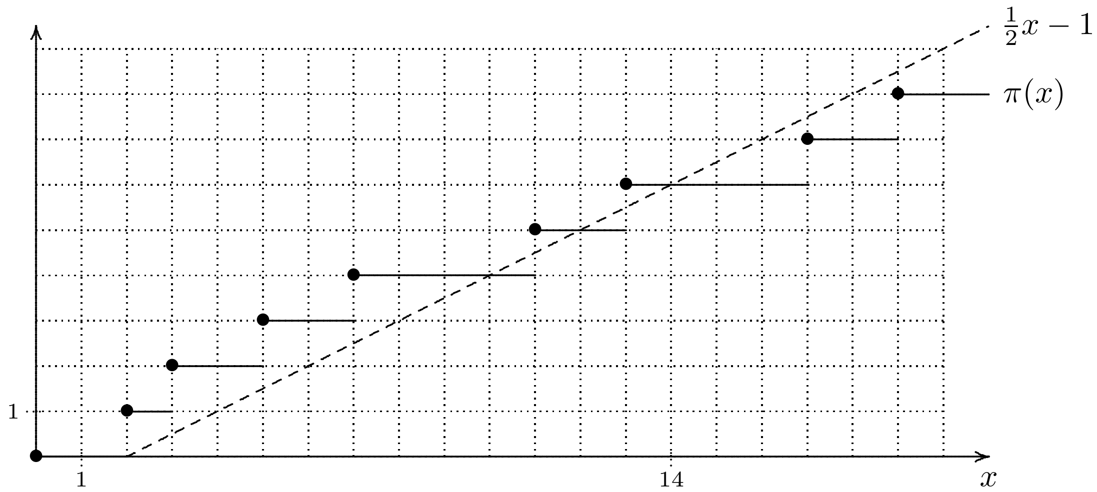
Konventionen: p steht üblicherweise für eine Primzahl; bei einer Summe oder Reihe der Form $\sum_p f(p)$ wird über alle Primzahlen p summiert.

Ist x eine reelle Zahl, so sei $\pi(x)$ die *Anzahl der Primzahlen* $p \le x$.

Beispiele: $\pi(5) = 3,\ \pi(\frac{5}{2}) = 1,\ \pi(-2) = 0.$

Lemma. $\pi(x) \le \frac{1}{2}x - 1$ für $x \ge 14$.

Beweis: Bis auf die Zahl 2 sind alle Primzahlen ungerade. Die Behauptung ist richtig für $x = 14$ (die Primzahlen $p \le 14$ sind $2, 3, 5, 7, 11, 13$, die Anzahl ist $\frac{14}{2} - 1$.) Die Behauptung ist dann auch richtig für $x \in [14, 15]$. Ist sie richtig für eine ungerade Zahl y größer als 2, so für alle Zahlen y mit $x \le y$ (und 15 ist eben die kleinste ungerade ganze Zahl $y > 2$, für die Behauptung richtig ist).



1. Die Verteilung der Primzahlen.

1.1. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Satz (Euklid). *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Wir werden viele Beweise dafür notieren.

1. Beweis (Euklid). Seien $p_1, \dots, p_t$ Primzahlen mit $t \ge 1$. Bilde $n = \prod_i p_i + 1$. Sei a der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n. Dies ist eine Primzahl. Wäre $a = p_i$ für ein $1 \le i \le i$, etwa $a = p_1$, und $n = aa'$, so wäre $1 = n - \prod_i p_i = p_1(a' - \prod_{i\ge 2} p_i)$, also p_1 ein Teiler von 1.

2. Beweis. *Zu jeder natürlichen Zahl* $n > 2$ *gibt es eine Primzahl* p *mit* $n < p < n!$. (Übungsaufgabe).

3. Beweis: Das Bertrand'sche Postulat. Siehe Abschnitt 1.2.

Und viele weitere!

1.2. Das Bertrand'sche Postulat.

1.2.1. Satz (Tchebycheff) ("Bertrand'sches Postulat"). *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.*

Der Fall $p = 2n$ kann natürlich nur für $n = 1$ auftreten, also: *Zu jeder natürlichen Zahl $n > 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p < 2n$.*

Natürlich ist dieser Satz von Tchebycheff ein weiterer Beweis des Euklid'schen Satzes. Vermutet wurde die Aussage 1845 von Bertrand, bewiesen wurde sie 1852 von Tchebycheff. Der folgende Beweis stammt im wesentlichen von Erdös.

