## Übungsaufgaben 1.

**1.** Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige:

(a) Gilt $f^{-n}0 = f^{-n-1}0$, so auch $f^{-n-1}0 = f^{-n-2}0$ (also $f^{-t}0 = f^{-n}0$, für alle $t \geq n$).

(b) Gilt $f^n V = f^{n+1}V$, so auch $f^{n+1}V = f^{n+2}V$ (also $f^t V = f^n V$, für alle $t \geq n$).

(c) Folgere aus (a): Ist $\dim V = n$ und ist $f$ nilpotent, so ist $f^n = 0$.

**2. Bänder.**

(a) Zeige: die direkte Summe zweier Kronecker-Moduln, die Bänder sind, ist ein Band.

(b) Zeige: Für jedes $n \geq 0$ gilt: $P_n \oplus Q_n$ ist kein Band.

(c) Zeige: Seien $M, M'$ Kronecker-Moduln mit $M \cong M'$. Ist $M$ ein Band, so ist auch $M'$ ein Band.

(d) Zeige: Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und $\phi, \phi'$ Endomorphismen von $V$. Genau dann ist $(V, V, 1, \phi)$ isomorph zu $(V, V, 1, \phi')$, wenn $\phi$ und $\phi'$ ähnlich sind.

**3.** Zeige: Die direkte Summe der Moduln $P_n$ ist isomorph zum Kronecker-Module $M = (k[x,y], k[x,y], x, y)$ (die Abbildung $x, y$ sind die entsprechenden Multiplikations-Abbildungen).

Hinweis: Sei $k[x,y]_n$ der Unnterraum von $k[x,y]$ aller Polynome vom Grad $n$. Zeige, dass $M_n = (k[x,y]_n, k[x,y]_{n+1}, x, y)$ zu $P_n$ isomorph ist und dass gilt $M = \bigoplus M_n$.

**4.** Definiere den Spiegelungsfunktor $\sigma_+$ für 3-Kronecker-Moduln entsprechend zum Fall der 2-Kronecker-Moduln. Sei $P_t = (\sigma_+)^t(k, 0; 0, 0) = (V_t, W_t; \alpha, \beta, \gamma)$. Betrachte $\dim V_t, \dim W_t$. Zeige, dass dies Fibonacci-Zahlen sind.

Zur Erinnerung: Die Folge der Fibonacci-Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ erhält man wie folgt: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ für $n \geq 1$.

**1.** Let $V$ be a finite dimensional vector space and $f\colon V \to V$ an endomorphism. Show the following assertions:

(a) If $f^{-n}0 = f^{-n-1}0$, then $f^{-n-1}0 = f^{-n-2}0$ (and thus $f^{-t}0 = f^{-n}0$, for all $t \geq n$).

(b) If $f^nV = f^{n+1}V$, then $f^{n+1}V = f^{n+2}V$ (and thus $f^tV = f^nV$, for all $t \geq n$).

(c) Use (a) in order to show: If $\dim V = n$ and $f$ is nilpotent, then $f^n = 0$.

**2. Band modules.**

(a) Show that the direct sum of two Kronecker modules which are bands is again a band module.

(b) Show that $P_n \oplus Q_n$ is not a band module, for any $n \geq 0$.

(c) Show: Let $M, M'$ be Kronecker modules with $M \cong M'$. If $M$ is a band module, then also $M'$ is a band module.

(d) Let $V$ be a finite dimensional vector space, and $\phi, \phi'$ endomorphisms of $V$. Show: $(V, V, 1, \phi)$ is isomorphic to $(V, V, 1, \phi')$ if and only if $\phi$ and $\phi'$ are similar.

**3.** Show: The direct sum of the modules $P_n$ is isomorphic to the module $M = (k[x,y], k[x,y], x, y)$ (here, the maps denoted by $x, y$ are just the multiplication maps).

Hint: Let $k[x,y]_n$ be the subspace of $k[x,y]$ of all polynomials of degree $n$. Show that $M_n = (k[x,y]_n, k[x,y]_{n+1}, x, y)$ is isomorphic to $P_n$. and that $M = \bigoplus M_n$.

**4.** Define a reflection functor $\sigma_+$ for 3-Kronecker modules similar to the case of 2-Kronecker modules. Let $P_t = (\sigma_+)^t(k, 0; 0, 0, 0) = (V_t, W_t; \alpha, \beta, \gamma)$ and look at $\dim V_t, \dim W_t$. Show that these numbers are Fibonacci numbers.

Recall that the sequence of Fibonacci numbers $a_0, a_1, a_2, \dots$ is defined as follows: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ for $n \geq 1$.