$$\int \frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}} = \frac{\cancel{\pi}\,2}{\int \sqrt{\sin x}\,.\,dx} = 1,311031$$

nach Stirling De summatione et interpolatione serierum

6
5244124 | 4,57655
755876
655516
100360
91772
8588
7866
722
656
66

1,3110287771 4605987

$$\int \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+ss)}} \qquad 1,2453$$

$\frac{1}{2}$ 1−ss

$$x = y + a y^{m+1} + b y^{2m+1} \ldots$$

$$y = x - a \cancel{A} x^{m+1} - \left.\begin{array}{l} a^2 A \\ + \frac{2m+2}{2} b^2 B \end{array}\right| x^{2m+1}$$

208 . 600

$$\left.\begin{array}{l} - a^3 A \\ + \frac{3m+2}{2} b^3 L \\ - \frac{3m+2.3m+3}{2.3} c^3 C \end{array}\right| x^{3m+1} \qquad \&c$$

− 3000
+ 7280
− 4368

(A)

0,2 $\frac{3.5}{4.4}$ 221 2048

5304
00776

$$\int dx \sqrt[4]{\frac{1-vx^4}{1-x^4}}$$

1,0375

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{24} - \frac{5}{208} + \frac{35}{17.128} - \&c$$

$$1 = \frac{1}{2} v \left(\sqrt[4]{\frac{1-v^5}{1-v^4}} + 1\right)$$

$$\frac{1}{6} v \left(1 + 4\sqrt[4]{\frac{16-v^5}{16-v^4}} + \sqrt[4]{\frac{1-v^5}{1-v^4}}\right)$$

$\frac{1}{6}(2+4$

$\frac{1.3}{2.4}$ 9 $\frac{1.3.5}{2.4.6}$ 13 $\frac{1}{2}$

22100
35360

$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$ 17

$$1 \;[illegible]\; \frac{1}{10} \;[illegible]\; \frac{1}{24} \;[illegible]\; \frac{5}{208} \;[illegible]\; \frac{35}{17.128} \ldots$$

$$+ \frac{1}{20} + \frac{7}{120} + \frac{9}{208}$$

$$- \frac{7}{200} + \frac{1}{64}$$

$$- \frac{57}{800}$$

$$+ \frac{57}{2000}$$

− 750
+ 1820
1092

17.3000.9

17.128.13.8.125

2026 − ~~170625~~ + ~~459000~~

308815 − 56875 + 153000

~~44200~~ 55250

251940 100776

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{120} - \frac{11}{15600} + \frac{211\ \cancel{869}}{3536000}$$

313235 317655 309026
09026 09026
4209 8629

Mr. de la Grange dans son excellent Memoire sur la resolution des équations numeriques, après avoir montrée que sa methode fait connoitre les racines commensurables ~~du~~ non seulement du premier degré mais aussi du second, continue :

„ Il seroit à souhaiter que l'on put trouver
„ aussi quelque caractere qui put servir à faire
„ reconnoître les diviseurs commensurables du troi-
„ sieme quatrieme &c. degré, lorsqu'il y en a
„ dans ~~les~~ équations proposée : c'est du moins
„ une recherche qui me paroit tres dignes d'occuper
„ les Geometres.

Hist. de l'Ac. de Prusse
année 1768. p. 149.

$$\int . \sqrt{\sin x}\, \partial x = \tfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - \int \partial x(\sqrt{x} - \sqrt{\sin x})$$

$$= 2\int \frac{pp\,\partial p}{\sqrt{(1-p^4)}}$$

$17.2^7.5^3.13$

$\frac{171}{4000}$

684
1368
1368
140164

153000 | 56875
55250 | 150164
208250 | 208039
7039
4211

0.7849171
1363706
1.6337417
1794738
1.5163437
2928571

4.543704 $\times \frac{\pi}{12} = 1,189539$

Fuss 1,198 ± $= \frac{\pi}{}$

Euler applicat. mea
mea reductione

$\frac{45}{16000}$ 1,198122

11
3
15600
1200
240
80

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{120} - \frac{11}{15600} + \frac{211}{3536000}$$

$\frac{1}{2}.\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{5}.\frac{1}{9}$ | $\frac{33.}{80}$ $\frac{1.1.1.}{5.9.13}$

$\frac{211.9}{3200}$ $\frac{1.1.1.1}{5.9.13.17.}$

$\int x,$

$\int . x\,dx = \frac{1}{2}\overline{x.x-1} + \frac{1}{2}x$

$\int . x.x-1.dx = \frac{1}{3}.\overline{x.x-1.x-2} + \frac{1}{2}x.x-1 - \frac{1}{6}x$

$= \frac{1}{4}\overline{x.x-1.x-2.x-3} + \frac{1}{2}\overline{x.x-1.x-2} - \frac{1}{4}\overline{x.x-1}$

$+ \frac{1}{4}x$

$1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} \ldots\ldots = 0.916$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots\ldots = \frac{\pi\pi}{6} = 1,6$

$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \ldots\ldots = \frac{\pi\pi}{8} = 1,2$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} \ldots = \frac{\pi\pi}{24} = 0.4$

