A. N. Whitehead über die Lehre der Mathematik (nach *The Aims of Education*)

(Philipp Fahr)

Vortragsskript zum Whitehead Kolloqiuum
Bielefeld, 18. November 2006

Inhaltsverzeichnis

1 The Mathematical Curriculum & An Introduction to Mathematics

Sinn von Bildung und Erziehung, schreibt Whitehead 1929 in seiner Einleitung zu *The Aims of Education*, sei das Anleiten und Stimulieren der Eigenentwicklung jedes einzelnen. Ganz besonders unterstreicht das sechste Kapitel diesen Ansatz, in dem es um das mathematische Curriculum an Hochschulen geht. Auf dem *International Congress of Mathematicians* in Cambridge hielt er im Jahr 1912 diese Rede, wo er mit der allgemeinen Beschreibung von Nicht-Mathematikern beginnt, die die Mathematik oft als schwer verständlich, tiefgründig und abstrus bzw. dunkel beschreiben. Whitehead schlägt daher eine gewisse Reform des mathematischen Unterrichtes vor, um Studenten die Furcht vor der Mathematik zu nehmen. Mathematik sollte mit möglichst wenigen allgemeinen Ideen von großer Bedeutung und Folgerung vorgestellt und in Erscheinung treten.

Ein Student sollte sich schrittweise an abstraktes Gedankengut gewöhnen und dann erkennen, wie dieses in bestimmten Situationen konkrete Anwendung findet. Eine Anreihung eines mathematischen Satzes nach dem anderen sei zu vermeiden. Vielmehr sollte jedem abstrakten Gedanken, jedem Satz, ein Beispiel folgen. Und Beispiele könne es nicht genügend geben, so viele wie möglich, solange sie der direkten Illustrierung eines mathematischen Satzes und Sachverhaltes dienen.

Natürlich, die wichtigsten Ideen der Mathematik sind abstrakter Natur, aber sie sind nicht unbedingt schwer verständlich. Die Studenten müssen den Umgang mit abstrakten Gedanken lernen und immer wieder üben. Eine Ansammlung von mathematischen Details hingegen ist für Whitehead zwecklos. Er kritisiert vor allem die an englischen Universitäten übliche Art, Examina zu schreiben, wo Studenten meist nur Auswendiggelerntes wiederzugeben haben.

Whitehead zählt einige Beispiele auf, wie man ein bestimmtes mathematische Thema unterrichten sollte, zum Beispiel, was der Sinn und Zweck vom Malen von Kurven in der Analysis ist (Kurven können zur Darstellung von physikalischen Gesetzen dienen, wie z.B. wenn man sich die trigonometrischen Funktionen anschaut). Gesetzmäßigkeiten der Natur entdecken und zu untersuchen, sowie mit abstrakten und allgemeinen Ideen umgehen zu können, sind für Whitehead die beiden wichtigsten Aspekte, die im mathematischen Lehrplan Beachtung finden sollten. Ein weiterer Punkt ist der der *logischen Methodik*.

Whitehead meint damit mehr als nur das Kennen verschiedener Beweisverfahren, denn niemand könne ein logisch Denkender sein, solange er nicht durch permanente Übung die Wichtigkeit von großen Ideen verstanden hat und an ihnen verbissen festhält. Und dafür sei, so Whitehead, die Geometrie besser geeignet als die Algebra (dies sagt Whitehead 1912 in den Principia Mathematica (1910-1913), während er mit Bertrand Russel den Versuch einer vollständigen Algebraisierung der Mathematik unternahm).

Geometrische Objekte sind im ersten Schritt einfacher zu handhaben, als algebraische Objekte und deren Realisierungen, auch wenn das Rechnen mit Variablen nach einiger Übung leicht fallen mag. Ein schönes Beispiel stellt der Satz des Pythagoras dar. Dem Verhältnis zwischen Algebra und Geometrie hat bereits C.M. Ringel einen Vortrag gewidmet [3]. Dem Reiseführermotto "Man sieht nur, was man weiß" hat Ringel hinzugefügt: "Man versteht nur, was man auch sieht." Daher kann die Formelsprache, also die Algebra, als Reiseführer für Geometer dienen, während die Geometrie der Sichtbarmachung durch Bilder und Diagramme dient, die dem Verständnis förderlich sind.

