

## 6. Farey-Folgen.

Die Menge  $\mathcal{F}_n$  der rationalen Zahlen  $\frac{a}{b}$  mit  $1 \leq b \leq n$  und  $0 \leq a \leq b$  (zusammen mit der Ordnung  $\leq$ ) nennt man die  $n$ -te *Farey-Folge*, zum Beispiel ist

$$\mathcal{F}_5 = \left\{ \frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1} \right\}.$$

Offensichtlich gilt:  $\mathcal{F}_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$ , also  $|\mathcal{F}_1| = 2$ . Ist  $n \geq 2$ , so ist  $|\mathcal{F}_n| = |\mathcal{F}_{n-1}| + \phi(n)$ . Also ist

$$|\mathcal{F}(n)| = 1 + \sum_{a=1}^n \phi(a).$$

Gehören die Brüche  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  zu  $\mathcal{F}_n$ , und gibt es kein  $x \in \mathcal{F}_n$  mit  $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$ , so nennen wir  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  *Farey-Nachbarn* (falls notwendig, mit dem Zusatz: in  $\mathcal{F}_n$ ).

### 6.1. Lemma:

- (a) Aus  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$  (mit  $b, y, d \in \mathbb{N}$ ) und  $bc - ad = 1$  folgt  $y \geq b + d$ .  
 (b) Gilt  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  (mit  $b, d \in \mathbb{N}$ ) so ist

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

- (c) Sind  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  Farey-Nachbarn in  $\mathcal{F}_n$ , so ist  $b + d > n$ .

Beweis von (a): Aus  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$  folgt  $ay < bx$ , also  $bx - ay \geq 1$ . Aus  $\frac{x}{y} < \frac{c}{d}$  folgt  $xd < yc$ , also  $yc - xd \geq 1$ . Wir sehen daher:

$$\begin{aligned} y &= y(bc - ad) = ybc - yad \\ &= ybc - xbd + xbd - yad = b(yc - xd) + d(xb - ya) \geq b + d. \end{aligned}$$

Beweis von (b):  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  liefert  $ad < bc$ . Also ist  $a(b+d) < b(a+c)$  und  $(a+c)d < c(b+d)$ .

Beweis von (c): Seien  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  Farey-Nachbarn in  $\mathcal{F}_n$ . Wäre  $b + d \leq n$ , so wäre auch  $\frac{a+c}{b+d}$  in  $\mathcal{F}_n$ . Aber nach (b) liegt  $\frac{a+c}{b+d}$  zwischen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$ , Widerspruch.

**6.2. Satz.** Seien  $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , geschrieben in gekürzter Form. Genau dann sind dies Farey-Nachbarn, wenn gilt  $bc - ad = 1$ .

Beweis: Seien  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  Farey-Nachbarn in  $\mathcal{F}_n$ . Nach Voraussetzung ist  $(a, b) = 1$ , also gibt es eine Lösung der Bézout'schen Gleichung  $bx - ay = 1$ . Mit  $[x, y]$  sind auch die Paare  $[x + ta, y + tb]$  Lösungen, man kann daher voraussetzen, dass  $n - b < y \leq n$  gilt (wegen  $n - b \geq 0$  ist  $y > 0$ , also auch  $x > 0$ , denn  $bx - ay = 1$ ). Es ist also  $\frac{x}{y} \in \mathcal{F}_n$ . Aus  $bx - ay > 0$  folgt  $bx > ay$ , also  $\frac{x}{y} > \frac{a}{b}$ , demnach haben wir  $\frac{x}{y} \geq \frac{c}{d}$ . Wäre  $\frac{x}{y} \neq \frac{c}{d}$ , so wenden wir 6.1.(a) auf  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{x}{y}$  und erhalten  $d \geq b + y$ . Aber wegen  $\frac{c}{d} \in \mathcal{F}_n$  und  $n - b < y$  gilt  $d \leq n < b + y$ . Dieser Widerspruch zeigt, dass  $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$  gilt, also  $x = c, y = d$  und demnach  $bc - ad = bx - ay = 1$ .