Die **Hauptidee:** Man betrachtet den Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$, denn alle Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$ sind Teiler des Zählers, aber nicht des Nenners, also Teiler von $\binom{2n}{n}$.

Für die Primteiler von $\binom{2n}{n}$ gilt:

(0) Alle Primfaktoren p von $\binom{2n}{n}$ erfüllen $p \leq 2n$.

(1) Ist $n < p \leq 2n$, so ist p ein Teiler von $\binom{2n}{n}$.

(2) Ist $\frac{2}{3}n < p \leq n$, und $p \geq 3$, so ist p kein Teiler von $\binom{2n}{n}$ (eine wesentliche Einsicht von Erdös).

(3) $\binom{2n}{n}_p \leq 2n$ (ebenfalls sehr wichtig! Dies verallgemeinert (0).)

(3′) Daraus folgt: Ist $\sqrt{2n} < p$, so ist p^2 kein Teiler von $\binom{2n}{n}$.

Und wir brauchen zwei zusätzliche Abschätzungen:

(4) $\prod_{p \leq x} \leq 4^{x-1}$ für jede natürliche Zahl x.

(5) $\frac{1}{2n}4^n \leq \binom{2n}{n}$.

Beweise:

(0) Ein Primfaktor von $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ muss ein Faktor des Zählers sein.

(1) Dies wurde schon notiert.

(2) Wieder verwenden wir $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Aus $\frac{2}{3}n < p \leq n$ folgt, dass p genau zweimal den Zähler teilt und genau einmal jeden der beiden Faktoren $n!$ im Nenner. Also heben sich die Faktoren p in Zähler und Nenner weg.

(3) Hier müssen wir weiter ausholen. Wir brauchen folgende Formel von Legendre:

Lemma (Legendre).

$$\boxed{w_p(n!) = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \cdots}$$

Beweis: Die Anzahl der Faktoren von $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, die durch p teilbar sind, ist $\lfloor n/p \rfloor$, die Anzahl der Faktoren, die durch p^2 teilbar sind, ist $\lfloor n/p^2 \rfloor$, usw.

Die Legendre-Formel hat viele Anwendungen. Zum Beispiel: Wieviele Nullen hat die Dezimaldarstellung von 100! am Ende? Gesucht ist also $w_2(100!)$ und $w_5(100!)$. Es ist

$$\begin{aligned} w_2(100!) &= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97 \\ w_5(100!) &= 20 + 4 = 24 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Endnullen von 100! ist das Minimum von 97 und 24, also 24.

Beweis von (3): Nach der Legendre-Formel ist

$$a := w_p(\tbinom{2n}{n}) = \sum_{t \geq 1} (\lfloor 2n/p^t \rfloor - 2\lfloor n/p^t \rfloor),$$

dabei wird über alle t summiert, für die $p^t \leq 2n$ gilt, also über $1 \leq t \leq s$, falls s maximal ist mit $p^s \leq 2n$. Für jeden Summanden gilt

$$0 \leq \lfloor 2n/p^t \rfloor - 2\lfloor n/p^t \rfloor \leq 1$$

(siehe den Abschnitt "Grundbegriffe"). Wir sehen also: Es gibt genau s Summanden und alle Summanden sind 0 oder 1, also gilt für die Summe $a \leq s$. Aber die höchste p-Potenz, die $\binom{2n}{n}$ teilt, ist p^a, also $p^a \leq p^s \leq 2n$.

(3′) Sei $\sqrt{2n} < p$. Dann ist $2n < p^2$. Wäre p^2 ein Teiler von $\binom{2n}{n}$, so wäre $p^2 \leq 2n$ nach (3), ein Widerspruch.

(1) und (2) folgen natürlich auch aus (3).