$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{49} + \frac{1}{100} \ldots =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{64} + \frac{1}{121} \ldots =$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{81} + \frac{1}{144} \ldots = \frac{\pi\pi}{54} = 0,18$

$1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{81} + \frac{1}{169} \ldots = 1,074833$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{36} + \frac{1}{100} + \frac{1}{196} \ldots = \frac{1}{32}\pi\pi$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{49} + \frac{1}{121} + \frac{1}{225} \ldots = 0,15886\ldots$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{144} + \frac{1}{256} \ldots = \frac{1}{96}\pi\pi$ $\qquad \frac{1}{1+tt}$

Nach La Place ist $\int e^{-tt}\,dt$ v. $t=0$ bis $t=\infty$ $\qquad \frac{dt}{dt} = \frac{2}{1+tt}$

$= 2\sqrt{\pi}$

$\frac{dd\varphi}{dt^2} = -2t$ $\qquad e \quad e^{-\varphi\varphi+2\varphi}\,dt$

$e^{-tt-uu}\,dt\,du$

$e^{-rr-ss}\,dt$

Die
Arithmetik
und
Algebra

zum
Gebrauch bey dem Unterrichte

entworfen

von

Christian Leiste
Professor und Rector des Herzogl. Gymnasiums
zu Wolfenbüttel.

Wolfenbüttel, 1790.
bey dem Verfasser, und in Commission bey der Crusiusschen
Buchhandlung in Leipzig.

Theoremata

2 1 5 0 7 8 7 5 0

8164965809 27726
170 1034543599 4
1033614740034
7895668 1530

8346194977 85284
6682531640
834626180316924
599571589
834626779888513
5562862
834626836751375
S. 5344024
0,834626841095399
521297
0,834626841616696
51583
0,834626841668279
5169
523
536

+1 +1
+1 −1
+1 +3
+1 −3
−1 +1
−1 −1

~~−1 −1~~
~~−1 +3~~

−1 +3
−1 −3

+3 −1
−3 −1
−3 −3
+3 +3

5212970
434414
4778556
136071
4642485

+3 +1
+3 −3
−3 +1
−3 +3

33.35
36.36.9

51583
107

3739
40.40.9

41.43
44.44.9

481

24.31
32.32.9

1701034543599 4
2126293179499 2
148840 2 25649475
1240337 68804123

17.19
20.20.9

323
3600

5344023 8
59378
53380860
66726075
8340759
1042594

+1.+1 | −1+3
+1.−1 | −1−3
+1.+3 | −3−3
+1.−3 | +3+3
−1−1
+3−3

$$\Pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{16}\right)^2 \frac{1}{8} \cdots\right)$$

0,834626841674090

1763
17424

~~0.785 × 0.1~~

1.57 × 0.707

1936
1936
1296 / 15.15
16.16.9.3

118
406

43

1099
1099

1,1 × 1,125 / 33

1033614740034
861345616695
717788013 91

− 4 − 5

268571452
72,951449
2740525

7 / 41.23
24 24 / 9.3

5.47
48.48

1.17

2350
2304

7895668 1530
182457
65797234608
1028081791
1825316399

− 3 − 7

75
784

25.273
28.28.9

$\frac{1}{\sqrt{(1+ss)^2}}$

$\frac{d\varphi}{\sqrt{(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}c)}}$

$\sqrt{(1 - \frac{1}{3}c)}$

+1 ±1.3 | −1 ±3
−1 −1 | −3 −3
+3 −3 | +3 +3

558628621
21485716
537142905
2740525
534402380

1113755 2733
6682531640
668253164
~~73507845904~~
2

11907
93 $\sqrt{\frac{2}{3}}$

$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}c$
$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\;\frac{1}{9}cc$

$\frac{1}{2}\;\frac{3}{4}\;\frac{5}{6}\;\frac{7}{8}$

$\frac{1}{2}\;\frac{3}{4}$

6014278476
18562588
5995715888
249821495
5745894393
159608177
5586286216

33
0,816149
1701
103
8

0 8 3 4 6 1

$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\;\frac{3}{4}\;\frac{1}{9}$

35
64.9

$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\;\frac{1}{81}$

$\frac{5}{6}\;\frac{9}{10}\;\frac{11}{12}$ 9

1133
708

Vorbericht.