Whitehead zeigt dies deutlich anhand des damaligen Lehrplans zur Trigonometrie: In Amerika war es üblich Studenten bis zu 90 trigonometrische Formeln, z.B. die Summensätze von Sinus und Cosinus auswendig lernen zu lassen. Keine dieser Formeln dient der besseren Vorstellung. Wenn man aber die Funktionen zeichnet, kann man schnell Gesetzmäßigkeiten und Formeln herleiten.

Ein Wort zu Platon (427-347 v.Chr.), der anfänglich politische Ambitionen hatte: Er gründete im Jahre 387 seine Akademie in Athen, die eher einer Universität in unserem Sinne glich. Sie bestand 900 Jahre, bis Kaiser Justinian sie im Jahre 529 n.Chr. schloß, weil dort angeblich eine *perverse Lehre* – nämlich Wissenschaft und Philosophie – verbreitet wurde. In der klassischen Periode dieser Akademie wurden hier mathematische und philosophische Studien favorisiert: Mathematik, Philosophie, Musik und Astronomie waren seit Pythagoras (580-500 v.Chr.) nicht voneinander getrennt, sondern gehörten zusammen. Platon selber hat sich zwar nicht alleine auf Mathematik konzentriert, aber sein Enthusiasmus für die reine Mathematik und sein Glaube an die Bedeutung der Mathematik für die Philosophie und das Verständnis des Universums zog hervorragende Mathematiker an seine Akademie: Fast die gesamte Mathematik des vierten Jahrhunderts vor Christus wurde von Freunden und Schülern Platons entwickelt. Über den Eingang der Akademie hat er folgende Worte meißeln lassen:

ES TRETE KEIN DER GEOMETRIE UNKUNDIGER EIN

Die philosophische Haltung Platons zur Mathematik basiert auf den folgenden Axiomen:

1. Mathematische Konzepte sind unabhängig von Erfahrung,

2. sie haben eine eigene Realität – sie sind also unabhängig von der Realität des Lebens, also von der "realen Realität",

3. sie sind entdeckt und nicht erfunden – entdeckt werden kann nur etwas, was schon vorher vorhanden ist, weil es aus den mathematischen Axiomen hergeleitet werden

kann. Es liegt an der Schwäche der Mathematiker, wenn sie noch nicht hergeleitet bzw. entdeckt worden sind. Erfinden dagegen ist ein Prozess, der etwas Neues schafft.

Wenn man die Mathematik genauer betrachtet, sollte man immer im Auge behalten, wie das fruchtbare Zusammenspiel verschiedener Gebiete der Mathematik zur Lösung eines konkreten Problems funktioniert. Schon die alten Griechen wußten, daß man einen Winkel mit Zirkel und unmarkiertem Lineal halbieren kann. Zu Zeit Euklids (um 300 v.Chr.) haben sich die Griechen gefragt, ob man einen allgemeinen Winkel (z.B. 60 Grad) auch mit Zirkel und Lineal **dreiteilen** kann. Bevor man dieses Problem angeht, muß man sich eine Vorstellung davon machen, was man zeigen möchte:

- Wenn man glaubt, das Problem habe eine positive Antwort, dann sucht man nach einer funktionierenden Konstruktion. Dazu probiert man verschiedene Möglichkeiten aus, und wenn man Glück hat, ist eine richtige Lösung darunter. Wenn man allerdings Pech hat, hat man einen falschen Ansatz gemacht, obwohl es eine korrekte Konstruktion gibt.

- Wenn man dagegen meint, das Problem habe eine negative Antwort, müßte man alle möglichen Konstruktionen durchprobieren und von jeder zeigen, daß sie nicht zum Ziel führt – ein unmögliches Unterfangen, wenn man die Vielfalt der Möglichkeiten bedenkt.

Die Beantwortung dieser Frage nach der Dreiteilung eines allgemeinen Winkels hat die Mathematiker immer wieder beschäftigt, und obwohl rein geometrischer Natur, ergibt sich die Antwort aus einer Algebraisierung des Problems durch Wantzel (1837), aufbauend auf den Resultaten von Galois (1811-1832).

