Übungsaufgaben 2.

1. Lineare Algebra: Kerne und Cokerne. Wir betrachten Vektorräume und lineare Abbildungen. Die Folge $0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$ sei exakt (das heißt: f ist injektiv, g ist surjektiv, und das Bild von f ist gleich dem Kern von g). Zeige, dass gilt:

(a) Zu jeder linearen Abbildung $f'\colon U' \to V$ mit $gf' = 0$ gibt es genau eine lineare Abbildung $u\colon U' \to U$ mit $f' = fu$.

(b) Zu jeder linearen Abbildung $g'\colon V \to W$ mit $g'f = 0$ gibt es genau eine lineare Abbildung $w\colon W \to W'$ mit $g' = wg$.

2. Direkte Summanden von Kronecker-Moduln.

(a) Betrachte $P_0 \oplus P_1$. Zeige: Es gibt genau einen Untermodul, der zu P_1 isomorph ist, aber viele Untermoduln, die zu P_0 isomorph sind — einige davon sind direkte Summanden, andere nicht.

(b) Betrachte $Q_0 \oplus Q_1$. Zeige: Es gibt genau einen Untermodul, der zu Q_0 isomorph ist, aber viele Untermoduln, die zu Q_1 isomorph sind. Alle zu Q_1 isomorphe Untermoduln sind auch direkte Summanden.

(c) Zeige: $R_0[2] \oplus R_\infty[2]$ hat genau einen Untermodul, der zu $R_0[2]$ isomorph ist und genau einen Untermodul, der zu $R_\infty[2]$ isomorph ist.

(d) Zeige: $R_0[2] \oplus R_0[2]$ hat mehr als zwei Untermoduln, die zu $R_0[2]$ isomorph sind, alle diese Untermoduln sind direkte Summanden.

3. Die Spiegelungsfunktoren.

(a) Zeige: Sind die Kronecker-Moduln M, M' isomorph, so gilt auch $\sigma_+ M \cong \sigma_+ M'$ und $\sigma_- M \cong \sigma_- M'$

(b) Ist M ein Kronecker-Modul, so gilt $M \cong (\sigma_-\sigma_+ M) \oplus N$, dabei ist N eine direkte Summe von Kopien von P_0.

(b*) Ist M ein Kronecker-Module, so gilt $M \cong (\sigma_+\sigma_- M) \oplus N$, dabei ist N eine direkte Summe von Kopien von Q_0.

(Diese Behauptungen sind Verschärfungen von (6) und (6*).)

4. Untermoduln von direkten Summen von Kopien von Q_1.

(a) Im Gegensatz zu (11) kann man in (10) nicht erwarten, dass $s = t$ gilt. Um dies zu zeigen, betrachte für jedes $t \geq 1$ die direkte Summe M von t Kopien von Q_1. Man gebe explizit einen Unterraum $N_1 \subseteq M_1$ an, sodass $N = (N_1, M_2)$ ein Untermodul von M ist, der zu Q_t isomorph ist.

(b) Zeige: Für jeden Vektorraum V, ist $(V \oplus V, V; [\,1 \quad 0\,], [\,0 \quad 1\,])$ ein Kronecker-Modul, der zu einer direkten Summe von Kopien von Q_1 isomorph ist.

(c) Zeige: Jeder Q_0-freie Kronecker-Modul $M = (M_1, M_2, M_\alpha, M_\beta)$ kann in den Kronecker-Modul $(M_2 \oplus M_2, M_2; [\,1 \quad 0\,], [\,0 \quad 1\,])$. eingebettet werden

(Die beiden Behauptungen (b) und (c) zeigen zusammen, dass jeder Q_0-freie Kronecker-Modul in eine direkte Summe von Kopien von Q_1 eingebettet werden.)

(d) Man "dualisiere" diese Aussagen.

1. Linear Algebra: Kernels and cokernels. We consider vector spaces and linear transformations. Assume that the sequence $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$ is exact (this means: f is injective, g is surjective, and the image of f is equal to the kernel of g). Show:

(a) For any linear transformation $f'\colon U' \to V$ with $gf' = 0$, there exists a unique linear transformation $u\colon U' \to U$ with $f' = fu$.

(b) For any linear transformation $g'\colon V \to W$ with $g'f = 0$, there exists a unique lienar transformation $w\colon W \to W'$ such that $g' = wg$.

2. Direct summands of Kronecker modules.

(a) Take $P_0 \oplus P_1$. Show: There is a unique submodule isomorphic to P_1, and there are several submodules isomorphic to P_0 — some of them are direct summands, some not.

(b) Take $Q_0 \oplus Q_1$. Show: There is a unique submodule isomorphic to Q_0, and there are several submodules isomorphic to Q_1 — all of them are direct summands.

(c) Show that $R_0[2] \oplus R_\infty[2]$ has precisely one submodule isomorphic to $R_0[2]$ and one submodule isomorphic to $R_\infty[2]$.

(d) Show that $R_0[2] \oplus R_0[2]$ has more than two submodules which are isomorphic to $R_0[2]$, but all are direct summands.

3. The reflection functors.

(a) Isomorphic modules are sent under σ_+ (as well as under σ_-) to isomorphic modules.

(b) If M is a Kronecker module, then $M \cong (\sigma_-\sigma_+M) \oplus N$, where N is a direct sum of copies of P_0.

(b*) If M is a Kronecker module, then $M \cong (\sigma_+\sigma_-M) \oplus N$, where N is a direct sum of copies of Q_0.

(These assertions strengthen (6) and (6*).)

4. Submodules of direct sums of copies of Q_1.

(a) Show that in contrast to (11) the asserting of (10) cannot be improved to $s = t$. Namely, for any $t \geq 1$, let M be the direct sum of t copies of Q_1. Define explicitly a subspace $N_1 \subseteq M_1$ such that $N = (N_1, M_2)$ is isomorphic to Q_t.

(b) For any vector space V, consider $(V \oplus V, V; [\,1 \quad 0\,], [\,0 \quad 1\,])$. Show that this is a Kronecker module which is isomorphic to a direct sum of copies of Q_1.

(c) Show that any Q_0-free Kronecker module $M = (M_1, M_2; M_\alpha, M_\beta)$ can be embedded into the Kronecker module $(M_2 \oplus M_2, M_2, [\,1 \quad 0\,], [\,0 \quad 1\,])$.

(Assertions (b) and (c) together show: Any Q_0-free Kronecker module can be embedded into a direct sum of copies of Q_1.)

(d) What are the dual statement?