Sei nun umgekehrt  $bc - ad = 1$ . Sei  $n$  das Maximum von  $b$  und  $d$ . Nach Definition gehören dann  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  zu  $\mathcal{F}_n$ . Wären sie keine Farey-Nachbarn in  $\mathcal{F}_n$ , so gäbe es

einen Bruch  $\frac{x}{y}$  in  $\mathcal{F}_n$  mit  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ . Aus 6.1 (a) folgt  $y \geq b + d$ , aber  $b + d > n$ , Widerspruch.

**6.3.** Sind  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  Farey-Nachbarn, so nennt man  $\frac{a+c}{b+d}$  den *Medianten* von  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ .

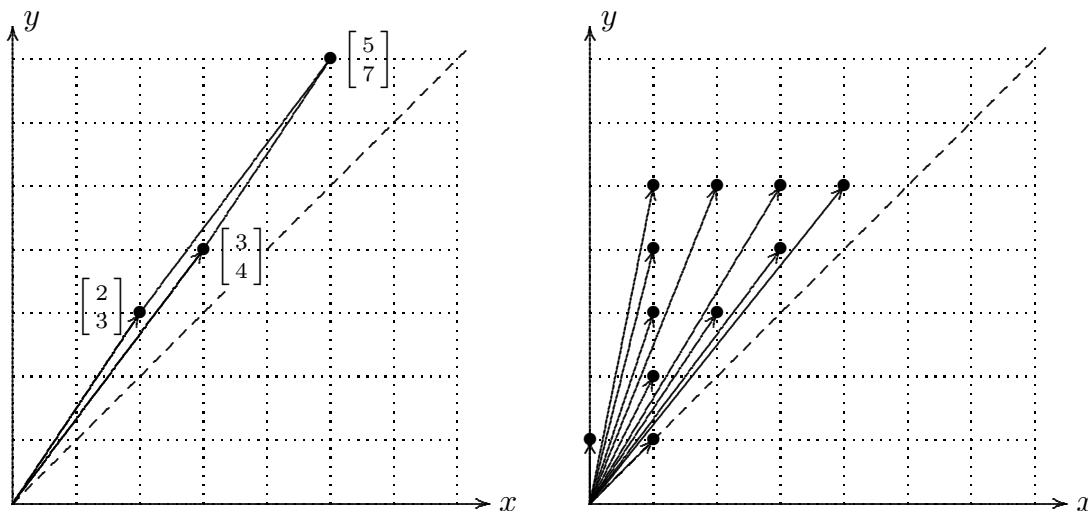
**Folgerungen.** Seien  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  Farey-Nachbarn. Dann gilt:

- (a) Sowohl  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$  als auch  $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  sind Farey-Nachbarn.  
 (b) Es ist  $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bc}$ .

Beweis: (a) Aus  $bc - ad = 1$  folgt sowohl  $b(a+c) - a(b+d) = 1$  als auch  $(b+d)c - (a+c)d = 1$ .

(b)  $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bc} = \frac{1}{bc}$ .

Veranschaulichung in der Ebene: Wir betrachten Brüche der Form  $\frac{a}{b}$  mit  $a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}$ , dabei können wir voraussetzen  $(a, b) = 1$ . Die Gitterpunkte  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , die uns interessieren, liegen oberhalb der Diagonale: es ist  $a \leq b$ . Links, als Beispiel, das Farey-Paar  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3} < \frac{3}{4} = \frac{c}{d}$ , mit dem Medianten  $\frac{5}{7}$ . Zusammen mit dem Ursprung bilden sie ein Parallelogramm mit Flächeninhalt 1 (denn  $\det \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = bc - ad = 1$ ). Rechts sieht man die Punkte in  $\mathbb{R}^2$ , die den Elemente von  $\mathcal{F}_5$  entsprechen.