(5) Wir zeigen als erstes: Ist $k < \frac{m-1}{2}$, also $k+1 < m-k$, so ist

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} < \frac{m-k}{k+1} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!} = \binom{m}{k+1}.$$

Demnach liefern die Binomialkoeffizienten eine Folge von Zahlen, die zur Mitte hin ansteigt und dann wieder abfällt:

$$1 = \tbinom{2n}{0} < \tbinom{2n}{1} < \cdots < \tbinom{2n}{n} > \cdots > \tbinom{2n}{2n-1} > \tbinom{2n}{2n} = 1,$$

Betrachten wir die folgende Summe mit $2n$ Summanden:

$$(1+1)^{2n} = \left(\tbinom{2n}{0} + \tbinom{2n}{2n}\right) + \tbinom{2n}{1} + \tbinom{2n}{2} + \cdots + \tbinom{2n}{2n-1}$$

Für jeden Summanden s_i gilt $s_i \leq \binom{2n}{n}$. Also ist

$$2^{2n} = \sum_i s_i \leq 2n \cdot \binom{2n}{n},$$

und damit ist (5) bewiesen.

(4) Setze $P(x) = \prod_{p \le x} p$. Ist q die größte Primzahl mit $q \le x$, so ist $P(q) = P(x)$ and $4^{q-1} \le 4^{x-1}$. Also reicht es, den Fall $x = q$ zu untersuchen. Ist $q = 2$, so ist $P(q) = 2 < 4 = 4^{2-1}$. Sei nun $q = 2m + 1$ eine ungerade Primzahl. Es ist

$$\prod_{m+1 < p \le 2m+1} p \le \tbinom{2m+1}{m} \le 2^{2m} = 4^m.$$

Die erste Ungleichung gilt aus dem gleichen Grund wie die Behauptung (1). Für die zweite argumentiert man wie folgt: Die beiden Binomialkoeffizieten $\binom{2m+1}{m}$ und $\binom{2m+1}{m+1}$ sind gleich, es ist also

$$2\tbinom{2m+1}{m} = \tbinom{2m+1}{m} + \tbinom{2m+1}{m+1} \le \sum_{k=0}^{2m+1} \tbinom{2m+1}{k} = (1+1)^{2m+1} = 2^{2m+1},$$

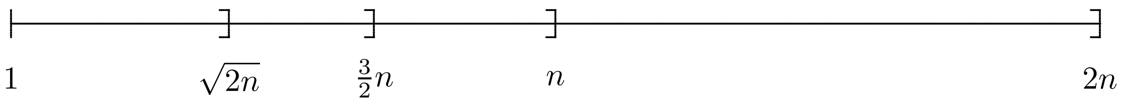
und demnach $\binom{2m+1}{m} \le 2^{2m}$.

Also ist

$$P(q) = P(m+1) \cdot \prod_{m+1 < p \le 2m+1} p \le 4^m \cdot 4^m = 4^{2m}.$$

Hier verwenden wir einerseits Induktion, andererseits die gerade bewiesene Formel.

Hier nun also der **Beweis** des Bertrand'schen Postulats. Sei $n \ge 5$, dann ist $\sqrt{2n} < \frac{2}{3}n$. Die Primteiler von $\binom{2n}{n}$ sind Zahlen im Intervall $[1, 2n]$; wir betrachten verschiedene Teilintervalle:



Wegen (5) und (0) gilt:

$$\frac{4^n}{2n} \le \binom{2n}{n} \le \prod_{p \le 2n} \binom{2n}{n}_p = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

mit

$$a = \prod_{p \le \sqrt{2n}} \tbinom{2n}{n}_p \le \prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n \;=\; (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} \;\le\; (2n)^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}-1},$$

$$b = \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} \tbinom{2n}{n}_p \le \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \le \prod_{p \le \frac{2}{3}n} p \;\le\; 4^{\frac{2}{3}n-1} < 4^{\frac{2}{3}n},$$

$$c = \prod_{\frac{2}{3}n < p \le n} \tbinom{2n}{n}_p = 1,$$

$$d = \prod_{n < p \le 2n} \tbinom{2n}{n}_p,$$

dabei gilt die letzte Ungleichung bei a zumindest für $\sqrt{2n} \geq 14$, also $2n \geq 196$, also $n \geq 98$ (wir verwenden hier $\pi(x) \leq \frac{1}{2}x - 1$, siehe Abschnitt 0); zusätzlich haben wir für a auch (3) verwendet. Für b braucht man (3′) und (4)), und (c) folgt aus (2).

Dies sind die entscheidenden Abschätzungen!.

