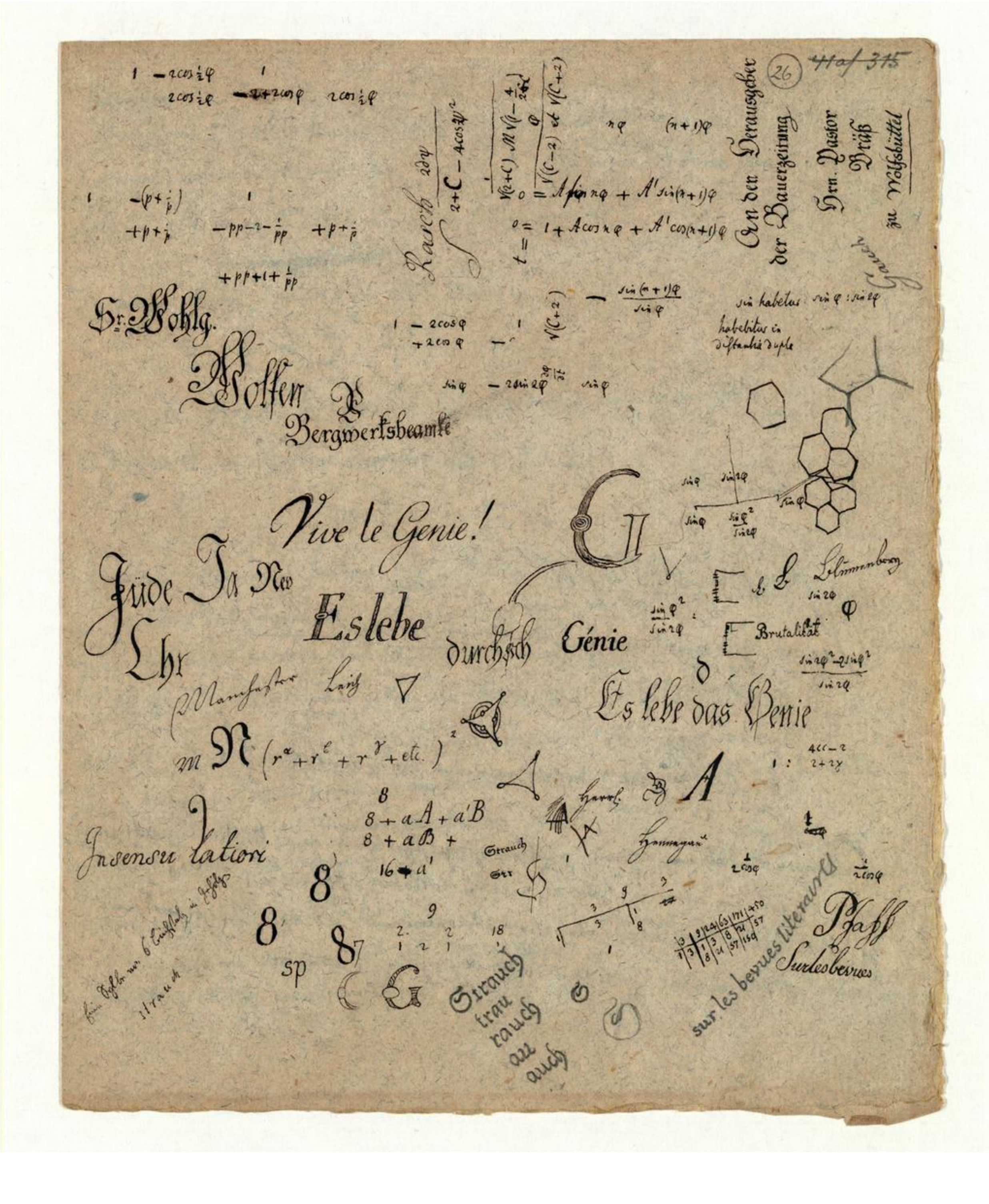

An den Herausgeber der Bauerzeitung
Hrn. Pastor Brüß
zu Wolfsbüttel

$0 = A\sin n\varphi + A'\sin(n+1)\varphi$

$0 = 1 + A\cos n\varphi + A'\cos(n+1)\varphi$

Rauch

Hr. Wohlg.
Wolfen
Bergwerksbeamte

Vive le Genie!

Jüde Ja Nev
Lhr

Es lebe durch Génie

Brutalität

Es lebe das Genie

$m\mathfrak{N}(r^\alpha + r^\beta + r^\gamma + \text{etc.})^2$

$8 + aA + a'B$
$8 + a\mathfrak{B} +$

In sensu latiori

Strauch
trau
rauch
au
auch

sur les bevues literaires

Pfaff
Sur les bevues

316

De La Grangii error

Caput septimum

Variae quarundam investigationum praecedentium applicationes

279.

I. De fractionum communium transmutationibus.

Nullum est dubium quin multae investigationes quas hactenus pertractavimus etiam in aliis matheseos partibus utiliter applicari possint. Complures quidem applicationes iam abinitio interspersimus sed ne investigationes nimis interrumperentur quasdam hic segregare visum est.