Für die Praxis ist dieses Problem irrelevant, denn man kann die Dreiteilung beliebig genau aproximieren. Man kann sie aber auch genau durchführen, wenn man andere Hilfsmittel als Zirkel und Lineal benutzt. Das reicht dann in der Praxis. Als Laie muß man sich die Bedeutung der negativen Beantwortung dieser Frage klar machen: Die mathematische Antwort ist nicht, daß die Mathematiker keine Lösung finden können, sondern sie besagt, daß es *keine* Konstruktion geben kann. Man bedenke, daß die Menge der geometrischen Konstruktionsmöglichkeiten extrem vielfältig ist. Das mathematische Resultat besagt: Ganz egal, welche Konstruktionsmethode man anwendet, keine dieser Methoden kann einen beliebigen Winkel, z.B. den von 60 Grad, dreiteilen.

In Whiteheads Buch *An Introduction to Mathematics* [7], welches 1911 veröffentlicht wurde, hält Whitehead sich an seine eigenen Vorgaben bezüglich der Didaktik der Mathematik. Die ersten vier Kapitel sind sehr anwendungsbezogen mit konkreten Beispielen und Bildern, die allgemeine physikalische Gesetze illustrieren. Dazu erzählt er die Geschichte der Mathematik von den alten Griechen bis Galileo. Erst im fünften Kapitel (nach 39 Seiten) fängt er an, mit Symbolen zu hantieren und algebraische Strukturen einzuführen. Im Anhang hat er eine Notiz zum Lernen von Mathematik angefügt, wo er klar beschreibt, wie man zu Anfang in der Mathematik vorgehen sollte: Als erstes sollte man elementare Geometrie lernen und elementare Algebra, wobei die Algebra auch grafisch illustriert werden sollte. Dann sollte man sich der Trigonometrie und den Kegelschnitten widmen. Erst wenn diese beherrscht werden, sollte man sich Dingen wie Differentialgleichungen und Integralen widmen. Genau so geht er in seinem Skript vor. Den Lesern macht er mit dem Buch aber nicht unbedingt viel Mut: Der erste Satz im ersten Kapitel lautet: *Das Lernen der Mathematik neigt dazu, mit Enttäuschung und Misserfolg zu beginnen.* Meine persönliche Erfahrung allerdings ist die, daß je mehr Mathematik man betreibt, desto weniger versteht man von ihr, aber desto mehr erfährt man von und über die Welt.

Interessant ist auch das kurze Kapitel 12 des Buches *An Introduction to Mathematics*, in dem es um Periodizität in der Natur geht. Whitehead beschreibt dort viele Phänomene wie den Tag-Nacht- und den Ebbe-Flut-Rhythmus und deutet an, wie sehr auch unser Körper durch Herzschlag und Atmung von sich wiederholenden Vorgängen geprägt ist. Auch ein Satz wie "dies ist schon einmal geschehen" sitzt tief in uns. Natürlich dient dieses kurze Kapitel nur als Überleitung zum Thema Trigonometrie, ein Gebiet, welches auf die griechischen Astronomen Hipparch (geboren um 160 v.Chr.) und Ptolemäus (100-180 n.Chr.) zurückgeht. Im Unterschied zu Kegelschnitten, deren Ursprung ein theoretischer ist, brauchte man die Trigonometrie, um astronomische Wissenschaft zu betreiben. Doch Kegelschnitte wurden ca. 150 Jahre vorher entdeckt.

Ich sehe die Mathematik eher als eine Geisteswissenschaft und die Mathematiker als Geisteswissenschaftler. Der Ausspruch von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat auch heute noch Bedeutung:

MATHEMATIK IST DIE KÖNIGIN DER WISSENSCHAFTEN
UND ZAHLENTHEORIE IST DIE KÖNIGIN DER MATHEMATIK.