Ist nun $d = 1$, so erhalten wir

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \; a \cdot b \; \leq \; (2n)^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}-1} \cdot 4^{\frac{2}{3}n},$$

also

$$\boxed{4^{\frac{1}{3}n} \leq (2n)^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}}.}$$

Eine solche Ungleichung kann nur für kleine n erfüllt sein! Zum Beispiel ist sie schon für $n = 72$ falsch (links steht: 4^{24}, rechts steht $144^{\frac{1}{2}\sqrt{144}} = 144^6$. Es ist $4^4 = 256$. Wegen $256 > 144$ ist auch $256^6 > 144^6$).

Wir behaupten, dass die Ungleichung impliziert, dass $n \leq 364$ gilt. Denn wir erhalten als dritte Potenz

$$(*) \qquad 2^{2n} = 4^n \leq (2n)^{\frac{3}{2}\sqrt{2n}} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}\frac{3}{2}\sqrt{2n}} = 2^{9(2n)^{2/3}}.$$

Hier verwenden wir

$$2n \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$$

Beweis: Es ist $x + 1 \leq 2^x$ für alle $x \geq 1$ (siehe den Nachtrag ANA-1). Wir verwenden dies für $x = \sqrt[6]{2n}$ und erhalten:

$$2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < (\sqrt[6]{2n} + 1)^6 \leq (2^{\sqrt[6]{2n}})^6 = 2^{6\sqrt[6]{2n}}.$$

Exponentenvergleich in $(*)$ liefert

$$2n \leq 9(2n)^{2/3},$$

also

$$(2n)^{1/3} \leq 9,$$

also

$$2n \leq 729, \qquad \text{also} \qquad n \leq 364.$$

Es reicht nun, die Zahlen $n \leq 364$ zu betrachten. Hier gibt es die Primzahlfolge

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 23,\ 43,\ 83,\ 163,\ 317,\ 631.$$

Für diese Primzahlen $p_1 < \cdots < p_{11}$ gilt: $p_{i+1} < 2p_i$, für $1 \leq i \leq 10$. Also gibt es zu jeder Zahl $n \leq 364$ eine der Zahlen p_i mit $n < p_i \leq 2n$.

Verschärfung der Argumentation. In unserem Widerspruchsbeweis haben wir angenommen, dass $d = 1$ gilt. Nun arbeiten wir konstruktiv: Aus

$$\frac{4^n}{2n} < \binom{2n}{n} = a \cdot b \cdot d \ \leq \ (2n)^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}-1} \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot d$$

folgt

$$\boxed{4^{\frac{n}{3}} \cdot (2n)^{-\frac{1}{2}\sqrt{2n}} < d.}$$

Nun gilt

$$d = \prod_{n<p\leq 2n} \binom{2n}{n}_p \leq \prod_{n<p\leq 2n} 2n = (2n)^{\pi(2n)-\pi(n)},$$

also

$$4^{\frac{n}{3}} \cdot (2n)^{-\frac{1}{2}\sqrt{2n}} \leq (2n)^{\pi(2n)-\pi(n)}.$$

Logarithmieren liefert

$$\frac{n}{3}\ln 4 - \frac{1}{2}\sqrt{2n}\ln(2n) \ < \ (\pi(2n) - \pi(n))\ln(2n),$$

also

$$\pi(2n) - \pi(n) \ > \ \frac{n}{\ln(2n)} \cdot \frac{\ln 4}{3} \ - \ \frac{1}{2}\sqrt{2n}.$$

Um die rechte Seite zu vereinfachen, verwenden wir erstens, dass gilt:

$$\ln(2n) = \ln 2 + \ln n \leq 2\ln n$$

für $2 \leq n$. Zweitens zeigen wir, dass

$$\frac{1}{2}\sqrt{2n} \ \leq \ \frac{1}{5}\frac{n}{\ln(n)}$$

für $n \geq 500$ gilt.

Die Funktion $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ ist nach ANA-3 für $x \geq e \approx 2,718$ monoton wachsend. Es ist $g(120) = \frac{120}{\ln 120} \approx 25,065$. Also ist $g(x) \geq 25$ für $x \geq 120$. Wir betrachten nun die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{25}x - (\ln x)^2.$$

