## Routine-Zettel 4

**1.** Man gebe Farey-Nachbarn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (gekürzt) an, für die $b, d > 4$ und

$$\tfrac{a}{b} < \tfrac{1}{4}\sqrt{10} < \tfrac{c}{d}$$

gilt. (Hinweis: $\frac{1}{4}\sqrt{10} \approx 0,79057.$)

**2.** Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Farey-Nachbarn (gekürzt). Zeige: $(b, d) = 1$.

**3.** Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ Farey-Nachbarn.

(a) Sind dann auch $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ Farey-Nachbarn?

(b) Zeige: Es ist $\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$.

(c) Die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ seien gekürzt. Ist dann auch $\frac{a+e}{b+f}$ gekürzt?

**4.** Wieviele Elemente besitzt die Farey-Folge $\mathcal{F}_{10}$ ?

---

**5.** Man schreibe 377 auf zwei wesentlich verschiedene Weisen als Summe von zwei Quadraten. (Hinweis: $377 = 13 \cdot 29$).

**6.** Man entscheide, welche der folgenden Zahlen sich als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen schreiben lassen (eine explizite Summendarstellung wird nicht erwartet):

$$11\,000, 12\,000, 13\,000, 14\,000, 15\,000, 16\,000, 17\,000, 18\,000, 19\,000, 20\,000.$$

**7.** Sei $p$ Primzahl mit $p \equiv 3 \mod 4$. Folgere aus dem Satz von Wilson, dass gilt

$$\big(\frac{p-1}{2}!\big)^2 \equiv 1 \mod p.$$

**8.** Zeige: die folgende Menge ist unter Multiplikation nicht abgeschlossen:

$$\{n \mid \text{ es gibt } x, y \in \mathbb{N} \text{ mit } x^4 + y^4 = n\}$$

**9.** Sei $Q = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Zeige: Ist $n \in Q$, so ist $7n \notin Q$.

**10.** Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Gesucht sind ganze Zahlen $a, b$ mit $a^2 + b^2 = 17(x^2 + y^2)$.

**11.** Man zeige: Jede natürliche Zahl $n$ lässt sich in der Form $n = x^2 + y^2 - z^2$ mit ganzen Zahlen $x, y, z$ schreiben.

---

**12.** Man zeige: $\sqrt{17}$ ist irrational.

**1.** Exhibit Farey neighbors $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (in reduced form), with $b, d > 4$ and

$$\tfrac{a}{b} < \tfrac{1}{4}\sqrt{10} < \tfrac{c}{d}$$

(Note: $\frac{1}{4}\sqrt{10} \approx 0,79057.$)

**2.** Let $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ be Farey neighbors (reduced). Show that $(b, d) = 1$.

**3.** Let $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ and $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ be Farey neighbors.

(a) Are $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ Farey neighbors?

(b) Show that $\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$.

(c) Assume that the fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ are in reduced form. Is $\frac{a+e}{b+f}$ always reduced?

**4.** What is the number of elements of the Farey sequence $\mathcal{F}_{10}$ ?

---

**5.** Write 377 in two essentially different ways as sum of two squares. (Hint: $377 = 13 \cdot 29$)

**6.** Which of the following numbers can be written as sums of the squares of two integers? (You are not asked to write these numbers as sums of squares)

$$11\,000, 12\,000, 13\,000, 14\,000, 15\,000, 16\,000, 17\,000, 18\,000, 19\,000, 20\,000.$$

**7.** Let $p$ be a prime with $p \equiv 3 \mod 4$. Use the theorem of Wilson in order to show that

$$\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv 1 \mod p.$$

**8.** Show that the following set of integers is not closed under multiplication:

$$\{n \mid \text{ there is } x, y \in \mathbb{N} \text{ with } x^4 + y^4 = n\}$$

**9.** Let $Q = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Show: If $n \in Q$, then $7n \notin Q$.

**10.** Let $x, y \in \mathbb{Z}$. Exhibit integers $a, b$ with $a^2 + b^2 = 17(x^2 + y^2)$.

**11.** Show: Every natural number $n$ can be written in the form $n = x^2 + y^2 - z^2$ with integers $x, y, z$.

---

**12.** Show that $\sqrt{17}$ is irrational.