Daß ich bey dem ansehnlichen Vorrath der vortrefflichsten Lehrbücher fast über jeden Theil der Mathematik, und besonders über die Arithmetik und Algebra, es noch gewagt habe, diese beiden Wissenschaften auf so wenigen Bogen zusammenzudrängen, ist eine Art der Verleugnung, dazu ich mich endlich nach einem vieljährigen Unterricht entschlossen habe. Immer fehlte dem größten Theile meiner Schüler das Lehrbuch, welches ich zum Grunde legen wollte, und zwar sehr häufig wegen der Kosten, die sie auf so viele andere Schulbücher zu verwenden hatten. Mehr als einmal faßte ich daher den Entschluß, mich selbst in den Stand zu setzen, daß ich den Dürftigern, wenn sie nur Lust zu der Wissenschaft hätten, selbst mit einem solchen Buche aushelfen könnte. Ich fing an zu schreiben, und ließ mich immer zu Betrachtungen hinreissen, die entweder zu weitläuftig, oder zu schwer für Anfänger waren; und ich gestehe es, es ward mir zu schwer, gerade diejenigen auszulassen, wobey ich selbst glaubte etwas zur Erweiterung der Wissenschaft thun zu können. Nachgerade bin ich von dieser Vorstellung abgekommen. Ich habe gefunden, daß der größte Theil von meinen eigenen Erfindungen, die mir so werth waren, schon von andern, und zum Theil ausführlicher und allgemeiner, abgehandelt ist, und kann deshalb nun weit geduldiger ausstreichen als sonst. Aber das Ausstreichen solcher Sachen, daran man weiter nichts zu tadeln hat, als daß die vorgesetzte Gränze dadurch überschritten wird, bleibt doch immer Verleugnung.

Vielleicht werden manche doch noch glauben, daß ich nicht genug weggestrichen habe. Es kann seyn; aber nach

 meiner

meiner Ueberzeugung hat ein Lehrbuch, darin nichts für die Forschbegierde und den eigenen Fleiß aufgeweckterer Köpfe aufbewahrt ist, einen wesentlichen Fehler. Gerade das spornet sie zum eigenen Fleiß an, wenn man solche Sätze mit der Erinnerung übergeht, daß man versuchen wolle, ob wol einige durch eigenes Nachdenken sie auflösen könnten. Der Lehrer hat dabey die Freude, dem Fleißigern, wenn er nicht damit fertig werden kann, noch besonders zu helfen; und bisweilen weckt solche Vorstellung die Wißbegierde Aller. Ist aber diese rege: so getraue ich mir, jeden hier vorgetragenen Satz auch mäßigen Köpfen vollkommen deutlich zu machen.

Außerdem wollte ich die Gründe von allen Rechnungsarten des gemeinen Lebens hier vortragen und so viele Exempel davon geben, als meiner Meynung nach hinlänglich sind, um jedes ordentlich geschriebene Rechenbuch nicht nur zu verstehen, sondern auch andern deutlich zu erklären.

Was die Methode anlangt: so wird es wol keiner tadeln, daß ich die Buchstaben-Rechnung gleich vom Anfang an mit dem Gebrauche der gemeinen Zahlen verbunden habe. Man lernet so unvermerkt damit umgehen, und siehet gar bald, daß es im Grunde leichter sey, mit diesen allgemeinen Zeichen, als mit Ziffern zu rechnen. Hauptsächlich habe ich mich bemühet, alles auf den Begriff des Verhältnisses zu bauen, und ich habe deshalb den allgemeinen Ausdruck der Zahl §. 21. so gewählt, daß man aus diesem Begriff alle Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen leicht herleiten kann. Verschiedene Lehrsätze, z. B. die von der Division der Brüche, von der sogenannten verkehrten Regel de tri u. e. a. glaube ich auch einfacher und allgemein verständlicher vorgetragen zu haben, als in den mir bekannten Handbüchern dieser Art geschehen ist. Doch das ist nicht nöthig, meinen Schülern zu sagen, denen diese Blätter gewidmet sind. Ihnen wird es nützlicher seyn, eine kurze Geschichte der Wissenschaft hieher zu setzen.

Wann diese Wissenschaften erfunden worden sind, ist eine Frage, die nicht die Geschichte, wohl aber der gemeinste Mann durch sein eigenes Beyspiel beantwortet. Dieser macht oft, ohne in der Zahlenlehre den geringsten Unterricht zu haben, manche artige algebraische Auflösung im Kopfe, und beweiset dadurch deutlich, daß der Mensch zu diesem höchst nöthigen Bedürfnisse des gesellschaftlichen Lebens, auch ohne Unterweisung, Erfindungskraft genug habe, und daß einige sogar weiter darin kommen können, als es ihr eigenes Bedürfniß erfordert. Ehe uns daher die Geschichte einen Erfinder in dieser Wissenschaft nennt, gab es schon Astronomen und andere Rechenmeister. Auch finden wir in unserer ältesten Urkunde, in der Bibel, vielerley Rechnungen in ganzen und gebrochenen Zahlen, und sicher würden wir noch schwerere Probleme bey handelnden Nationen in den ältesten Zeiten finden, wenn unsere Nachrichten von ihnen so weit reichten. Die Zahlen selbst druckten fast alle Völker, welche eine Buchstabenschrift hatten, nach dem **decadischen Gesetze** §. 4. durch Buchstaben aus, wo aber Bilderschrift war, durch Bilder. Dergleichen **Bilderschrift** sind unsere gemeinen **Ziffern**, die wir im 10ten Jahrhundert nach Christi Geburt von den Arabern, die Araber aber nach dem Zeugniß des **Johann de Sacro Bosco** u. a. von den Indiern empfangen haben.

