Übungsaufgaben 3.

1: Let k be a field and let $V = (k^4, \phi, \psi)$ be a module such that

$$\phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

with pairwise different $\lambda_i \in k$. How can the lattice of submodules of V look like?

2: (a) Classify all submodules U of

$$V = N(2,1), \quad N(3,1), \quad N(2,2)$$

and determine in each case the isomorphism class of U and of the factor module V/U.

(b) For $k = \mathbb{F}_2$ and $k = \mathbb{F}_3$ draw the corresponding Hasse diagrams.

(c) Let $k = \mathbb{F}_p$ with p a prime number, and let λ and μ be partitions. How many submodules U of V with $U \cong N(\lambda)$ and $V/U \cong N(\mu)$ are there?

3: (a) Find two 2×2-matrices A and B with coefficients in k such that (k^2, A, B) has exactly 4 submodules.

(b) Show: If V is a 2-dimensional module with at least 5 submodules, then every subspace of V is a submodule.

(c) Let V be a 2-dimensional module with at most 4 submodules. Show that V is cyclic.

4: Let W and U_i, $i \in I$ be submodules of a module $(V, \phi_j)_j$ such that for all $k, l \in I$ we have $U_k \subseteq U_l$ or $U_k \supseteq U_l$. Show that

$$\sum_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} U_i$$

and

$$\bigcup_{i\in I} (W \cap U_i) = W \cap \Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big).$$

1: Sei k ein Körper und sei $V = (k^4, \phi, \psi)$ ein Modul mit

$$\phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix},$$

dabei seien die $\lambda_i \in k$ paarweise verschieden. Wie kann der Untermodul-Verband von V aussehen?

2: (a) Klassifiziere alle Untermoduln U von

$$V = N(2,1), \quad N(3,1), \quad N(2,2)$$

und bestimmte jeweils die Isomorphie-Klasse von U und von V/U.

(b) Für $k = \mathbb{F}_2$ und $k = \mathbb{F}_3$ zeichne man jeweils das Hasse-Diagramm.

(c) Sei $k = \mathbb{F}_p$, dabei sei p eine Primzahl. Seien λ und μ Partitionen. Wieviele Untermoduln U von V mit $U \cong N(\lambda)$ und $V/U \cong N(\mu)$ gibt es?

3: (a) Man gebe 2×2-Matrizen A und B mit Koeffizienten in k an, sodass (k^2, A, B) genau 4 Untermoduln besitzt.

(b) Zeige: Ist V ein 2-dimensionaler Modul mit mindestens 5 Untermoduln, so ist jeder Unterraum von V ein Untermodul.

(c) Sei V ein 2-dimensionaler Modul mit höchstens 4 Untermoduln. Zeige, dass V zyklisch ist.

4: Seien W und U_i, $i \in I$ Untermoduln eines Moduls $(V, \phi_j)_j$, und für alle $k, l \in I$ sei $U_k \subseteq U_l$ oder $U_k \supseteq U_l$. Zeige, dass gilt:

$$\sum_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und

$$\bigcup_{i \in I} (W \cap U_i) = W \cap \Big(\bigcup_{i \in I} U_i \Big).$$