Das folgende Beispiel von P. Halmos soll die Schönheit von mathematischen Denkweisen zeigen (siehe auch [5]): Stellen wir uns ein Sportturnier vor, etwa eine Fußball Weltmeisterschaft. Nehmen wir einmal an, daß es in jeder Spielrunde immer nur einen Sieger und einen Verlierer gibt, d.h. das Team, das verloren hat, scheidet aus. Gegeben seien n Teams.
Frage: Wie viele Spiele sind durchzuführen, um den Sieger festzustellen?
Anhand des Beispiels von $n = 32$ Teams, wie bei einer Fußball-WM, sollen drei Lösungswege besprochen werden:

1. Ein Naivling würde wie folgt vorgehen, indem er die zu absolvierenden Spiele aufschreiben würde:

   (a) In der 1. Runde sind 16 Spiele zu absolvieren.
   (b) In der 2. Runde sind 8 Spiele zu absolvieren.
   (c) In der 3. Runde sind 4 Spiele zu absolvieren.
   (d) In der 4. Runde sind 2 Spiele zu absolvieren.
   (e) In der 5. Runde ist noch 1 Spiel zu absolvieren.

   Insgesamt sind also $16+8+4+2+1 = 31$ Spiele zu absolvieren, bis man den Sieger ermittelt hat. Bei dieser Methode muß man rechnen. Man kann natürlich auch ein Computerprogramm dazu schreiben.

2. Ein Mathematikstudent im ersten Jahr würde vielleicht mit folgender Idee kommen: Bei jeder Runde halbiert sich die Anzahl der Spieler. Das geht natürlich nur, wenn die Anzahl der Spieler eine Zweier-Potenz ist, d.h. $n = 2^m$. In diesem Fall haben wir $32 = 2^5$. Man kann also schließen, daß insgesamt

   $$16+8+4+2+1 \text{ allgemein } \sum_{i=0}^{m-1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1+2+4+8+16$$

   Spiele durchgeführt werden. Jetzt kann er eine gelernte Formel anwenden, denn es gilt

   $$\sum_{i=0}^{m-1} 2^i = 2^m - 1 = n - 1, \text{ da } n = 2^m = 2^5 = 32 \text{ gewählt wurde.}$$

Insgesamt sind also bei $2^m = 32$ Teams genau $2^m - 1 = 32 - 1 = 31$ Spiele durchzuführen, um den Sieger festzustellen. Natürlich gilt dieses Verfahren nur für Zweier-Potenzen an Teams. In diesem Fall jedoch, wie schon beim ersten Lösungsweg, erhält man eine korrekte Antwort, wenn auch vielleicht der Kern des Problems nicht erkannt wurde (man denke an große ungerade Zahlen an Teams).

3. Der Mathematiker denkt zuerst und sagt dann: *Das ist ganz einfach. Alle, außer dem Gewinner verlieren.* Also sind $n - 1 = 32 - 1 = 31$ Spiele durchzuführen.

Die letzte Lösung ist besonders schön, da sie ein Problem löst, das scheinbar mit Rechnen zu tun hat, indem überhaupt nicht gerechnet werden mußte. Außerdem gilt sie allgemein, unabhängig von der Zahl der Teams (ob eine Zweier-Potenz oder nicht). Das ist natürlich die eleganteste und allgemeinste Lösung.

Es ist wohl einer der wichtigsten Aspekte mathematischer Forschung, *konkrete* Probleme zu lösen. Diese können aus der Mathematik selber kommen oder sind von außen, z.B. aus der theoretischen Physik oder aus dem Leben allgemein, an die Mathematiker herangetragen worden. Für einen Mathematiker liegt aber die Bedeutung eines Problems im Allgemeinen nicht in den Folgen der Lösung für die Anwendungen, sondern ein Problem wird dadurch attraktiv, daß es *interessant* ist. Das hängt natürlich vom jeweiligen Geschmack eines Mathematikers ab. Es wird aber auch dadurch interessant, daß es schon vielen Lösungsversuchen standgehalten hat. Für den Mathematiker ist ein mathematisches Problem eine Herausforderung, und der Versuch einer Lösung ist das Messen der geistigen Kräfte. Die Lösung eines speziellen mathematischen Problems führt dabei oft zur Entwicklung von neuen Theorien, die dann auch anderen Gebieten der mathematischen Forschung neue Impulse geben.