~~Theorema~~

Problema. Fractionem $\frac{m}{ab}$, a, b existentibus inter se primis in duas alias discerpere quarum denominatores sint a, b. (Numeratores vero positivi seu negat. esse possunt)

Solutio Sit $\alpha \equiv \frac{m}{b}$ (Mod. a) (i.e $b\alpha \equiv m$) ~~et~~

~~eritque~~ Fitque $m - b\alpha = a\beta$ eritque

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = \frac{m}{ab}.\ \text{Q.E.F.}$$

Exempl. Proponatur fractio $\frac{362}{209}$; quoniam $209 = 11 \cdot 19$ quaer. $\frac{362}{19}$ (Mod 11) $\equiv 4$. Hinc invenitur $\frac{362}{209} = \frac{4}{11} + \frac{26}{19}$.

280.

Problema Proposita fractione $\frac{m}{n}$ cuius denominator n sit productum e factoribus inter se primis a, b, c, &c eam in alias fractiones discerpere quarum denominatores sint a, b, c &c.

Solutio Sit $\alpha \equiv \frac{m}{bcd\ldots}$ (Mod. a); $\beta \equiv \frac{m}{acd\ldots}$ (Mod b); $\gamma \equiv \frac{m}{abd}$ (Mod c) &c dico fore $\frac{m}{n} - \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} - \frac{\gamma}{c}\ldots$ numerum integrum. Namque quoniam $m - \alpha bcd\ldots - \beta acd - \gamma abd\ldots$ per omnes numeros a, b, c.. dividi potest qui inter se sunt primi etiam per omnium productum i.e. n dividi poterit. Quod si cum quotiens alicui fractionum $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$... adiiciatur seu inter plures distribuatur factum erit quod requirebatur.

~~Exempl.~~ Ceterum non opus est ut m, n reipsâ habeantur plerumque sufficit mediate ipsorum valores novisse ut ex exemplo adiecto palam fiet.

318

Sit $m = \cancel{28884}\ \ 2 \times 55224^2 - 1$ $\qquad \dfrac{60991\ 380351}{1271\ 808720}$

$n = \cancel{2 \times 55224} . 2 \cdot 55224 . 11515$

~~Quare~~ quum denominator ~~sit~~ est productum e factoribus inter se primis

$16.9.13.59.5.49.47$. Quaeratur ergo:

$\dfrac{2.55224^2-1}{9.13.59.5.49.47}$ (Mod 16) $\equiv \dfrac{-1}{13} \equiv 11$

$\dfrac{2.55224^2-1}{16.13.59.5.49.47}$ (Mod. 9) $\equiv \dfrac{-1}{2} \equiv 4$

&c. Unde habebuntur fractiones

$\dfrac{11}{16}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{13}, \dfrac{52}{59}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{22}{49}, \dfrac{7}{47}$. Quarum aggregatum cum unitate sit minus quam $\dfrac{m}{n}$ erit $\dfrac{m}{n} = 1 + \dfrac{11}{16} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{5}{13} + \dfrac{52}{59} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{22}{49} + \dfrac{7}{47}$.

281.

Quoniam numeratores $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per congruentiam inveniuntur eorum valores absoluti non penitus sunt determinati. Attamen plerumque commodius est omnes positivos accipere (Vid. infra) et, si uniformitatem observare volumus omnes denominatore suo minores accipi possunt. Hoc itaque modo omnes numeratores exacte ~~sunt~~ determinati. Facile vero probatur eandem fractionem ad hanc normam pluribus modis diversis discerpi nequire; si enim esset $\dfrac{m}{n} = A + \dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{\beta}{b} + \dfrac{\gamma}{c} + \dfrac{\delta}{d} \dots = A' + \dfrac{\alpha'}{a} + \dfrac{\beta'}{b} + \dfrac{\gamma'}{c} + \dfrac{\delta'}{d}$

et $\alpha, \alpha' < a$ non autem $\alpha = \alpha'$ ponatur $A + \dfrac{\beta}{b} + \dfrac{\gamma}{c} + \dfrac{\delta}{d} \dots = \dfrac{f}{bcd..}$ et $A' + \dfrac{\beta'}{b} + \&c.$ $= \dfrac{f'}{bcd..}$ ~~fit~~ fietque $\dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{f}{bcd..} = \dfrac{\alpha'}{a} + \dfrac{f'}{bcd}$ hinc posito $\alpha > \alpha'$ quod licet.

$\dfrac{\alpha - \alpha'}{a} = \dfrac{f'-f}{bcd}$. Quoniam autem a ad $bcd..$ est primus deberet esse $\dfrac{\alpha - \alpha'}{a}$ numerus integer Q. E. A. (Cap. 2.)

Manuskr. 50 ~~41af~~ ~~319.~~

Quoniam quivis numerus ita in factores inter se primos resolvi potest ut quivis sit aut numerus primus aut numeri primi potestas, perspicuum est quamvis fractionem in alias fractiones dividi posse, quarum denominatores sint numeri primi aut numerorum primorum potestates, fractionis propositae denominatorem metientes. (28)

Ceterum in applicatione saepissime compendia sese offerunt quae autem per usum ~~tantum~~ modo ediscī possunt. ~~Tamen~~ Ut calculus comprobetur iuvabit, postquam aliquarum fractionum numeratores sunt inventae, harum summam a proposita fractione subtrahere, reliquarumque numeratores duplici modo scilicet ex fractione proposita quam tam ex hac differentia determinare. Sed Calculatores magis minusve exercitati non eadem methodo uti volent; nec regulae generales hic dari possunt.

282.

De fractionum Communium in decimales Conversione.