Schon lange also konnte man multipliciren und dividiren, und zwar mit sehr großen Zahlen. Es ist daher noch sehr zweifelhaft, ob erst 550 Jahre vor Christi Geburt das **Ein mal eins** (§. 11.) vom **Pythagoras** aus Samos erfunden sey? Wahrscheinlich aber ist es, daß dieser Philosoph, der sich so viel mit den besondern Eigenschaften der Zahlen abgab, und Geheimnisse, wahrscheinlich um die Forschbegierde seiner Zeitgenossen zu reizen, darin bemerkt haben wollte, die **Polygonal-Zahlen** erfunden. Auch mit den **Irrational-Zahlen** (§. 45.), besonders den Quadrat- und Cubic-Wurzeln, scheint er, wie alle folgende Mathematiker, sich viel beschäftigt zu haben.

 Weil

Weil aber der Werth aller solcher Größen arithmetisch nur durch Näherung gefunden werden kann: so suchte man ihn durch eine geometrische Verzeichnung, die für den mechanischen Arbeiter immer die liebste ist, zu bestimmen; und so entstand allmählig die Lehre von geometrischen **Oertern**, und die ganze **geometrische Analysis**, der wir so ungemein viele Erfindungen in der Mathematik zu verdanken haben. Mit den Quadrat-Wurzeln ward Pythagoras fertig. Er fand, daß in einem rechtwinklichten Dreyeck die dem rechten Winkel gegen über stehende Seite genau die Wurzel eines Quadrats sey, dessen Größe so viel beträgt, als die mit den beiden andern Seiten beschriebenen Quadrate zusammen genommen; wodurch also ohne Mühe die Seite oder Wurzel eines doppelten, dreyfachen und vielfachen Quadrats ohne Rechnung gefunden werden kann. Für die Cubic-Wurzel aber fand man in der ganzen Elementar-Geometrie kein solches Mittel. Daher ersann man neue krumme Linien, und um den Fleiß der Philosophen noch mehr darauf zu richten, wußte man sogar in die Pythia einen mathematischen Geist hineinzubringen: das delphische Orakel verordnete die Verdoppelung des Würfels als ein Mittel wider die Pest — der Altar nämlich, welcher ein Würfel war, sollte genau noch einmal so groß gemacht werden. **Plato**, der 430 Jahr vor Christo geboren, und sein Lehrmeister Archytas von Tarent, ein Pythagoräer, an dessen fliegende Taube uns die Luftbälle wieder erinnert, ferner der Astronom **Eudoxus** aus Enidus, der Begleiter des Plato auf seinen Reisen, suchten es mechanisch zu bewerkstelligen; aber **Menechmus** und **Dinostratus**, Schüler des Eudoxus, dachten schon auf scharfsinnige geometrische Constructionen, und noch vor ihnen fand **Hippocrates**, nach dem Bericht des Eutocius, daß es hier auf die Erfindung zwoer mittlern Proportional-Linien ankomme, die mit den Seiten des gegebenen und des zu findenden Würfels das Verhältniß a, ae, ae^2, ae^3 (§. 145.) geben. Denn so bekäme man leicht $ae^3 = 2a$, oder $e^3 - 2 = 0$ eine reine cubische Gleichung, deren Wurzel man durch eine bloße geometrische Verzeichnung, ohne solche Rechnung wie §. 103. finden könnte.

Zween Männer im 3ten Jahrhundert vor Christi Geburt, die eine Zierde jedes Zeitalters seyn würden, machen eine große Epoche in dieser Wissenschaft. Der erste, **Euklides**, dessen Herkunft wir nicht wissen, machte unter dem ersten Lagiden in Egypten, **Ptolemäus Soter** (reg. von 3660—3700) Alexandrien zu einer Schule der Mathematik, durch welche die Griechen die ersten Lehrer und Erfinder in dieser Wissenschaft geworden sind. Seine Elemente sind nicht nur in der Geometrie, sondern auch in der Arithmetik, besonders in der Lehre von den Proportionen, Rational- und Irrational-Zahlen, von großem Werthe. Der andere noch größere Mann, **Archimedes** von Syracus, der im 2ten Punischen Kriege 3 Jahr lang durch seine Mechanik diese Stadt gegen die siegende Macht der Römer vertheidigte, und in neuen Erfindungen vertieft im J. d. W. 3772 sein Leben durch einen erzürnten Römer verlor, hat in allen Theilen der Mathematik ungemein große Entdeckungen gemacht. Auf die Frage: ob es möglich sey, den Sand des Meers durch eine Zahl auszudrucken, verfertigte er eine geometrische Reihe, deren höchstes Glied groß genug für alle Sandkörner wäre, um allen Raum zwischen hier und der Sonne damit anzufüllen. Er hatte überhaupt viel mit großen Zahlen zu thun, wie man auch aus dem von **Lessing** in seinem ersten Beytrage zur Geschichte und Literatur S. 423. mitgetheilten Problem, das er an den Eratosthenes geschickt haben soll, um es den Meßkünstlern zu Alexandrien zur Auflösung vorzulegen, deutlich sieht. Eben dieses Problem macht es wahrscheinlich, daß er in Aufsuchung der Irrational-Wurzeln schon ungemein weit gegangen, und dabey sich selbst solche Fälle vorgegeben, wo die rationale Wurzel aus so ungemein viel Theilen besteht. Auch hat man deutliche Spuren, daß er sich schon mit der Analysis des Unendlichen abgegeben habe.

