Routine-Zettel 3

1. Man gebe ein $n \in \mathbb{N}$ an, so dass keine der Zahlen $n, n+1, \dots, n+1000$ eine Primzahl ist.
2. Seien $p_1 < p_2 < \dots < p_5$ Primzahlen, sei $e_i \in \mathbb{N}$ für alle i , sei $n = p_1^{e_1} \dots p_5^{e_5}$. Man bestimme die Anzahl der Teiler d von n mit $\mu(d) = 1$.
3. Man gebe alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}/4, +) \times (\mathbb{Z}/2, +)$ an.
4. Wieviele Elemente der Ordnung 2 besitzt $C_{24} \times C_{16} \times C_{12} \times C_9$?
5. Bekanntlich sind die Gruppen $(\mathbb{Z}/8)^*$ zu $C_2 \times C_2$ isomorph. Wieviele Gruppen-Isomorphismen $C_2 \times C_2 \rightarrow (\mathbb{Z}/8)^*$ gibt es?

Kleine Beweise

6. Seien $x, y, n \in \mathbb{N}$ mit $x^2 + y^2 = n$. Zeige: (a) Ist n quadratfrei, so ist $(x, y) = 1$. (b) Gilt auch die Umkehrung? (Ist $(x, y) = 1$, so ist n quadratfrei.)
7. Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ mit $p|n$. Zeige $\phi(pn) = p\phi(n)$.
8. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $\binom{2n}{n}$ ist keine Quadratzahl.
9. Zeige: Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat genau dann eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n eine Quadratzahl ist.
10. Zeige: Ist $n \geq 4$, so ist $\mu(\frac{1}{2}n!) = 0$.
11. Definiere $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $f(2^t q) = t$ für q ungerade. Zeige: f ist multiplikativ.
12. Sei $g(n)$ ist die Anzahl der Restklassen $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n$ mit $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$. Zeige: g ist eine multiplikative Funktion.
13. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Es gibt höchstens eine Untergruppe von K^* , die die Ordnung n besitzt.
14. Man beweise, dass $(\mathbb{Z}/1024)^*$ nicht zyklisch ist.
15. Sei p ungerade Primzahl. Zeige: $\sum_{j=1}^{p-1} \binom{j}{p} = 0$.
16. Sei $p > 2$ Primzahl. Zeige: Ist g Primitivwurzel modulo p , so ist $\left(\frac{g}{p}\right) = -1$.

1. Exhibit a number $n \in \mathbb{N}$, such that none of the numbers $n, n+1, \dots, n+1000$ is a prime.
 2. Let $p_1 < p_2 < \dots < p_5$ be prime numbers, let $e_i \in \mathbb{N}$ for all i , let $n = p_1^{e_1} \cdots p_5^{e_5}$. What is the number of divisors d of n with $\mu(d) = 1$.
 3. Exhibit all subgroups of $(\mathbb{Z}/4, +) \times (\mathbb{Z}/2, +)$.
 4. How many elements of order 2 are in the group $C_{24} \times C_{16} \times C_{12} \times C_9$?
 5. We know that the groups $(\mathbb{Z}/8)^*$ zu $C_2 \times C_2$ are isomorphic. How many group isomorphisms $C_2 \times C_2 \rightarrow (\mathbb{Z}/8)^*$ do exist?
-

Short arguments

6. Let $x, y, n \in \mathbb{N}$ with $x^2 + y^2 = n$. Show: (a) If n is squarefree, then $(x, y) = 1$. (b) Is the converse also true? (If $(x, y) = 1$, then n is squarefree.)
7. Let p be a prime and $n \in \mathbb{N}$ such that $p|n$. Show that $\phi(pn) = p\phi(n)$.
8. Let $n \in \mathbb{N}$. Show that $\binom{2n}{n}$ is not a square.
9. Let $n \in \mathbb{N}$. Show: n has an odd number of divisors, if and only if n is a square.
10. Show: If $n \geq 4$, then $\mu(\frac{1}{2}n!) = 0$.
11. Define $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ by $f(2^t q) = t$ for q odd. Show that f is multiplicative.
12. Let $g(n)$ be the number of residue classes $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n$ such that $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$. Show that g is a multiplicative function.
13. Let K be a field, $n \in \mathbb{N}$. Show that there is at most one subgroup of K^* , which has order n .
14. Show that $(\mathbb{Z}/1024)^*$ is not cyclic.
15. Let p be an odd prime. Show that $\sum_{j=1}^{p-1} \binom{j}{p} = 0$.
16. Let $p > 2$ be a prime. Show: If g is a primitive root modulo p , then $\binom{g}{p} = -1$.