**6.4. Lemma.** Sei  $m \in \mathbb{N}$  vorgegeben, sei  $0 < \alpha < 1$  irrational. Dann gibt es Farey-Nachbarn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  (gekürzt) mit  $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$  und sowohl  $b > m$ , als auch  $d > m$ .

Betrachte die Zahlen  $|\alpha - \frac{p}{q}|$  mit  $\frac{p}{q} \in \mathcal{F}_m$ , und bilde ihr Minimum  $\epsilon$ . Es ist  $\epsilon > 0$ , denn  $\mathcal{F}_m$  ist endliche Menge und  $\alpha$  ist nicht rational. Wähle eine natürliche Zahl  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , also  $\frac{1}{n} < \epsilon$ . In  $\mathcal{F}_n$  gibt es Farey-Nachbarn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  mit  $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$ . Da  $\mathcal{F}_n$  alle Zahlen  $\frac{u}{n}$  mit  $0 \leq u \leq n$  enthält, ist der Abstand zweier benachbarter Zahlen in  $\mathcal{F}_n$  höchstens  $\frac{1}{n}$ , daher ist  $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{n} |\alpha - \frac{c}{d}| < \frac{1}{n}$ . Wegen  $\frac{1}{n} < \epsilon$  sehen wir: weder  $\frac{a}{b}$ , noch  $\frac{c}{d}$  gehört zu  $\mathcal{F}_m$ , also  $b > m, d > m$ .

**6.5. Satz von Hurwitz.** *Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$  irrational, so gibt es unendlich viele Brüche  $\frac{a}{b}$  mit*

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\sqrt{5} b^2}.$$

Beweis: Seien  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  Farey-Nachbarn in  $\mathcal{F}_n$  mit  $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$ . Betrachte den Medianten  $\frac{a+c}{b+d}$ . Wir zeigen: Mindestens eine der drei Zahlen  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ,  $\frac{a+c}{b+d}$  kann für die Behauptung des Satzes gewählt werden. Wenn nicht, dann gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}, \\ (2) \quad & \frac{c}{d} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}, \\ (3) \quad & |\alpha - \frac{a+c}{b+d}| \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2} \end{aligned}$$

Die Summe der ersten beiden Ungleichungen (2) und (1) liefert

$$\frac{1}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{c}{d} - \alpha + \alpha - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

Fall 1:  $\frac{a+c}{b+d} < \alpha$ , dann ist also

$$(3') \quad \alpha - \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2}$$

Addieren wir die Ungleichungen (2) und (3'), so erhalten wir wie eben:

$$\frac{1}{(b+d)d} = \dots \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{d^2} \right)$$

Fall 2:  $\frac{a+c}{b+d} > \alpha$ , also

$$(3'') \quad \frac{a+c}{b+d} - \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2}$$

Diesmal addieren wir (3'') und (1) und erhalten

$$\frac{1}{(b+d)b} = \dots \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch, wegen des folgenden Lemmas:

**Lemma.** *Es gibt keine natürliche Zahlen  $x, y$  mit*

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \quad \text{and} \quad \frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right).$$

Beweis: Die beiden Ungleichungen liefern:

$$\sqrt{5}xy \geq x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \sqrt{5}x(x+y) \geq x^2 + (x+y)^2 = 2x^2 + 2xy + y^2.$$

Addition ergibt

$$\sqrt{5}x^2 + 2\sqrt{5}xy = \sqrt{5}(x^2 + 2xy) \geq 3x^2 + 2xy^2 + 2y^2,$$

Wir multiplizieren mit 2 und verschieben die linke Seite nach rechts:

$$\begin{aligned} 0 &\geq -2\sqrt{5}x^2 - 4\sqrt{5}xy + 6x^2 + 4xy^2 + 4y^2 \\ &= 4y^2 - 4(\sqrt{5} - 1)xy + (5 - 2\sqrt{5} + 1)x^2 \\ &= (2y - (\sqrt{5} - 1)x)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt:  $2y - (\sqrt{5} - 1)x = 0$ , und demnach  $\sqrt{5} = 2\frac{y}{x} + 1$ . Aber  $\sqrt{5}$  ist nicht rational!