Brevitatis gratiâ ad systema commune decadicum sequentia tantummodo adaptamus; facillime autem quisquis intelliget quomodo omnia in propositiones generales converti possint.

Definitio. Si fractio communis $\frac{m}{n}$ in decimalem convertatur series figurarum decimalium (exclusa scilicet siquis adest numero integro) sive sit finita sive infinita fractionis mantissam vocamus. Permittetur nobis hanc expressionem generalius accipere, quam vulgo tantum de logarithmis adhibeatur.

Ita fractionis $\frac{1}{8}$ mantissa erit 125; fractionis $\frac{33}{16}$, 0625 fractionis $\frac{4}{11}$ 363636... in infin.

In diesen heiligen Hallen kennt man die Rache nicht.

1796 Januar

1796

In diesen heiligen Hallen kennt man die Rache nicht

\# ~~et vice versa~~

Patet, fractiones quae eundem denominatorem, numeratores vero secundum hunc denominatorem congruos habent easdem mantissas ~~esse~~ fore; porro fractionis $\frac{m}{n}$ demta prima figura esse mantissam fractionis $\frac{10.m}{n}$, demtis duabus primis ~~fr~~ mantissam fractionis $\frac{10^2.m}{n}$ et generaliter demtis a primis figuris mantissam fractionis $\frac{10^a.m}{n}$. Si vero m per n dividitur mantissa nulla erit.

Si fractionum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, 284. $\frac{e}{f}$ ... mantissae secundum regulas communes addantur (scilicet, iungendo omnes figuras primum locum, a laeva, occupantes omnes porro secundum locum, et sic deinceps, decenarii autem si qui proveniunt tamquam unitatis ad ~~locum~~ aggregatum ~~prae~~ ~~fig~~ e figuris loci praecedentis adiungantur omissis iis qui ex primo loco oriuntur) summa erit mantissa summae fractionum $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ ...

Ex. gr. fractionum ~~$\frac{1}{3}$~~, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{8}{13}$ Mantissae sunt 2857142...
4545454...
6153846...

~~Ea~~ Summa autem $\frac{286+455+616}{1001} = \frac{1357}{1001}$ summae mantissarum vero 3556442... hocce casu ut semper quoties mantissae in infinitum progrediuntur ultima figura est dubia ob decenarios qui provenissent nisi figuras sequentes non abjecissemus. (pro 2 scilicet hic esse deberet 3).

284.

Hinc sequitur quoniam quaevis fractio in alias discerpi potest quarum denominatores sint numeri primi aut numerorum primorum potestates huiusmodi fractiones tantummodo considerare oportere; quae de reliquis locum habent hinc deduci poterunt. Sit igitur proposita fractio $\frac{m}{p^n}$, ubi p est numerus primus. Supponimus quoque m per p non divisi. Analysis Residuor. S.s.

Primo ponamus p esse $=2$ aut $=5$ tum ~~dec~~ fractionis mantissa ex $\underline{n}$ figuris constabit quoniam enim 10^n per p^n dividitur et id quod de mantissa demtis n primis figuris relinquitur sit mantissa fractionis $\frac{10^n . m}{p^n}$, quae nulla est patet mantissam ad has n figuras ~~limitari~~ intra cohiberi; quod vero non prius finiatur inde patet quod $\frac{10^k . m}{p^n}$ si $k<n$ ~~per~~ non est numerus integer.

Caeterum haec mantissa ~~obtineri potest si identica~~ est cum n infimis figuris numeri $m.\left(\frac{10}{p}\right)^n$

285

Si vero p nec est $=2$ nec $=5$, mantissa in infinitum progreditur. Quantumvis enim magnus k accipiatur $\frac{10^k . m}{p^n}$ numquam erit numerus integer. Sed in Capite I ostendimus semper dari potestates numeri 10 ; ~~10^e~~ unitati secundum p^n congruam et si 10^e sit infima huiusmodi potestas esse e ~~dim~~ aut $=(p-1).p^{n-1}$ aut partem aliquotam huius numeri

Sunt autem $\frac{10^e \cdot m}{p^n}$ et $\frac{m}{p^n}$ eandem mantissam habebunt
quocirca figura $e+1$ta huius mantissae eadem erit quam prima
$e+2$ta eadem cum secunda et sic porro, figura autem $2e+1$ta
iterum cum prima eadem erit. Hinc sequitur primas e figuras
periodum quasi formare quae in infinitum ~~semper~~ repetita mantissam
efficit. Multitudo vero figurarum periodi a p^n non vero a m
~~Ita si~~ pendet eritque semper aut $= p-1 \cdot p^{n-1}$ aut pars aliquota
huius numeri.

Ita ~~fractionis~~ quoniam ~~10~~ pro $p^n = 13$; $e = 6$ fractio $\frac{2}{13}$
habet mantissam 153846153 8... quae constat e periodis infinitis
153846. Periodos autem minores quam quae ex e terminis constant
occurri non posse inde patet quod si post figuram k tam ($k < e$)
omnes iterum ab initio recurrerent esse deberet $10^k \cdot m \equiv m$ (Mod p^n)
seu $10^k \equiv 1$ contra hypothesin.

Denique manifestum est ~~period~~ figurarum numerum periodum constituentium
tum semper esse $= p-1 \cdot p^{n-1}$ quoties 10 est id quod supra radicem
primitivam pro modulo p^n diximus.

286.