Nach ANA-4 (mit $a = \frac{2}{25}$) ist diese Funktion monoton wachsend, falls $\frac{x}{\ln x} \geq \frac{2}{a} = 25$ ist. Insgesamt sehen wir: Ist $x \geq 120$, so ist $\frac{x}{\ln x} \geq 25$ und damit ist $f(x)$ monoton wachsend. Nun ist

$$f(500) = \frac{2}{25}500 - (\ln 500)^2 = 40 - (\ln 500)^2,$$

und $(\ln 500)^2 \approx 38,6$. Es ist also $f(500) > 0$, und wegen des monotonen Wachstums ist $f(x) > 0$ für $x \geq 500$. Sei also $n \geq 500$. Wegen $f(n) \geq 0$ gilt

$$(\ln n)^2 \leq \frac{2}{25} n,$$

also erhalten wir

$$\frac{1}{2} n \leq \frac{1}{25} \frac{n^2}{(\ln n)^2}.$$

Wurzelziehen liefert die gesuchte Ungleichung:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2n} = \sqrt{n/2} \ \leq \ \frac{1}{5} \frac{n}{\ln n}.$$

Insgesamt sehen wir:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\ln(2n)} \cdot \frac{\ln 4}{3} \ - \ \frac{1}{2}\sqrt{2n} \ &\geq \ \frac{n}{2\ln n} \cdot \frac{\ln 4}{3} \ - \ \frac{1}{5} \frac{n}{\ln(n)} \\ &= \Big(\frac{\ln 4}{6} - \frac{1}{5}\Big) \frac{n}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Es ist $\frac{\ln 4}{6} - \frac{1}{5} > 0,03$, also sehen wir

$$\pi(2n) - \pi(n) \ > \ 0,03 \frac{n}{\ln(n)} \qquad \text{für} \qquad n \geq 500,$$

und es ist schon $0,03 \cdot \frac{500}{\ln 500} > 2$. Da $\pi(2n) - \pi(n)$ eine ganze Zahl ist, folgt aus $\pi(2n) - \pi(n) > 2$, dass sogar $\pi(2n) - \pi(n) \geq 3$ gilt.

Beachte: $\pi(2n) - \pi(n)$ ist die Anzahl der Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$.

1.2.2. Satz. *Zu jeder natürlichen Zahl $n > 5$ gibt es mindestens zwei Primzahlen p mit $n < p < 2n$.*

Beweis: Für große n (nämlich $n \geq 500$) wurde gerade bewiesen, dass es sogar mindestens 3 Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$ gibt. Für kleine n braucht man eine genügend lange Folge von Primzahlen $7 = q_1 < q_2 < \ldots$ mit $q_k < 2q_{k-2}$, etwa die Folge

$$7, 11, 13, 19, 23, 37, 43, 73, 83, 139, 163, 277, 317, 547, 631.$$

1.3. Folgerungen.

1.3.1. *Ist $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, so gibt es eine Primzahl p mit $n < p < 2n$.*

Beweis: Der Fall $p = 2n$ kann nur für $n = 2$ auftreten.

1.3.2. *Sei $n \geq 2$. Es gibt mindestens eine Primzahl p mit $(n!)_p = p$.*

Beweis: Für $n = 2$ nimmt man $p = 2$. Ist $n = 2m$, mit $m \geq 2$, so nimmt man eine Primzahl p mit $m < p \leq 2m = n$, offensichtlich tritt p in der Primfaktorzerlegung von $n!$ mit der Vielfachheit 1 auf. Ist $n = 2m+1$, so gibt es eine Primzahl p mit $m < p \leq 2m$. Es ist also $p < 2m + 1 = n$. Da $2p$ eine gerade Zahl ist, folgt aus $2p > 2m$, dass gilt $2p > 2m + 1 = n$. Daher gilt wieder, dass p in der Primfaktorzerlegung von $n!$ mit der Vielfachheit 1 auftritt.

1.3.3. *Ist $n!$ eine t-Potenz, so ist $t = 1$.* (Dabei nennt man eine natürliche Zahl m eine t-te Potenz ($t \in \mathbb{N}$), falls es eine natürliche Zahl k mit $m = k^t$ gibt.)

Beweis: In der Primfaktorzerlegung einer t-ten Potent sind alle Exponenten Vielfache von t.

Sei p_k die k-te Primzahl, also $p_1 = 2,\ p_2 = 3$, usw.

1.3.4.

$$\boxed{p_{n+1} < 2 \cdot p_n.}$$

Nach 1.3.1 gibt es zu $p_n \geq 2$ eine Primzahl p mit $p_n < p < 2p_{n+1}$.