Wegen Lemma 6.4 wissen wir, dass  $b$  und  $d$  (und damit auch  $b+d$ ) beliebig groß gewählt werden können. Damit ist der Satz bewiesen.

**Bemerkung.** Sucht man zu einer irrationalen Zahl  $\alpha$  rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$  mit  $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$ , so braucht man nur Lemma 6.4: Dies liefert Farey-Nachbarn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  (gekürzt) mit  $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$  und  $b > n, d > n$ . Bilde den Medianten  $\frac{a+c}{b+d}$ .

Ist  $\alpha < \frac{a+c}{b+d}$ , so liegt  $\alpha$  zwischen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{a+c}{b+d}$ . Es ist  $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+d)} < \frac{1}{b^2}$ . Also ist  $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$ .

Ist dagegen  $\alpha > \frac{a+c}{b+d}$ , so betrachtet man entsprechend das Intervall zwischen  $\frac{a+b}{c+d}$  und  $\frac{c}{d}$  und sieht:  $|\alpha - \frac{c}{d}| < \frac{1}{d^2}$ .

**6.6. Zusatz.** Die Konstante  $\sqrt{5}$  im Satz von Hurwitz ist best-möglich. Es gilt nämlich die folgende Aussage: Ist  $\beta > \sqrt{5}$ , so gibt es irrationale Zahlen  $\alpha$ , sodass es nur endlich viele rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$  mit

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\beta b^2}$$

gibt (zum Beispiel gilt dies für  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ).

Beweis: Sei  $|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\beta b^2}$ . Setzen wir  $\gamma = b \cdot (a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{5})$ , so ist

$$|\gamma| = b|a - \frac{b}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{5}| = b^2|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\beta}.$$

Die  $\gamma$  definierende Gleichung schreiben wir um:

$$a - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{5} + \frac{\gamma}{b}$$

und quadrieren sie:

$$a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 = \frac{5}{4}b^2 + \gamma\sqrt{5} + \frac{\gamma^2}{b^2}.$$

also

$$a^2 - ab - b^2 = \gamma\sqrt{5} + \frac{\gamma^2}{b^2}.$$

Die linke Seite kann nicht Null sein, denn sonst wäre  $\frac{a}{b}$  eine Nullstelle des Polynoms  $X^2 - X - 1$ , aber dessen Nullstellen sind  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , also nicht rational. Daher ist

$$1 \leq |\gamma\sqrt{5} + \frac{\gamma^2}{b^2}| \leq |\gamma|\sqrt{5} + \frac{\gamma^2}{b^2} < \frac{1}{\beta}\sqrt{5} + \frac{\delta^2}{b^2},$$

also

$$1 - \frac{1}{\beta}\sqrt{5} < \frac{1}{\beta^2 b^2},$$

Wir setzen  $\beta > \sqrt{5}$  voraus, also  $1 > \frac{1}{\beta}\sqrt{5}$ , daher ist  $0 < 1 - \frac{1}{\beta}\sqrt{5} = \frac{1}{\beta^2}(\beta^2 - \beta\sqrt{5})$ . Wir erhalten

$$b^2 < \frac{1}{\beta^2 - \beta\sqrt{5}}.$$

Wir sehen also:  $b$  ist betragsmäßig beschränkt: es gibt also nur endlich viele mögliche  $b$  und demnach auch nur endlich viele mögliche Brüche  $\frac{a}{b}$ .

### 6.7. Die Hurwitz-Ungleichung

$$|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}.$$

können wir auch in folgender Form schreiben:

$$|b\alpha - a| < \frac{1}{\sqrt{5}b}.$$

**(a)** Ist  $\alpha$  irrational, und  $\epsilon > 0$ , so gibt es  $b \in \mathbb{N}$ , sodass im Intervall  $]b\alpha - \epsilon, b\alpha + \epsilon[$  eine ganze Zahl liegt.