Si itaque mantissae alicuius periodus habeatur i.e. primae illae figurae
in infinitum recurrentes, quousque libet continuari poterit. In tabula
igitur mantissarum conficienda periodi tantummodo tradi oportet. ~~[illegible]~~
Celeb. Robertson (Philosophic. Trans.   ) periodos per bina puncta
figurae ~~ultimae~~ primae et ultimae superscriptis designare proposuit; quod

quem signandi modum etiam Cel. Hindenburg secutus est (30) ~~41a/ 323~~
in libello (Verrech &c. p.) Ita fractionis $\frac{2}{13}$ periodi hoc modo
designatur $\dot{1}5384\dot{6}$.

Si $m.10^k \equiv h$ (mod. p^n) ~~perspicuum est~~ fractionis $\frac{h}{p^n}$ mantissa oritur
si a fractionis $\frac{m}{p^n}$ mantissa primi k figurae resecentur; et si $k < e$
i. quod semper supponere licet periodus mantissae fractionis $\frac{h}{p^n}$ obtinetur
si a periodo fractionis $\frac{m}{p^n}$ primae k figurae demantur et post ultimam
reponantur. Quamobrem si fractionis $\frac{m}{p^n}$ periodus habeatur etiam fractionis
$\frac{h}{p^n}$ periodus tamquam cognita potest spectari si $h \equiv 10^k.m$.

287.

Quodsi igitur 10 sit radix primitiva pro modulo p^n, i.e. cuivis numerus
~~alicui~~ per p non divisibilis potestati alicui ipsius 10 sit congruus, e fractionis $\frac{1}{p^n}$ periodo
cuiuscunque alius fractionis $\frac{m}{p^n}$, (m per p^n non div.) cognitus erit. Ut autem diiudicetur
quot a periodi fractionis $\frac{1}{p^n}$ figurae resecari debeant tabula qualem Capiti 3° adiunximus
servire potest, unde desumatur cuii ipsius 10 potestati m sit congruus. Si ut semper
in hac tabula fecimus pro hocce casu 10 pro basi assumatur index numeri m quaesitum
statim ostendet; si vero alia basis esset supposita operatio requiritur de qua in eodem
Capite fusius tractavimus.
Si vero periodus non est nimis magna calculator exercitatus tali tabula etiam carere
noverit. Computabit scilicet poterit tot figuras primas quot requiruntur ad hanc
fractionem ab aliis diversi numeratoris distinguendam. ~~Facile has~~ Ubi has eodem ordine in periodo invenit
(fieri autem quandoque aliquando potest ut aliquae harum figurarum in periodi fine aliae in initio

324

sint locatae) ibi periodi initium erit statuendum. ~~[illegible]~~ Exercitatio calculatori non molestius erit hoc modo figuras distinctivas in periodo non ultra 1000 figuras complectente invenire; commodius autem erit si ~~plures~~ aliquot figurae insuper iis quae absolute sunt necessariae adiiciantur: tunc enim inquirentis oculum fugere vix poterunt. — Ceterum per se clarum ~~est~~ hanc methodum ~~[illegible]~~ numquam applicandam esse si pauculae mantissae figurae tantumodo desiderentur; tum enim tabula prorsus careri poterit.

Exempl. si $p^n = 29$ periodus erit $\dot{0}34482758620689655172413793\dot{1}$ quod si requiratur ~~mantissa~~ fractionis $\frac{7}{29}$, primae figurae erunt 24 quae sine negotio in periodo invenientur reserandaque sunt figurae 20 i.q. etiam ex tabula supra data apparet.

Ann. Computus figurarum distinctivarum ~~etiam~~ ~~vel~~ ~~ita~~ perficere possumus multiplicando periodum fractionis $\frac{1}{p^n}$ per m.

288

Si vero 10 non est radix primitiva pro modulo p^n ~~in~~ fractionis $\frac{1}{p^n}$ periodus eas tantumodo fractiones ~~mantissas~~ periodos dabit quarum numeratores alicui ipsius 10 potestati sint congrui. Sit 10^e minima potestas $\equiv 1$, ~~terminus~~ periodus ex e figuris constabit ponaturque $\frac{p-1.p^{n-1}}{e} = f$. Sit radix prima aliqua pro modulo p^n, ρ, erit ρ^f potestati alicui ipsius 10 congrua (scilicet si $10 = \rho^{kf}$, maxima numerorum $p-1.p^{n-1}$ et kf divisor communis erit f, ~~[illegible]~~ $\cancel{k}$ seu $\frac{k}{\cancel{f}}$ et e inter se erunt prima. Quodsi autem $t.\cancel{f} \equiv \frac{1}{k}$ (Mod e) erit $10^t \equiv \rho^f$ (Mod p^n)) Quare fractionis $\frac{\rho^f}{p^n}$ periodus in periodo fractionis $\frac{1}{p^n}$ continetur. ~~fractionum~~ autem omnium $\frac{\rho}{p^n}, \frac{\rho^2}{p^n}, \frac{\rho^3}{p^n}$ usque