Die meisten Menschen sind vermutlich überzeugt davon, daß es sich ganz gut ohne mathematische Kenntnisse leben läßt und daß diese Wissenschaft unwichtig genug ist, um sie den Wissenschaftlern zu überlassen. Viele hegen sogar den Verdacht, daß es sich dabei um eine brotlose Kunst handelt, deren Nutzen keineswegs auf der Hand liegt. In diesem Irrtum dürfen sie sich bestärkt fühlen durch die Ansichten mancher Mathematiker, die mit starken Worten die Reinheit ihres Schaffens verteidigen. Der eminente englische Zahlentheoretiker Godfrey Harold Hardy, legte folgendes berühmte Bekenntnis ab:

“Ich habe nie etwas gemacht, was ’nützlich’ gewesen wäre. Für das Wohlbefinden der Welt hatte keine meiner Entdeckungen – ob im Guten oder Schlechten – je die geringste Bedeutung, und daran wird sich auch vermutlich nichts ändern. Ich habe mitgeholfen, andere Mathematiker auszubilden, aber Mathematiker von derselben Art, wie ich einer bin, und ihre Arbeit war, zumindest soweit ich sie dabei unterstützt habe, so nutzlos wie meine eigene. Nach allen praktischen Maßstäben ist der Wert meines mathematischen Lebens gleich Null, und außerhalb der Mathematik ist es ohnehin trivial. Ich habe nur eine Chance dem Verdikt vollkommener Trivialität zu entgehen, und zwar dadurch, daß man mir zugesteht, etwas geschaffen zu haben, was sich zu schaffen lohnte. Daß ich etwas geschaffen habe, ist nicht zu bestreiten; die Frage ist nur, ob es etwas wert ist.”
(P. Halmos, A Mathematician’s Apology, Cambridge 1967.)

Seine Haltung ähnelt der von Künstlern und Musikern. Unter rein betriebswirtschaftlichen Gesichtspunkten hätten es nicht nur Ovid und Bach schwer gehabt, sondern auch Pythagoras und Cantor.

Für Whitehead ist wichtig, daß jedes Fachgebiet in abstrakter und konkreter Form gut präsentiert wird. Beide Seiten sind wünschenswert, weil wir in abstrakter Weise lernen, aber in konkreter Form fühlen. Die Kunst ist es, Abstraktes konkret werden zu lassen und Konkretes abstrakt formulieren zu können.

In diesen frühen Vorträgen Whiteheads zur Mathematik gibt es noch keine Andeutung dahingehend, daß die Mathematik die Aufgabe hat, den Blick für die Probleme der Metaphysik zu öffnen. Dies kommt erst viel später in seinem Vortrag *Die Mathematik und das Gute*, wie es Prof. Herrmann andeutete, denn natürlich ist es Aufgabe der Erziehung, den Einzelnen hinzuführen zum Guten der Welt.

2 Universities and Their Function

Diese Rede hielt Whitehead viel später, erst im Jahr 1928, ein Jahr also bevor *The Aims of Education* veröffentlicht wurde. Das Ereignis war die Eröffnung der Business School and der Universität Harvard in Cambridge, Massachusetts, wo sich Whitehead seit 1924 aufhielt. Er zeigt anhand des Beispiels der Business School, in welcher Weise eine Gesellschaft von den Aktivitäten an ihren Universitäten beeinflusst wird. Natürlich muß er hier betonen, daß niemals in der Geschichte von Universitäten, selbige nur auf abstraktes Lernen ausgerichtet waren. Zum Beispiel diente die erste europäische Universität in Salerno (Italien) der Medizin. Auch die ersten Colleges im englischen Cambridge, waren bei ihrer Gründung um 1300 in erster Linie auf die Ausbildung von Priestern ausgerichtet. Und da die Wirtschaftswissenschaften, wie Whitehead in dieser Rede 1928 sagt, ein hoch intellektueller Berufszweig sei, würde eine Business School gut zur Universität passen.

Wie man ersehen kann, zeichnet dieses Kapitel eher die allgemeine Analyse, wie eine Universität zu sein hat. Ganz allgemein (frei übersetzt) seien Universitäten zugleich Forschungs- und Bildungseinrichtungen. Die Rechtfertigung einer Universität bestehe darin, die Verbindung zwischen Wissen und Tatendrang zu erhalten, indem man Jung und Alt unter einem Dach vereine. Eine Universität vermittele Informationen, aber in einer phantasievollen und erfinderischen Art und Weise. Zumindest diese Funktion sollte eine Universität in der Gesellschaft erfüllen, sonst habe sie keine Existenzberechtigung, schreibt Whitehead.

