Übungsaufgaben 4.

Sei k ein Körper.

1. Man bestimme alle minimalen Erzeugendenmengen des 1-Moduls

$$(k^3, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

2. Sei $V = k^3$ mit Basis e_1, e_2, e_3. Definiere lineare Abbildungen $\phi, \alpha, \beta\colon V \to V$ durch

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= e_3, & \phi(e_2) &= e_3, & \phi(e_3) &= 0, \\ \alpha(e_1) &= e_3, & \alpha(e_2) &= 0, & \alpha(e_3) &= 0, \\ \beta(e_1) &= 0, & \beta(e_2) &= e_3, & \beta(e_3) &= 0. \end{aligned}$$

Betrachte den 1-Modul (V, ϕ) und den 2-Modul (V, α, β).

Zeige: (a) Jeder Untermodul von (V, α, β) ist auch Untermodul von (V, ϕ).

(b) (V, ϕ) besitzt zusätzliche Untermoduln! Genauer: Ist $k = \mathbb{F}_p$ der endlicher Körper mit p Elementen, so gibt es genau p Unterräume von V, die Untermoduln von (V, ϕ), aber keine Untermoduln von (V, α, β) sind.

(c) (V, α, β) ist unzerlegbar, dagegen ist (V, ϕ) zerlegbar.

3. Der Modul $N(\infty)$**.** Sei $k[T]$ der Polynomring in einer Variablen T mit Koeffizienten in k. Mit $k[T, T^{-1}]$ bezeichnen wir den folgenden Ring: als Grundmenge nehme man den Vektorraum mit Basis $\{T^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, dies liefert auch die Addition. Die Multiplikation auf der Basis sei folgendermaßen definiert: $T^z T^{z'} = T^{z+z'}$. Mit Hilfe der Multiplikationsabbildung $\phi = T\cdot$ wird $k[T]$ wie auch $k[T, T^{-1}]$ ein 1-Modul, natürlich ist $(k[T], T\cdot)$ ein Untermodul von $(k[T, T^{-1}], T\cdot)$.

(a) Zeige: Der Faktormodul $(k[T, T^{-1}], T\cdot)/(k[T], T\cdot)$ ist isomorph zu $N(\infty)$.

(b) Sei nun $k = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Das Differenzieren $p \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,T} p$ ist eine lineare Abbildung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,T}\colon k[T] \to k[T]$. Zeige: der 1-Modul $(k[T], \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,T})$ ist isomorph zu $N(\infty)$.

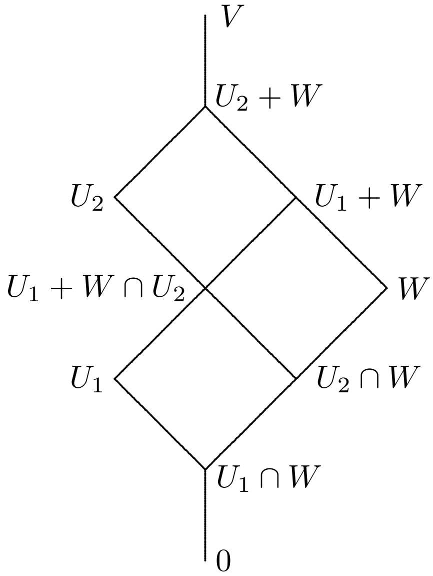
4. Seien U_1, U_2, W Untermoduln des Moduls V und es sei $U_1 \subseteq U_2$. Zeige: Die Menge der Untermoduln

$$0,\ U_1,\ U_2,\ W,\ U_1 \cap W,\ U_2 \cap W,\ U_1 + W,\ U_2 + W,\ U_1 + W \cap U_2,\ V$$

ist abgeschlossen unter $\cap$ und $+$ (also ein "Unterverband" im Verband aller Untermoduln von V.)

Hilfestellung (alles ist ganz einfach, es handelt sich nur darum, die Einzelschritte zu ordnen):

(a) Man hat das folgende Inklusionsdiagramm:



Sind nun $U \subseteq U'$ Untermoduln von V, so ist $U \cap U' = U$ und $U + U' = U'$, in so einem Fall ist also nichts zu zeigen.

(b) Also müssen wir nur die folgenden fünf Paare (U, U') von Untermoduln betrachten

$$(U_2, U_1 + W), \quad (U_2, W), \quad (U_1 + W \cap U_2, W), \quad (U_1, W), \quad (U_1, U_2 \cap W)$$

und jeweils $U + U'$ und $U \cap U'$ bilden - dies sind 10 Untermoduln. In jedem der zehn Fälle ist anzugeben warum man wieder einen der angegebenen Untermoduln erhält.