1.3.5. Es ist sogar

$$\boxed{p_{n+2} < 2 \cdot p_n \qquad \text{für} \qquad n \geq 4.}$$

Verwende jetzt 1.2.2. falls $p_n > 5$ ist: Es gibt dann für $m = p_n$ zwei Primzahlen p, p' mit $m < p < 2m$, und $m < p' < 2m$. Insbesondere liegen also die Primzahlen p_{n+1} und p_{n+2} im Intervall $(m, 2m)$. Das heißt aber: $p_{n+2} < 2p_n$. Es ist $p_n > 5$ für $n \geq 4$. (Die Behauptung ist nicht richtig für $n = 1, 2, 3$, denn $5 > 2 \cdot 2,\ \ 7 > 2 \cdot 3,\ \ 11 > 2 \cdot 5$.)

1.4. Vergleich von $\pi(x)$ mit $x/\ln x$

Wir verwenden wieder die Aussagen in 1.2 zu $\binom{2n}{n}$.
Es gilt:

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} = \prod_{n<p\leq 2n} n \leq \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} = \prod_{p\leq 2n} \binom{2n}{n}_p \leq \prod_{p\leq 2n} 2n = (2n)^{\pi(2n)}.$$

Dabei ist das erste Vergleichszeichen trivial, das zweite ist die Aussage (1), das dritte ist die Aussage (3).

Wir haben aber auch die Ungleichungen

$$2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

(In (5) wurde $\binom{2n}{n}$ nach unten durch $\frac{2^n 2^n}{2n}$ abgeschätzt, aber $2n \leq 2^n$, dies zeigt die untere Abschätzung. Die obere ist ebenfalls wohlbekannt: die Summe der Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{k}$ ist $(1+1)^{2n} = 2^{2n}$.

Insgesamt erhalten wir die beiden linken Abschätzungen:

$$\text{(a)} \qquad n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}, \qquad \text{also} \qquad \pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{2n \ln 2}{\ln n}$$

$$\text{(b)} \qquad 2^n \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}, \qquad \text{also} \qquad \frac{n \ln 2}{\ln(2n)} \leq \pi(2n).$$

die rechten ergeben sich durch Logarithmieren.

Wir verwenden nun die Abschätzung (b), um $\pi(x)$ nach unten abzuschätzen: Sei $2n$ die größte ganze Zahl mit $2n \leq x$. Dann sehen wir:

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln(2n)} \geq \frac{n \ln 2}{\ln(x)} \geq \frac{2n+2}{4} \cdot \frac{\ln 2}{\ln x} \geq \frac{\ln 2}{4} \cdot \frac{x}{\ln x};$$

dabei verwenden wir, dass gilt $n \geq \frac{2n+2}{4}$ und $2n + 2 > x$.

Jetzt wenden wir uns der Aufgabe zu, $\pi(x)$ nach oben abzuschätzen. Wir zeigen, dass aus (a) die Ungleichung

$$\pi(2^t) \leq 3 \cdot \frac{2^t}{t} \qquad \text{für} \qquad t \in \mathbb{N}$$

folgt. Für $t \leq 5$ wird dies direkt verifiziert:

t	1	2	3	4	5
$3\frac{2^t}{t}$	6	6	8	12	$\frac{96}{5}$
$\pi(2^t)$	1	2	4	6	11

Für $t \geq 5$ arbeitet man mit Induktion. Die Ungleichung (a) besagt für $n = 2^t$:

$$\pi(2^{t+1}) - \pi(2^t) \leq \frac{2 \cdot 2^t \cdot \ln 2}{\ln 2^t} = \frac{2^{t+1}}{t},$$

also ist

$$\pi(2^{t+1}) \leq \pi(2^t) + \frac{2^{t+1}}{t} \leq \frac{3 \cdot 2^t}{t} + \frac{2 \cdot 2^t}{t} = \frac{5 \cdot 2^t}{t} \leq \frac{3 \cdot 2^{t+1}}{t+1}$$

dabei gilt die letzte Abschätzung wegen $\frac{5}{t} \leq \frac{6}{t+1}$ (hier verwendet man $5 \leq t$).