Die Aufspürung des Betrugs mit einer goldenen Krone von 18 Pfund, die ein Goldschmidt für den König Hiero hatte machen müssen, machte ihn zum Erfinder der Hydrostatik und der Alligations-Regel §. 133. 6., wo p = 18 Pfund, a und b die Verluste von 18 Pfund reines Goldes und Silbers im Wasser, c aber den Verlust der Krone im Wasser bedeuten. Zu seiner Zeit lebte zu Alexandrien, ausser dem vorhin gedachten **Eratosthenes**, der auch die Prim-Zahlen (§. 34.) untersucht, der Geometer **Apollonius**, der die Verdoppelung des Würfels durch eine geometrische Construction auflösete, und Untersuchungen über das Größte und Kleinste und manche andere Dinge, die jetzt durch Hülfe der Differential-Rechnung aufgelöset werden, anstellte.

Rom ward im J. d. W. 3838 herrschend, nicht zum Vortheile der Mathematik. Das Volk, bey dem Mathematici und Malefici unter einem Titel stehen, wird nichts für die Theorie dieser Wissenschaft thun, wenn es auch ihrer Anwendung in vielen Fällen gar nicht entbehren kann. Nur einige große Genies erhoben sich über dieses Vorurtheil, und ihr Beyspiel wirkte endlich auf andere. **M. Terentius Varro**, Cicero's Freund, den man den Plato der Lateiner nennet, schrieb mathematische Bücher, unter andern eine Arithmetik, die aber P. Gregor VII. nebst andern seiner Schriften verbrennen ließ, weil ihn Augustin öfters ausgeschrieben. Zu Theodosius und Valentinians Zeiten hießen endlich die Mathematiker spectabiles et clarissimi. Die Folge war, daß sich mehrere darauf legten. Aber schon im 2ten Jahrhundert, besonders zu Alexandrien, trieb man diese Wissenschaft eifrig. **Nicomachus**, ein Pythagoräer, und **Theon** aus Smyrna, der Zeitgenosse des großen **Ptolemäus** zu Alexandrien, bearbeiteten die Arithmetik. Ob der berühmte Algebraist **Diophantus**, dessen arithmetische Probleme von mehrern herausgegeben und bearbeitet sind, und von dem die Kunst, unbestimmte Aufgaben aufzulösen, Ars Diophantea genennt wird, um diese Zeit gelebt habe, ist ungewiß. Vor dem 4ten Jahrhundert

hundert muß er wol gesetzt werden: denn in der Mitte desselben lebten **Theon** aus Alexandrien (um 365), der berühmte Ausleger des Euklides und des Ptolemäus, und seine gelehrte unglückliche Tochter **Hypatia**, welche über seine arithmetischen Aufgaben geschrieben hat. **Diophantus** kannte schon die Auflösung der quadratischen Gleichung §. 182. und hatte für die Potenzen zwar andere, aber eben so bestimmte Zeichen, wie wir.

Im 5ten Jahrhundert hatte die Mathematik bey der Völkerwanderung das Schicksal anderer Wissenschaften, und nur einigen wenigen Schriftstellern ist man es schuldig, daß sie in Europa nicht ganz unbekannt wurde. Dahin gehören **Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius**, dreymal Röm. Consul und nachher Staatsminister des Ostgothischen Königs Theoderich, der ihn aber wegen schuldgegebener Verbindung mit dem Hofe zu Constantinopel 525. oder 526. enthaupten ließ. Seine Arithmetik und Geometrie blieb lange das Hauptbuch, woraus man diese Wissenschaften lernte. Sein Zeitgenosse, der ihn überlebte, war der bekannte **Priscianus** von Cäsarea. Aus den folgenden Jahrhunderten bis zur Wiederherstellung der Wissenschaften, verdienen der Engländer **Beda Venerabilis** († 735) und sein Schüler **Alcuin**, Carls des Großen Lehrer, **Michael Psellus** um 1105, und **Joan de Sacro Bosco** († 1256) ein klassischer Schriftsteller in der Astronomie, der nach Heilbronners Historie der Mathematik ein Algorismum s. arithmeticam introductionem Venet. 1523. 4. geschrieben, bemerkt zu werden.