Eine Tatsache sei eben nicht nur eine Tatsache, sondern sie müsse auf alle möglichen Arten und Weisen untersucht werden, denn die *Imagination*, der Ideenreichtum, kann nicht von den Tatsachen getrennt werden: sie ist eine Art, die Tatsachen zu beleuchten.

Jugend ist voller Imagination, und wenn man diese durch Disziplin stärkt, kann in gewisser Weise dieser Tatendrang und Ideenreichtum ein Leben lang erhalten bleiben. Leider ist es meist jedoch so, daß diejenigen, die einfallsreich und erfinderisch sind, nur wenig Lebenserfahrung besitzen, und jene mit Lebenserfahrung nur einen schwachen Ideenreichtum vorweisen. Daher ist es Aufgabe einer Universität, Imagination und Erfahrung zusammenzuschweißen. Man müsse auch die Freiheit besitzen richtig und falsch denken und die große Vielfalt des Universums würdigen zu dürfen.

Die Universität Harvard wurde von den Auswanderern aus England 1636 gegründet und ist die älteste Universität Amerikas. Benannt wurde sie nach dem ersten Spender, dem damals jungen Theologen John Harvard, der am Emmanuel College in Cambridge graduierte. Natürlich könnte man heute (wir sprechen vom Jahre 1928) viele Fehler in der Organisation einer Universität aufzeigen, sagt Whitehead, aber in der Geschichte ist ihr Erfolg außergewöhnlich (Das erinnert mich daran, daß in Deutschland die Professoren nicht wegen, sondern trotz der Verwaltung auch international so erfolgreich sind). Eine Universität sei (laut Whitehead) entweder erfinderisch oder nichts, jedenfalls nichts Nützliches.

Imagination könne allerdings nicht wie eine Länge oder ein Gewicht gemessen werden. Imagination verhält sich wie eine ansteckende Krankheit, die nur von Lehrbeauftragten übertragen werden könne, die selber voller Tatendrang und Phantasie stecken. Außerdem verlangt die Verbindung von Lernen und Imagination ein gewißes Maß an Freiheit und Freizeit, Freiheit von Zwang und Beschränkung, Freiheit von Sorge und die Stimulierung durch andere Geister mit anderen Gedanken und Meinungen.

Wenn eine Universität einfallsreiche Hochschullehrer haben möchte, dann sollte man sie dazu ermutigen, Forschung zu betreiben. Wenn man einfallsreiche Forscher und Wissenschaftler haben möchte, sollte man sie zum Unterrichten bringen, damit sie mit jungen, voller Tatendrang steckenden Geistern zusammenkommen (Vom Humboldtschen Ideal sind heutzutage die amerikanischen Universitäten weit entfernt).

Whitehead wird dann noch pathetisch: Bildung ist der Wissenszweig zum Abenteuer Leben; Forschung ist intellektuelles Abenteuer, und Universitäten sollten die Heimat von Abenteuern sein, die gemeinsam von jung und alt begangen werden. Wissen verfault genauso wie alter Fisch, daher sollte Wissen den Studenten vermittelt werden, als würde es eben erst frisch aus dem Meer gefischt.

Auf keinen Fall dürfte der Erfolg und Output origineller Ideen einer Universität daran gemessen werden, wie viele Papers und Bücher veröffentlicht wurden, denn es ist allgemein bekannt, daß oft die besten Lehrer nicht diejenigen sind, die auch am meisten veröffentlichen (Sokrates und Jesus haben z.B. nichts schriftlich hinterlassen). Es wäre fatal, Mitglieder einer Fakultät nur an der Zahl der Veröffentlichungen zu messen, wie es heute wieder Mode zu sein scheint. Schon damals, 1928, warnte Whitehead vor diesem Fehler: Nicht die Anzahl der Wörter sei entscheidend, sondern das Gewicht der produzierten Ideen.

Am Ende des Kapitels wird Whitehead dann patriotisch, wohl um seinen Zuhörern an der Business School in guter Erinnerung zu bleiben. Originelle Gedanken sind dem nicht mehr zu entnehmen.