Beweis: Wähle  $[a, b] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  mit  $|b\alpha - a| < \frac{1}{\sqrt{5}b}$  und  $b$  genügend groß, genauer:  $b > \frac{1}{\sqrt{5}\epsilon}$ . Dann ist  $|b\alpha - a| < \epsilon$ . Die ganze Zahl  $a$  liegt also im Intervall  $]b\alpha - \epsilon, b\alpha + \epsilon[$ .

**(b) Irrationalitätskriterium.** Eine reelle Zahl  $\alpha$  ist genau dann irrational, wenn die Ungleichung  $|b\alpha - a| < \frac{1}{b}$  unendlich viele teilerfremde Lösungen  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  hat.

Beweis: Ist  $\alpha$  irrational, so wissen wir, wie man unendlich viele derartige Lösungen findet. Sei umgekehrt  $\alpha$  rational, also etwa  $\alpha = \frac{u}{v}$ . Gesucht sind Lösungen von  $|b\frac{u}{v} - a| < \frac{1}{b}$ , also  $|bu - av| < \frac{v}{b}$ .

Ist  $bu - av = 0$ , so ist  $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ , dies ist natürlich eine Lösung. Für jede andere Lösung gilt

$$1 \leq |bu - av| < \frac{v}{b},$$

also  $b < v$ . Es gibt aber sicher nur endlich viele Brüche  $\frac{a}{b}$  mit Nenner  $1 \leq b < v$ , für die  $|\frac{u}{v} - \frac{a}{b}| < 1$  gilt, hier wird aber sogar  $|\frac{u}{v} - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$  verlangt.

**6.8.** Den Satz von Hurwitz können wir folgendermaßen umformulieren: *Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$  irrational, so gibt es unendlich viele  $\frac{a}{b}$  sodass  $\alpha$  in jedem Intervall*

$$\left] \frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{5}b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{5}b^2} \right[$$

*liegt.* In 6.6 haben wir gesehen: Ist  $\beta > \sqrt{5}$ , so gibt es irrationale Zahlen  $\alpha$ , die nur in endlich vielen Intervallen

$$\left] \frac{a}{b} - \frac{1}{\gamma b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{\gamma b^2} \right[$$

liegen. Für  $\gamma = 4$  gilt sogar:

**Satz.** *Die Zahl  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  liegt in keinem der Intervalle*

$$\left] \frac{a}{b} - \frac{1}{4b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{4b^2} \right[ ,$$

mit  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ .

Beweis: Angenommen, es gäbe  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{4b^2} < \frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{a}{b} + \frac{1}{4b^2}.$$

Multiplikation mit  $b$  liefert

$$a - \frac{1}{4b} < \frac{1}{2}\sqrt{2}b < a + \frac{1}{4b}.$$

Offensichtlich muss  $a$  positiv sein: Wäre  $a \leq 0$ , so liefert die rechte Ungleichung  $\frac{1}{2}\sqrt{2}b < \frac{1}{4b}$ , also  $b^2 < \frac{\sqrt{2}}{4}$ , aber  $b \geq 1$ .

Die linke Ungleichung liefert  $a < (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{4})b < b$ , denn  $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,707$ .

Da  $a$  positiv ist, ist  $1 < 4ab$ , also  $\frac{1}{4b} < a$ . Demnach handelt es sich hier um Ungleichungen mit drei positive Zahlen, durch Quadrieren erhalten wir entsprechende Ungleichungen:

$$a^2 - \frac{a}{2b} + \frac{1}{16b^2} \leq \frac{1}{2}b^2 \leq a^2 + \frac{a}{2b} + \frac{1}{16b^2}$$

Wir subtrahieren  $a^2$  und multiplizieren mit 2:

$$-\frac{a}{b} + \frac{1}{8b^2} \leq b^2 - 2a^2 \leq \frac{a}{b} + \frac{1}{8b^2}.$$