Die Wissenschaften hatten unterdeß eine willige Aufnahme bey den Arabern gefunden. Eben das Volk, das auf Befehl des Khalifs Omar im Jahr 640 zum unersetzlichen Verlust für alle Wissenschaften die Bibliothek zu Alexandrien zerstörte, und mit diesen Schätzen allein 4000 Bäder 6 Monat lang heitzen ließ, bekam, der wilden Eroberungen müde, seit Gründung des Khalifats zu Bagdad, unter den Abassiden, eine solche Neigung zu den Wissenschaften, und besonders der Mathematik, daß zu der Zeit vielleicht keine Eroberung für sie so schätzbar würde gewesen seyn, als die Bibliothek von Alexandrien. Der Khalif **Aaron** oder **Harum al Raschid** zog eine Menge von Gelehrten an seinen Hof, ließ verschiedene Schriftsteller ins Arabische übersetzen, und schickte selbst in dieser Angelegenheit eine Gesandtschaft an Carl den Großen. Noch mehr that sein 2ter Sohn, der Khalif **Al Mamon**, er schafte sich die besten griechischen Original-Schriften an, und hielt eine große Menge Uebersetzer, deren erste Arbeit, wegen der Vorliebe des Khalifen für die Astronomie, die Uebersetzung des **Ptolemäus** war. Diesem folgte **Euklides, Apollonius** und **Archimedes**. Nicht lange darauf zeigte sich der Erfindungsgeist dieses Volks selbst. Sie führten die Sinus statt der Sehnen in der Trigonometrie ein. **Alhazen** schrieb eine Optic, die der beste Beweis seiner tiefen Kenntnisse in der Geometrie und Analysis ist. Die Fürsten selbst wurden nicht nur fleißige Beobachter, sondern auch sorgfältige Rechner in der Astronomie, und mit diesen Producten verbanden sie die Schätze ihrer Nachbaren. Von den Indiern entlehnten sie unsere jetzigen Ziffern, und die leichtere Rechnungsart damit, die sich, nebst ihren andern gelehrten Kenntnissen, bald bis nach Spanien verbreitete. Von da brachte der Mönch **Gerbert**, nachmals Pabst **Sylvester** II. diese Zahlzeichen schon gegen 960 oder 970 nach Frankreich. Der große **Bacon** († 1292) und andere Gelehrte lernten deshalb sogar ihre Sprache, um aus ihren Schriften die Schätze der ächten Gelehrsamkeit wieder zusammen zu suchen. Ueberhaupt erwachte in diesem 13ten Jahrhundert der Trieb zur Mathematik, vorzüglich zur Astronomie, in mehrern Reichen des westlichen Europa. Der König **Alphonsus** von Castilien verfertigte astronomische Tafeln. **Albert** der Große, ein Deutscher, schrieb noch eher als dieser, 4 Bücher über die Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie. Im 14ten Jahrhundert schrieb der gelehrte Mönch zu Constantinopel **Maximus Planudes** Scholia über den Diophantus, und bediente sich unter den Griechen

zuerst

zuerst der indischen oder arabischen Ziffern; und Leibnitz gedenkt des scharfsinnigen Engländers **Richard Suisset** als eines großen Calculators in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts. Noch reicher an solchen Gelehrten war das 15te Jahrhundert. Die größten unter ihnen waren Deutsche. Der Cardinal **Nicol. von Cusa** (von seinem Geburtsorte im Trierschen), der bekannte Vorgänger des Copernikus († 1464.), **Georg von Peurbach** († 1461.), dessen Arithmetik Melanchthon herausgegeben, und sein großer Schüler **Johann Müller** (von seinem Geburtsorte Königsberg im Fränkischen gewöhnlich Regiomontanus genannt) verdienen hier den ersten Platz. Regiomontan besonders übersetzte in einer sehr kurzen Zeit eine große Anzahl der alten klassischen Schriftsteller Griechenlands über die Mathematik, verband die Algebra mit der Geometrie, führte die Decimal-Rechnung in den astronomischen Tafeln ein, arbeitete an der Verbesserung des Kalenders, brachte die Buchdruckerkunst durch die Walthersche Officin in Nürnberg in einen bessern Stand, belebte die mechanischen Talente der Nürnberger durch seine eiserne Mücke, die vermuthlich vermittelst eines Magnets unter seinen Gästen herumflog, und dann wieder auf der Hand des Künstlers ausruhete; starb aber schon 1475. im 41sten Jahre seines Alters.

Unter den Ausländern verdienen **Leonhard von Pisa** und nach ihm gegen das Ende des Jahrhunderts **Lucas Pacioli dal Borgo S. Sepolcro**, dessen Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalità, Venet. 1494. oder vielmehr dessen zweytes Werk Divina Proportione Venet. 1509. gewöhnlich für die erste aus Arabien nach Europa gebrachte Algebra gehalten wird, bemerkt zu werden. **Pacioli** hat, wie er selbst sagt, unter andern den Leonhard von Pisa bey seinem Werke gebraucht. Die so genannte Regula Falsi nennt er mit dem arabischen Namen Helcataim, und die Algebra l'Arte maggiore, auch Divina Proportione, von andern auch Regola di Cosa oder arabisch Algebra u Almucabalah genannt. Das erste von

von diesen beiden Wörtern bedeutet die Reduction oder Verbindung der zusammen gehörigen Theile zu einem Ganzen, das andere den Gegensatz und die Vergleichung, welches beides zur Auflösung einer Gleichung erforderlich ist. Regola di Cosa, oder, wie sie bey den Deutschen genannt wurde, die Regel Cos begreift eigentlich die Auflösung quadratischer Gleichungen. Cosa, Censo, Cubo Relato, auch Censi Census, hieß nämlich bey ihnen, was wir Wurzel, Quadrat, Cubus und Biquadrat nennen.