3 Space, Time, and Relativity

Im letzten Kapitel des Buches *The Aims of Education and other essays* widmet sich Whitehead in nicht ganz rigoroser Weise den verschiedenen Betrachtungweisen von Raum und Zeit. Es scheint frühe Gedanken seiner *Ausdehnungslehre* zu enthalten, die C.M. Ringel [4] bereits in einem eigenen Vortrag im Detail ausgearbeitet hat.

Wenn man sagt "die Sonne sei da" (wo auch immer *"da"* ist), dann bestätigt man nur die Verbindung zwischen der Existenz einer Menge von Atomen, die wir Sonne nennen, und einer bestimmten Menge von Punkten, deren Existenz unabhängig von der der Sonne ist. In unserer Wahrnehmung unterscheiden wir zwischen Ereignissen (events) und den Veränderungen, die Ereignisse formen. Dinge (things) haben bestimmte Verbindungen zueinander und man betrachtet diese als Verbindungen zwischen ihrer Ausbreitung im Raum. Zum Beispiel kann ein Raum einen anderen Raum enthalten, oder ihn ausschließen, oder aber auch ihn überschneiden. Ein Punkt im Raum ist nichts anderes als eine Menge von Relationen zwischen räumlichen Ausdehnungen.

Manchmal betrachtet man auch zeitliche Ausdehnung (duration) zwischen Ereignissen, bzw. die Relation zwischen ihren zeitlichen Ausdehnungen. Die zeitliche Ausdehnung von zwei Ereignissen A und B kann hintereinander sein, zeitlich sich überlappen oder kann ineinander enthalten sein. Die Eigenschaften der Ausdehnung eines Ereignisses in der Zeit sind analog zu denen eines Objektes im Raum. Räumliche Ausdehnung wird als Verbindung zwischen Objekten ausgedrückt, zeitliche Ausdehnung als Verbindung zwischen Ereignissen. Wir leben dabei in zeitlicher Ausdehnung und nicht in Punkten.

Natürlich hängt die Beobachtung von Raum und Zeit vom Betrachter ab. Dann beschreibt Whitehead in einem Abschnitt auf S.161, daß man eben doch den experimentellen Psychologen bräuchte. Raum und Zeit sind natürlich notwendig für unsere Erfahrungen in dem Sinne, daß sie Charakteristika unserer Erfahrung sind. Niemand kann unsere Erfahrungen, ohne die Kategorien Raum und Zeit machen. Daher schreibt Whitehead, daß Kants Aussage *"Was ist, ist"* zwar wahr ist, aber eben nicht hilfreich. Jedenfalls sollte man Dinge immer zuerst definieren, wie man sie aus der Erfahrung kennt, und dann sollte man den Raum danach beschreiben, wie sich die Verbindungen zwischen diesen Dingen verhalten. Unser Problem ist, die Welt wie sie ist, unseren Wahrnehmungen anzupassen, und nicht unsere Wahrnehmungen der Welt.

Schluß

In dem Buch von Lucien Price, *Dialogues of Alfred North Whitehead* [2], beschreibt Whitehead (S.325) den großen Vorteil seiner Zeit in London als die Möglichkeit der *"general discussions"*, einer Art Bildung, über die Platon sehr erfreut gewesen wäre: *Mathematics*, steht dort, *must be studied; philosophy should be discussed.*

Literatur

[1] Enzensberger, H. M.: *Zugbrücke außer Betrieb*, Die Mathematik im Jenseits der Kultur, Frankfurter Allgemeine Zeitung vom 29.8.1998 (Nr. 200), 1998.

[2] Price, L.: *Dialogues of Alfred North Whitehead*, 1954, Boston 2001.

[3] Ringel, C. M.: *Algebra ist Geometrie ist Algebra*, Vortrag Paderborn, 10. November 2006. (`www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/lectures/lenzing/`)

[4] Ringel, C. M.: *Whitehead's Ausdehnungslehre*, Die Kapitel II und III im Teil IV von Process and Reality, 2001.
(`www.math.uni-bielefeld.de/birep/phil/pr4.pdf`)

[5] Roggenkamp, K. W.: *3 Perlen der Mathematik*, Universität Stuttgart, Juni 1994.

[6] Whitehead, A. N.: *The Aims of Education and other Essays*, 1929, Free Press Publication 1967.

[7] Whitehead, A. N.: *An Introduction to Mathematics*, 1911, Oxford University Press, 1961.