(31) 325

ad $\frac{\varrho^{f-1}}{p^n}$ periodi neque in periodi fractionis $\frac{1}{p^n}$, nec alterius periodus in alterius
periodi continebitur. Hinc perspicitur. si habeantur periodi fractionum
$\frac{1}{p^n}$, $\frac{\varrho}{p^n}$, $\frac{\varrho^2}{p^n}$ usque ad $\frac{\varrho^{f-1}}{p^n}$, in his omnium aliarum fractionum periodos
contineri. ~~Si quaeratur~~ Data ergo harum periodorum tabula periodi alius fractionis
inveniri potest ~~[illegible]~~ ex primis figuris distinctivis; sive etiam ope tabulae
~~indicum pro [illegible]~~ Capiti tertio annexae Proposita scilicet fractione $\frac{m}{p^n}$ sit
$m \equiv \varrho^h$. ~~Dividatur~~ Porro sit $10 \equiv \varrho^{kf}$ et $10^t \equiv \varrho^f$
dividatur h per f sitque ~~f~~ $h = \lambda f + \nu$ ita ut $\nu < f$ erit ergo
$m \equiv \varrho^{\lambda f + \nu} \equiv 10^{\lambda t} \cdot \varrho^\nu$ Invenietur igitur periodus fractionis $\frac{m}{p^n}$ in periodo fractionis
$\frac{\varrho^\nu}{p^n}$ resecandaeque sunt ~~tf~~ λ primae figurae (λ semper ~~erit~~ accipi potest $< e$ ob $h <$
ef

289

Sed quoniam radix primitiva ϱ tam proponitur praesens ~~quae~~ dum quâ basis in
tabula I. ad e ita eam semper accipere licet ut sit $t \equiv 1$. Ad hanc
normam ~~tam~~ cum tabula supra data quam tum ea quam ut specimen tabulae fractionis
annectimus sunt adornatae; et quoniam plerumque etiam hic valorem ipsius
ϱ inter plures eligere licet ~~[illegible]~~ ut aliquid fixi adoptetur ~~omnium~~ minimum
semper adhibuimus. Hinc usus huius tabulae per se clarus est. ~~Si requiratur~~ Periodos
exhibet fractionum $\frac{1}{p^n}$, $\frac{\varrho}{p^n}$, $\frac{\varrho^2}{p^n}$ &c. per numeros 0, 1, 2, &c distinctas
quodsi desideretur periodus fractionis $\frac{m}{p^n}$ ~~sit~~ capiatur index ipsius m ex tabula
qui si sit, h dividatur h per f more solito ~~residuum quotiens et~~ residuum
indicabit ~~quot e periodi~~ e qua periodo petenda sit per quaesita, quotiens autem quod

326 figurae a periodi huius initio sint resecandae et post finem restituendae.
Qui vero paullulum tantum exercitatus est, certo ad hanc quidem tabulae extensionem certo malet binas periodi figuras primas computare ~~...~~ eorumque in periodo locum hac perlustranda invenire.

$\frac{1}{27}$ $\frac{4\times 0+1}{4\times 6+3}$

290.

~~Hanc~~ Tabulam hanc ~~usque ad~~ pro omnibus denominatoribus millenario minoribus perfecimus; quam hic communicamus specimen tantummodo est, integram post
2378 663 hac forsan ~~...~~ si otium competit ulterius productam publici iuris faciemus.
561 3927 160 Aliquas tantummodo observationes adiicimus quas pluribus lectoribus non ingratas fore. Quoniam pro nostro Calculo decimali numeri e, f (periodorum magnitudo et ~~quantitas~~ multitudo) tantummodo a p^n pendeant, eas ~~...~~ p^n
1645 131 772 76 eligere possumus quae eadem e; et e contra eas quae eodem f habent. Illorum numerus semper erit finita namque $\pm p^n$ semper est divisor
6317 10136 6 numeri $10^e - 1$ et huius numeri divisores ~~quoniam~~ sunt finiti ~~patet~~; horum autem
1924 3199 multitudo est infinita. Ecce exceptum ex tabula nostra, quae 166 numeros primos comprehendit inter hos sunt

	pro quibus		f =
60	1	9	12
54	2	1	14
15	3	1	17
10	4	1	20
2	5	1	25
6	6	1	28
2	7	1	33
2	8	1	34
1	9	1	54
2	10		
1	11		

e autem	pro p =
1	3
2	11
3	37
4.	101
5.	41.271
6	7.13
7	239
8	73.137
13	59.73
15	31
&c.	

$\frac{p-1}{}$ $\frac{pp-1}{pp}$ $\frac{p+1}{p^3}$

2490 4245 294 45

1 2 4 5 7 8
1 $\frac{2}{3}$ 1 $\frac{2}{3}$ 1
$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{9}$

1 1 $\frac{1}{6}$

$p\,\frac{pp-1-1}{pp-p} = a$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{19}{20}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{20}$

1 … a
2 … a
3 … $\frac{8}{45}$a

$p-1$
$p-2$
$+\frac{p-1}{p}$

$\frac{pp-p-1}{pp-p}$

$1-\frac{1}{pp}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^4}$ etc.

$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$

291.

Ex praecedentibus patet quamuis fractionem cuius denominator ~~etc~~ in factores inter se primos millenario minores resolui potest ~~per ta~~ ope tabulae nostrae in fractionem decimalem converti posse. Ostendimus enim quomodo fractio haec in alias discerpi possit cuius denomin: sint primi aut primorum potestates; dein quomodo haec in fractionem decimalem ~~converti~~ convertere possint. Restat igitur ut hae in summam uniantur. Superfluum est hoc modo fractionis decimalis figuram ultimam (aut si fractionum addendarum numerus denarium superat, ~~tum et~~ ultimam et penultimam &c. &c.) incertos esse. Exemplum adhuc adiiciemus Supra §. 280 fractionem $\frac{6099380351}{1271808720}$ ita discerpsimus $1+\frac{11}{16}+\frac{4}{9}+\frac{5}{13}+\frac{52}{59}+\frac{22}{49}+\frac{7}{47}+\frac{4}{5}$ Quae hoc modo ex tabula nostra in fractiones decimales convertuntur.