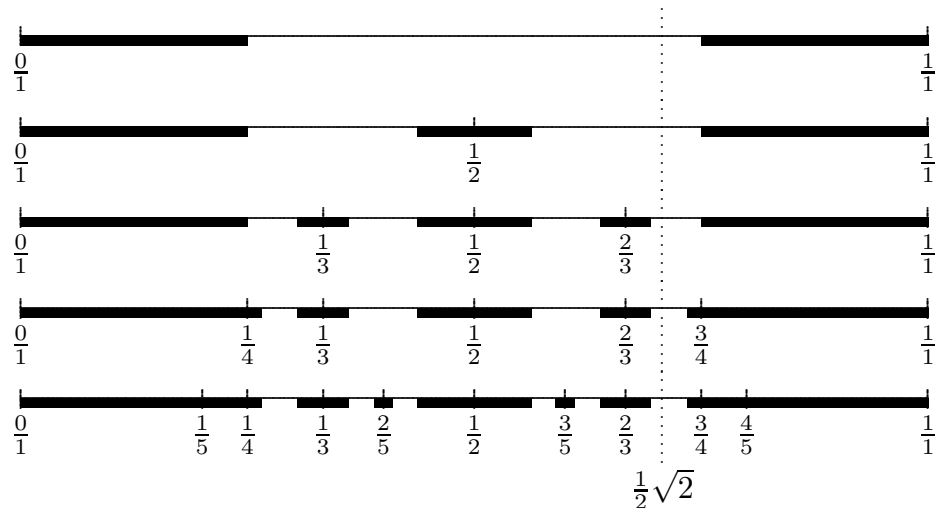
Wegen  $a < b$  sehen wir

$$-1 < -\frac{a}{b} < -\frac{a}{b} + \frac{1}{8b^2}, \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} + \frac{1}{8b^2} < \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \leq 1.$$

Insgesamt erhalten wir

$$-1 < b^2 - 2a^2 < 1.$$

Da  $b^2 - 2a^2$  eine ganze Zahl ist, ist  $b^2 - 2a^2 = 0$ , also  $\frac{b^2}{a^2} = 2$ . Dies widerspricht aber der Irrationalität von  $\sqrt{2}$ .



**Zusatz.** Es gibt viele mathematische Aussagen, die Überdeckungen der rationalen Zahlen durch offene Intervalle betreffen, und die sehr überraschend sind. Im Rahmen der **Maßtheorie** lernt man folgendes Beispiel: Bekanntlich ist die Menge der rationalen Zahlen (oder auch die der rationalen Zahlen im Einheitsintervall  $I$ ) abzählbar. Sei also  $q_1, q_2, \dots$  eine derartige Abzählung der rationalen im Einheits-Intervall  $I$ . Betrachte die Vereinigung der folgenden Intervalle:

$$U_1 = ]q_1 - \frac{1}{8}, q_1 + \frac{1}{8}[ , \quad U_2 = ]q_2 - \frac{1}{16}, q_2 + \frac{1}{16}[ , \quad U_3 = ]q_3 - \frac{1}{32}, q_3 + \frac{1}{32}[ , \dots$$

(also  $U_i = ]q_i - \frac{1}{2^{i+2}}, q_i + \frac{1}{2^{i+2}}[$ ). Das  $i$ -te Intervall  $U_i$  hat die Länge  $\frac{1}{2^{i+1}}$ , also das "Borel-Maß"  $\mu(U_i) = \frac{1}{2^{i+1}}$ . Die Vereinigung  $U = \bigcup_i U_i$  hat demnach das Borel-Maß

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}.$$

Das Komplement  $I \setminus U$  hat demnach das Maß

$$\mu(I \setminus U) = \mu(I) - \mu(I \cap U) = 1 - \mu(I \cap U) \geq 1 - \mu(U) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Es ist also  $I \setminus U$  eine (abgeschlossene) Menge, die nur aus irrationalen Zahlen besteht, und die "messbar" ist, mit Maß  $\mu(I \setminus U) \geq \frac{1}{2}$ . (Wir haben hier zwei wichtige Eigenschaften des Borel-Maßes verwendet: Die (Sub-)Additivität für abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen und die Additivität für komplementäre messbare Mengen).