Aus dem 16ten Jahrhundert bemerken wir **Adam Riesen**, den Heerführer der deutschen Rechenmeister, dessen Genauigkeit im Rechnen zum Sprüchwort geworden, nebst seinen 3 Söhnen, **Abraham, Isaak** und **Jakob**; ferner **Christoph Rudolph**, einen Schlesier, dessen Regel Cos 1525. die erste deutsche Algebra ist, und **Michael Stiefel**, der Rudolphs Regel Cos in einem Quartanten 1546. erläuterte, und selbst eine Arithmetica integra mit Melanchthons Vorrede zu Nürnberg 1544. herausgab. Er ist der erste, der es versuchte, die arithmetische Reihe zur Bestimmung der geometrischen anzuwenden, und also sie als Logarithmen derselben gebrauchen wollte.

Alle diese genannten Schriftsteller gingen in ihren Auflösungen nicht weiter, als bis auf die quadratischen Gleichungen. Eine cubische Gleichung aufzulösen, entdeckte **Nicolaus Tartaglia**, wie Cardan erzählt, in einem Wettstreite mit einem gewissen Antonio del Fiore, der dieses Geheimniß von seinem Lehrer Scipio Ferreo aus Bologna gelernet hatte. **Cardan**, dem Tartaglia seine Entdeckung mitgetheilt, machte sie wider sein Versprechen in seiner Algebra oder Arte Magna 1545. bekannt, daher sie Cardans Regel heißt. Sie steht §. 187. Bald darauf fand **Ludewig Ferrari** aus Bologna noch eine Regel biquadratische Gleichungen aufzulösen, welche **Raphael Bombelli** in seiner Algebra 1589. bekannt machte.

Wichtiger indeß für die Analysis, als alle diese Regeln, sind die Entdeckungen des **Franz Vieta**, von Fontenay in Poitou gebürtig. Dieser berühmte Mann gab der Analysis eine ganz neue vortheilhaftere Gestalt. Statt

der

der Zahlen führte er die großen Buchstaben des Alphabets zur Bezeichnung bekannter Größen ein, zeigte, wie man einer Gleichung die bequemste Gestalt geben könne, lehrte eine unreine quadratische Gleichung durch Wegschaffung des 2ten Gliedes (nach der allgemeinen Formel §. 197.) in eine reine verwandeln, lösete die Cubische Gleichung nach einer ihm ganz eigenen Methode auf, zeigte überhaupt wie man unreine Gleichungen von jedem Grade auflösen könne, und drückte sich am Ende seiner Schrift de Emendatione Aequationum über die Natur der Gleichungen so aus, daß **Harriotte** und **Descartes** nachher ihre Theorien darauf baueten.

Dies waren die Grundlagen zu den im 17ten Jahrhundert so sehr erweiterten Kenntnissen. Man kann behaupten, daß, so viel auch alle Arten der menschlichen Kenntnisse seit der Buchdruckerkunst und Reformation gewonnen, doch keine derselben mit so großen und wichtigen Entdeckungen bereichert worden, als die Mathematik nach allen ihren Theilen in diesem einzigen Jahrhundert. Unter diese rechnen wir in der Arithmetik die Logarithmen. Stiefel hatte zwar ihre Natur entdeckt, aber sie nicht auf wirkliche Rechnungen angewandt. Dies that zuerst **Just Byrge**, Mechanikus des Landgrafen zu Hessen. Hr. Hofr. **Kästner** bekam sie aus einer Auction in einem Packen unter dem Titel: Arithmetische und geometrische Progreß-Tabuln, sambt gründlichen Unterricht, wie solche in allen Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sollen, Prag 1720. 7½ Bogen 4to. Der Unterricht dabey fehlte zwar, aber dem, der den Zahlen es so bald ansehen konnte, was sie bedeuteten, war es auch leicht, diesen Mangel zu ergänzen. Man findet diesen Unterricht in seiner Fortsetzung der Rechenkunst, Göttingen 1786. S. 93 u. f. Daß aber **Byrgs** Logarithmen so unbemerkt blieben, rührt daher, weil **Joh. Neper**, Baron von **Merchiston**, seine Logarithmen schon 1619. herausgab, welche **Benjamin Ursin**, (eigentlich **Behr**, ein Schlesier,) Lehrer der Mathematik in Beuthen, darauf in Berlin am Joachimsthalschen Gymnasio, und zuletzt Prof. der Mathematik in Frankfurt, so-

gleich

gleich durch den Druck bekannt machte. Gleich darauf arbeitete **Heinrich Brigg**, Prof. der Geom. zu Oxford, ein bequemeres und vollständigeres Logarithmen-System mit Anwendung auf die Sinus und Tangenten aus, welches selbst die Neperschen Logarithmen verdrängt hat. **Gellibrand** und **Adrian Vlaq** zu Gouda arbeiteten mit an der Vollständigkeit der Briggischen Tafeln, und diese sind es, die wir noch gebrauchen. Sie kamen zuerst 1633. heraus.