$1, =$ 1						
$\frac{11}{16} =$ 0,6875						
$\frac{4}{5} =$ 0,8						
$\frac{4}{9} =$ 0,444444	444444	444444	444444	4	+	
$\frac{5}{13} =$ 0,384615	384615	384615	384615	4	−	
$\frac{52}{59} =$ 0,881355	932203	389830	508474	6	−	
$\frac{22}{49} =$ 0,448979	591836	734693	877551	0	+	
$\frac{7}{47} =$ 0,148936	170212	765957	446808	5	+	
4,795831	523312	709541	661893	9		

44444
38461
57627
02040
51063
93637

64

figurae ultimae aut $1\frac{1}{2}$ adiiciendum aut 1 demendum erit, unde patet quousque sit exacte.

$$23+\frac{1}{aa}=\frac{bb}{aa}$$

$$\sqrt{23}=\frac{b}{a}-\frac{1}{2ab}$$

7637
13
776
1552
9312
6

152

328

292

Quod ad mantissas earum fractionum quarum denominatores sunt numeri e pluribus primis compositi attinet paucis ea tantummodo erunt attingenda. Si denominator ~~ad 10~~ factorem 2 aut 5 non contineat mantissa e periodis erit composita tum enim semper datur potestas ipsius 10 unitati secundum fractionis denominatorem congrua, huiusque exponens periodi magnitudinem determinabit. Hic autem exponens ex principiis Cap. 3i facile determinari potest. Tandem si ~~deft~~ fractionis denominator erit formae $2^a.5^b.p$ ita ut p ad 10 sit primus ~~frac~~ fractionis mantissa post ~~ter~~ figuram a aut b ~~tam~~ prout a maior aut minor quam b e periodis constare incipiet. Omnia haec facillime tum ex iis quae Cap. 3io exposuimus quam inde deducuntur, quod fractiones hae in alias quarum denominatores numerorum primorum potestates. quare superfluum foret diutius huic rei immorari.

Quaedam monenda de method. tabulas huiusmodi conficiendi.

293.

De resolutione aequationis indeterminatae $xx = a + by$.

In Capite ~~tertio~~ quarto regulae sunt expositae secundum quas diiudicari debet utrum haec aequatio ubi a et b ~~sunt~~ dantur sit resolubilis nec ne (i.e utrum a sit ipsius b residuum quadraticum an non-residuum). Sed ~~plus~~ quomodo casu priori x et y determinari possint plerumque regulae ~~admodum~~ magis ob elegantiam quam quod in applicatione

Manuskr. 50

sint commodae commendandae videntur (Vid. §§)

(33) ~~40~~ / ~~329~~

Analysis Residuorum

Tt

Hic itaque methodum communicabimus indirectam quidem sed quae plerumque satis facile quaesitum suppeditat.

Nititur ea principio exclusionum quod per universam arithmeticam singularia emolumenta praebet.

Primum limites sunt investigandi intra quos valor ipsius y necessario cadere debet. Jam quoniam notum est x semper ita assumi posse ut non sit maior quam $\frac{1}{2}b$, ~~patet~~ et a semper $< b$, (~~absolute~~ sine respectu signi) patet y fore positivum et ~~non maius~~ minor quam $\frac{1}{4}b+1$. Jam pro y omnes ~~valores~~ numeri ab 1 usque ad ~~$\frac{1}{4}b$~~ hunc limitem substituendi essent isque eligendus pro quo $a+by$ fit quadratum. Sed ostendemus quomodo maxima pars ~~horum~~ numerorum tamquam inepti ab hoc examine excludi possint, ita ut valor idoneus (sive valores si dantur plures) tantummodo supersit aut de reliquis tam pauci ut eos facillime huic examini subiicere possimus.

294

Assumatur pro libitu numerus integer p sintque eius non-residua quadratica $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Solvantur congruentiae $\alpha \equiv a+by$, $\beta = a+by$, $\gamma = a+by$ (Mod. p) etc. sintque valores omnes ipsius y hinc oriundae $\equiv \lambda, \mu, \nu$ &c tum ex numeris $1, 2 \ldots$ usque ad $\frac{1}{4}b$ omnes ii erunt eiiciendi qui alicui horum numerorum $\lambda, \mu, \nu \ldots$ secundum p sunt congrui. Si enim tales valores pro y substituerentur

residua. Quare binae operationes cum p et q aequivalent unicae cum pq,
si p et q inter se sint primi. Hinc ratio perspicitur cur in exemplo praec. ponendo
p = 6 nulli exclusi fuerint. Porro patet facile, si ponatur $p = t^2$ aut
generalius t^k tum eosdem numeros insuperque alios (per p non vero per p^2, per
p^3 non vero per p^4 divisibiles) excludi. ~~Sed pot. Quare quamvis~~ quae excluderentur
ponendo $p = t$. aut generalius $p = t^{k-a}$ Sed potestas cum impari exponente exc. 2^k non plus pollet quam potestas
praecedens. Hinc colligitur, ~~quod quoniam arbitrio relin~~ quae potissimum
pro p valores sint eligendi. Scilicet numeri primi, numerorumque potestates
pares. ex. gr. 3, 8, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19 &c

297.