**6.9.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ , Wir betrachten die Zahlen

$$n\alpha - [n\alpha] \in [0, 1[ = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r < 1\}.$$

Ist  $\alpha = \frac{u}{v}$  mit  $(u, v) = 1$ , so erhält man als  $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$  eine der Zahlen  $0, \frac{1}{v}, \frac{2}{v}, \dots, \frac{v-1}{v}$ , also nur endlich viele Werte. Dagegen gilt:

**Satz (Kronecker).** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  irrational, sei  $0 \leq \beta < 1$  beliebig, und  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$|n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor - \beta| < \epsilon.$$

(Das heißt: die Zahlen  $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$  liegen im Intervall  $[0, 1[$  dicht. (Wir betrachten hier die ganzzahligen Vielfachen  $n\alpha$  von  $\alpha$  und eine vorgegebene Zahl  $\beta$  und sehen, dass die Differenz  $n\alpha - \beta$  in  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  beliebig klein wird: Es gibt zu jedem  $\epsilon > 0$  ganze Zahlen  $a, n$  mit  $n > 0$  und  $|n\alpha - \beta - a| < \epsilon$ .)

Beweis: Nach 6.7 (a) gibt es  $b \in \mathbb{N}$ , sodass im Intervall  $]b\alpha - \epsilon, b\alpha + \epsilon[$  eine ganze Zahl  $a$  liegt, also ist  $|b\alpha - a| < \epsilon$ .

Ist  $b\alpha > a$ , so ist  $\lfloor b\alpha \rfloor = a$ , und  $b\alpha - \lfloor b\alpha \rfloor < \epsilon$ . Die Folge der Zahlen

$$b\alpha - \lfloor b\alpha \rfloor, 2b\alpha - \lfloor 2b\alpha \rfloor, 3b\alpha - \lfloor 3b\alpha \rfloor, \dots$$

ist aufsteigend und liefert Punkte im Intervall  $[0, 1[$  mit jeweiligem Abstand  $< \epsilon$ . Zu  $\beta$  gibt es ein  $t$  mit

$$(t-1)b\alpha - \lfloor (t-1)b\alpha \rfloor \leq \beta \leq tb\alpha - \lfloor tb\alpha \rfloor,$$

also wähle  $n = tb$ .

Ist  $b\alpha < a$ , so ist  $\lfloor b\alpha \rfloor = a - 1$ . Auch hier betrachten wir die Folge der Zahlen

$$b\alpha - \lfloor b\alpha \rfloor, 2b\alpha - \lfloor 2b\alpha \rfloor, 3b\alpha - \lfloor 3b\alpha \rfloor, \dots,$$

diesmal ist dies eine absteigende Folge. Sie liefert wieder Punkte im Intervall  $[0, 1[$  mit jeweiligem Abstand  $< \epsilon$ . Zu  $\beta$  gibt es ein  $t$  mit

$$tb\alpha - \lfloor tb\alpha \rfloor \leq \beta \leq (t-1)b\alpha - \lfloor (t-1)b\alpha \rfloor,$$

also wählen wir wieder  $n = tb$ .

Das Intervall  $[0, 1[$  kann man (und sollte man) mit der Faktorgruppe  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  identifizieren, und zwar vermöge der Abbildung

$$f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad \text{mit } f(t) = \exp(2\pi it) \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Bekanntlich ist dies ein Gruppen-Homomorphismus. Das Bild dieser Abbildung ist der Einheitskreis

$$S^1 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

dies ist eine Untergruppe von  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ . Der Kern ist die Untergruppe  $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$ .