Sei nun $2^t \leq x \leq 2^{t+1}$. Dann gilt (Zähler-Vergleich, Nenner-Vergleich):

$$\frac{2^t}{\ln 2^{t+1}} \leq \frac{x}{\ln x},$$

also

$$\pi(x) \leq \pi(2^{t+1}) \leq \frac{3 \cdot 2^{t+1}}{t+1} = 6\frac{1}{t+1}2^t = 6\frac{\ln 2}{\ln 2^{t+1}}2^t \leq 6\ln 2\frac{x}{\ln x}$$

1.4.1. Satz.

$$\boxed{a\frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq b\frac{x}{\ln x} \quad \text{für} \quad x \geq 2, \quad \text{mit} \quad a = \frac{\ln 2}{4}, \quad b = 6\ln 2}$$

1.4.2. Folgerung.

$$\boxed{\pi(n^2) \geq n \quad \text{für} \quad n \geq 2.}$$

Beweis:

$$\pi(n^2) \geq \frac{\ln 2}{4} \cdot \frac{n^2}{\ln(n^2)} = \frac{\ln 2 \cdot n}{8 \cdot \ln n} \cdot n \geq n,$$

sofern $\ln 2 \cdot n \geq 8 \cdot \ln n$ gilt, also $\frac{\ln 2}{8} n \geq \ln n$. Dies ist richtig für $n \geq 64$.

Beweis: Die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln 2}{8}x - \ln x$$

ist nach ANA-2 für $x \geq \frac{8}{\ln 2} \approx 11,84$ monoton wachsend. Für $x = 64 = 2^6$ ist

$$f(64) = \frac{\ln 2}{8}64 - 6\ln 2 = \ln 2(8-6)\ln 2 = 2\ln 2 \approx 1,386,$$

also $f(64) > 1$, und demnach $f(n) > 1$ für $n \geq 64$.

Für $n \leq 63$ lässt sich die Ungleichung direkt zeigen: Man braucht dafür nur die folgenden Werte

$$\begin{array}{rcrrrrrr} n & = & 1 & 2 & 3 & 5 & 10 & 18 \\ \pi(n^2) & = & 0 & 2 & 4 & 9 & 25 & 66 \end{array}$$

1.4.3. Umformulierung. *Ist p_n die n-te Primzahl und $n \geq 2$, so ist $p_n \leq n^2$.*

Nachtrag: ANA - Einige analytische Abschätzungen reeller Funktionen.

Wir notieren hier einige Ungleichungen für reelle Funktion:

(1) $x + 1 \leq 2^x$ für $x \geq 1$.

Beweis: Für $x = 1$ gibt die Behauptung. Es reicht zu zeigen, dass die Differenzfunktion $f(x) = 2^x - x - 1$ monoton wächst. Die Ableitung ist $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 1 > 0$, denn für $x \geq 1$ ist $2^x \geq 2 > \frac{1}{\ln 2}$ (es ist $\ln 2 \approx 0,69$ und demnach $\frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$).

(2) Sei $a > 0$. Die Funktion

$$f(x) = ax - \ln x$$

für $x > 0$ hat bei $x = \frac{1}{a}$ ein Minimum; im Intervall $[\frac{1}{a}, \infty)$ ist sie monoton wachsend (und unbeschränkt).

Es ist $f'(x) = a - \frac{1}{x}$, also gilt $f'(x) = 0$ nur für $x = \frac{1}{a}$. Und natürlich ist $a - \frac{1}{x}$ für $x > 0$ streng monoton wachsend, also ist $f'(x)$ im Intervall $(0, \frac{1}{a})$ negativ und im Intervall $(\frac{1}{a}, \infty)$ positiv.

(3) Sei $c > 0$. Die Funktion $c\frac{x}{\ln x}$ hat bei e ein Minimum, im Intervall $[e, \infty)$ ist sie streng monoton wachsend (und unbeschränkt).

Sei also $f(x) = c\frac{x}{\ln x}$. Es ist $f'(x) = c\big(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\big)$. Ist $x > e$, so ist $\ln x > 1$, also $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} > 0$, und demnach ist $f(x)$ streng monoton wachsend.

(4) Sei $a > 0$. Die Funktion $f(x) = ax - (\ln x)^2$ ist für $\frac{x}{\ln x} \geq \frac{2}{a}$ streng monoton wachsend (und unbeschränkt).

Es ist $f'(x) = a - \frac{2 \ln x}{x}$. Ist $\frac{x}{\ln x} > \frac{2}{a}$, so ist $a > \frac{2 \ln x}{x}$, also $f'(x) > 0$.