Sed calculus adhuc ~~notabile~~ Lectio commodius potest adornari. Quoniam agitur
omnes valores expressionis $\frac{\alpha - a}{b}$ (Mod. p) habere, si pro α omnes ipsius
p non residua substituantur. Supponitur semper b ad p primus fiat igitur
$mb \equiv 1$ (Mod. p) eritque $\frac{\alpha - a}{b} \equiv m\alpha - mb$ (Mod. p.) Quodsi iam m ipsius
p residuum sit ~~etiam omnes~~ ipsius $m\alpha$ valores ~~non~~ omnia residua comprehendent, si autem
m ipsius p sit Non Res: $m\alpha$ omnia Residua comprehendet (exclusis residuo 0 ~~iis quae~~
~~potestati pari ipsius aut~~ si p primus; si vero p primi potestas t^k, exclusis iis
quae sunt formae $\mathfrak{X} r t^{2\mu}$) (Cap. 4) Prout igitur seu hoc seu illud locum habet
ab omnibus tantummodo residuis (except. debite factis) seu ab omnibus non residuis subtrahendum
est mb, ~~quod relinquitur~~ Habebuntur que omnes numeri quibus y sec. p incongruus esse de-
bet. 2.

332

Exempl. 2. Proposita sit aequatio $xx = 7 + 139 \cdot y$

ponatur 1) $p=5$ excludenda erunt $\frac{\text{Non R.} - 7}{139} \equiv 4.$ Non R $\equiv 3$ i.e. N.R+2

seu 4 et 0 similimodo habebis

p	Excl.
7	1.2.4
8	0.1.2.4.5
9	1,2,4,7,8
11	0,2,3,4,8

Quoniam autem y non erit > 34

Exclusis hisce numeris restabunt: 6 et 27 est autem

$29^2 = 7 + 6 \cdot 139$

$127x' - 66y' = 57$

$127x - 5428681y = 1434$

Annotari adhuc convenit per unam operationem numerorum qui supererant multitudinem ad semissem fere reduci et quamvis plures aut pauciores remanere possint praesertim si haec multitudo iam sit satis modica.

Ceterum facile est subsidia comminisci quibus hae exclusiones mechanice possint institui; hoc tamen lectori perito relinquimus.

298.

De Resolutione aequationis indeterminatae $axx + byy = c$

In Capite quinto regulas generales et directas dedimus aequationem hanc resolvendi sed in praxi plerumque multo facilius est ~~indirecte~~ quando a et b sint positivae rem indirecte aggredi; quum insuper etiam illae methodi solutionem aequationis ~~binomii~~ in §§ 281...297 tractatae supponant quae commodissime indirecte perfici potest.

Methodus hancce aequationem solvendi ei quam in praec: descripsimus prorsus est similis sed duplici modo applicari potest prout scilicet aut x aut y investigetur. Ponamus aequationis possibilitatem ex principiis Capitis

~~41 of 333~~ (35)

quinti deductam esse quaecunque x. Primo determinandi ~~sunt limites~~ [illegible]
in~~fra~~ quos ~~x et y cadunt~~ ~~cadit~~ quoniam scilicet byy ex hyp.: semper positivum
axx maior quam c fieri nequit; quare x necessario inter 0 et $\sqrt{\frac{c}{a}}$ iacebit.
Iam ~~fit~~ ~~quaerantur~~ ~~om~~ assumatur numerus quicunque (ex similibus rationibus
ut §§. conveniet primos tantum primorumque potestates pares accipere)
p cuius omnia non residua quadratica sint α, β, γ..
Iam quaerantur ~~expr~~ omnes valores fractionum $\frac{c-b\alpha}{a}$, $\frac{c-b\beta}{a}$, $\frac{c-b\gamma}{a}$
&c (Mod. p) eliganturque ii qui ipsius p sunt residua, horum radices
sint $\pm A, B, C$.. Tum perspicuum est x nulli horum numerorum
secundum modulum p congruum esse posse quia alias yy non residuo congruum
fieret. Omnes igitur numeri ex serie 1... usque ad $\sqrt{\frac{a}{c}}$, horum alicui
congrui statim sunt reiiciendi. Manifestum est per p semper alios aliosque
valores substitui et ita remanentium continuo diminui posse

299

Vive le Génie

Etiam hic calculus per sequentes reflexiones contrahi potest.
Quoniam facile perspicitur p semper ad a primum accipi oportere. sit
$ka \equiv 1$ Mod. p Hinc patet omnes expressiones $\frac{c-b.\text{NonR}}{a}$ in
$ck - bk$. Non R. transire. quod si iam $-bk$ sit residuum ~~+bk~~
huic expressioni aequivalebit haec ~~ck~~ + NRes. + ck si omnia Residua
substituantur, si vero $-bk$ sit Non Res. huic Res. + ck si omnia Residua
substituantur. Exceptiones ~~etc~~ hic simili modo ut supra sunt determinandae
Facile autem per principia cap. 4to exposita (§) ~~dic~~ demonstratur

fo Cabo dal Genio
fo Cabo dal Gen
Vivat ingenium

Let Geniuslive in all eternity
Let Genius live in all eternity

334

in utraque expressionum, Res + ck, NonR. + ck necessario
Residua comprehendi et quidem ad minimum ~~sit quidem ea~~. Quare ad minim
valores dantur per A, B, C quibus x congruum esse nequit.

300.

Exempla. Sit aequatio proposita $xx + 3yy = 88801$
quadrat < 298
Quaeraturque $\underline{x}$. Ponendo $p = 5$, erit $88801 - 3$. Non. R sive
~~888~~01 + Res. (exclusa res. $= 0$) i.e 0, et 2 Quare xx non potest
esse $\equiv 0$ neque $x \equiv 0$ (Mod 5) simili modo habebitur

p	Numeri ipsi x incongrui
5	0
7	2, 4, 5
8	0, 2, 4, 6 i.e
9	0
3	0

x non potest esse $\equiv$

0 Mod 3
± 1 Mod 9
~~0~~ Mod 2
± 3 Mod. 8

His vero eiectis restabunt

7	79	151	223	295
23	95	167	239	
25	97	169	241	
31	103	175	247	
41	113	185	257	
47	119	191	263	
49	121	193	265	
65	137	209	281	

Porro non $\equiv$
$\pm 2, 3$ Mod 7
$\pm 1, 5$ Mod. 11

Eiectis his remanebunt
7.41.97.113.119.167.169.209.223.239.295.

Porro non
$\equiv 0$ Mod 5
~~$\pm$ 2, 3, 7,~~ 12 Mod. 25
$\pm 4, 6, 9, 11$

Quibus eiectis supererunt
~~[illegible]~~ 7. 97.113.167.223.

Si ponatur $p = 13$ eiiciendi ii qui sunt $\equiv \pm 0, 2, 3, 4$ Quo facto remanebunt
7, 97, est vero $3.172^2 + 7^2 = 88809$

36 ~~41a/335~~

Si malimus y ~~prim~~ ante invenire Calculus ita esset instituendus

y erit $< \sqrt{\frac{88801}{3}}$ i.e. < 173

Jam invenietur y ~~non~~ debere esse incongruum secundum

modulum	numeris
2	1
4	2

Hinc poni poterit ~~yx~~ $y = 4z$ quare

$xx + 48zz = 88801$ eritque $z < 44$

Debet autem z esse incongruum secundum

modulum	numeris
5	± 1
7	$\pm 0, 2$
11	$\pm 3, 5$
13	$\pm 0, 1, 3, 5$

Quibus exclusis remanent
15. 20. 22. 32. 43

Quodsi adhuc poneremus
$p = 17$ etiam 15, 20, 32 abirent
est autem ut vidimus $z = 43$

Simul per hanc methodum colligitur 88801 unico tantum modo in forma $\square + 3\square$ esse contentum.

301

Facile intelligitur si quaeratur x tum ~~multiplicare~~ p ipsum ad a primum ~~esse~~ dividere non debere. Alias enim $\frac{c - b\,N.R.}{p}$ semper fit ~~indeterminatus~~ imaginarium quoniam $\frac{c}{b}$ (Mod a) adeoque etiam $\frac{c}{b}$ (Mod p) semper est Residuum. Si itaque ut in nostro exemplo $a = 1$, $b = 3$ y quidem iam per se intra arctiores limites includitur quam x adeoque numerorum qui examini subiiciendorum multitudo erit minor; sed hoc iure compensatur quod si y quaeratur $p = 3$ poneri non licet, adeoque hoc criterio caremus. In genere tamen ~~commodius~~ expeditius est x quaerere si $a < b$ et y si $b < a$. Cuius rationem

336

periti facile evolvere poterunt.

Quamquam principium cui methodus haec innititur aeque ad aequationes $axx-byy=c$ sese extendat tamen hic nullum usum habere potest quoniam x et y ~~intra limites immensos~~ limites intra quos exhiberi possunt tantummodo sunt immensi. Unicus casus excipitur ubi a et $b=1$ hic enim y necessario inter 1 et $2c$ haereret. Sed etiam hic limes nisi coarctari posset tam vagus esset ut ~~sit~~ labor ~~inde proveniret~~ nimis magnus inde proveniret. Statim plura de hoc casu dicemus.

302

De investigatione ~~factorum~~ divisorum numerorum.

Problema quomodo numeri primi a compositis dignosci horumque divisores inveniri possit ~~cum inde~~ ab antiquissimis temporibus ~~ad~~ nostram aetatem usque geometrarum sagacitatem occupavit (nulli que forsan plus studii est impensum) tam ob elegantiam suam singularem quam ob utilitatem ~~quam~~ per totam in arithmeticam ~~pro~~ utilitatem. Quod quidem ad hanc attinet ~~nos~~ tabulae numeros primos, compositorumque divisores exhibentes ~~plerumque~~ in plerisque casibus sufficiunt; sed huiusmodi tabulae etiam si ad millionem sint productae *) tamen haud raro casus occurrunt ubi ~~determinate~~ numerorum ~~hunc~~ hunc limitem excedentium divisores quaerantur; quare ~~etiam~~ hoc problema tot elegans etiamnum meretur ut omni industria consideretur quum plurimae solutiones in praxi plerumque nullam omnino ob prolixitatem usum habeant. Nobis quidem videtur methodos quas explicabimus

*) Optandum esset ut tabula haec quatenus a pluribus est computata in publicum ederetur; quod quantum mihi innotuit nondum est factum.