Auch **Wilhelm Brounker**, Vicomte in Irland, (geb. 1620. † 1684.) bereicherte die Rechenkunst durch die im Zusatz zu §. 80. am Ende angeführte Reihe von Brüchen, deren er sich zur Berechnung des Kraises bediente.

Die Algebra erhielt folgende Verbesserungen, 1) **Albert Girard** ein holländischer Mathematiker handelte in seinen neuen Erfindungen in der Algebra 1629 zuerst von den negativen und positiven Wurzeln einer Cubischen Gleichung; 2) **Thom. Harriot** (geb. 1560 zu Oxford, + 1621) zeigte in seiner Schrift Artis analyticae praxis ad aequationes algebr. resoluendas die Zerlegung jeder auf Null gebrachten Gleichung in solche Factores, als §. 189 angegeben sind. Auch führte er kleine Buchstaben statt der großen ein, und verband sie nach der Anmerk. §. 13 ohne Multiplicationszeichen; 3) **Des Cartes** oder **Cartesius**, (geb. 1596 zu Haye in Touraine, + 1650 am Hofe der Königin Christina), bezeichnete die Potenzen durch kleine Ziffern rechter Hand über der Linie nach § 40. und führte die negativen Wurzeln in der Geometrie und Analysis ein, nannte sie aber falsche, und sah folglich ihre Natur nicht recht ein. Auch bemerkte er, daß man aus den Abwechselungen zwischen + und — (§. 190.) die Zahl der positiven und negativen Wurzeln finden könne, und fand den Gebrauch der unbestimmten Coefficienten. 4) **Joh. Wallis** (geb. 1616. zu Ashford in der Grafsch. Kent † 1703.) dessen fast unglaubliche Kraft des Gedächtnisses schon allein ihn merkwürdig macht, indem er im Finstern blos durch Kopf-Rechnung die Quadrat-Wurzeln bis auf 12, ja bis auf 40 Zahlstellen ausziehen konnte; wovon **Pelshover**

aus

aus Königsberg 1670 eine Probe gesehen. Er war Doctor der Theologie, und bey Errichtung der königlichen Societät der Wissenschaften einer der ersten und vornehmsten auch im mathematischen Fache. Seine Opera mathematica in drey Folio-Bänden, kamen zu Oxford 1663, 65 und 99 heraus, und enthalten einen großen Schatz von Kenntnissen. Er gebrauchte zuerst die negativen Exponenten für Brüche (§. 51.), stellte Betrachtungen über die Summen der Quadrat- und Cubic-Zahlen (§. 153.) und über die Rechnung des Unendlichen an, und gab nebst **Barrow** 5) dem Erforscher der Natur-Gesetze und Anatomen des Lichtstrahls und unendlich kleiner Größen **Isaak Newton** (geb. 1642 † 1728) die erste Veranlassung zu seinen großen Entdeckungen. Durch seine Reihe für den Krais ward Newton auf die allgemeine Theorie der Reihen des Binomial Satzes §. 104. geleitet, wiewohl diese Erfindung auch dem **Pascal** (geb 1623, † 1662) zugeschrieben wird. **Newton** aber lehrte auch den Gebrauch der gebrochenen Exponenten, erfand die Methode §. 188. und andere Vortheile, um die Wurzeln einer Gleichung zu entdecken. Er zeigte auch, wiewohl nicht so gut, wie **Maclaurin** und **Campbell**, wie die Zahl der unmöglichen Wurzeln in höhern Gleichungen zu finden sey. Schon im 27sten Jahre soll er die Gründe der Fluxions-Rechnung dem Barrow mitgetheilt haben; daraus die ebenfalls von **Leibnitz** erfundene Differenzial- und Integral-Rechnung entstanden ist. 6) **Gottfried Wilhelm Leibnitz**, dieser von allen Nationen hochgeschätzte Gelehrte, ward 1646 zu Leipzig geboren. Er machte sich, theils durch seine eigenen Arbeiten, theils durch die Verbindung der Gelehrten untereinander, die er vorzüglich durch die bewirkte Stiftung mehrerer Akademien beförderte, um alle Theile der Gelehrsamkeit verdient. Durch die höhere Geometrie bahnte er sich den Weg zur Rechnung des Unendlichen, gerieth aber über die Ehre der Erfindung mit **Newton** in einen Streit, und man giebt vor, daß das zu Newtons Vortheil ausgefallene Urtheil der Gelehrten seinen 1716 erfolgten Tod beschleunigt habe. Merkwürdig ist es doch, daß die Engländer ihre erste Kenntniß von dieser Rechnung nicht vom

Newton

Newton selbst, sondern jenseits des Meeres erlangt haben, und noch merkwürdiger, daß keiner von beyden Erfindern, sondern ein Dritter, **Jacob Bernoulli** sie zuerst in solcher Gestalt gezeigt, daß andere ihren großen Werth erkennen konnten. Noch mehr that sein jüngerer Bruder **Johann Bernoulli**. Nicht nur beförderte er die Aufnahme und den Gebrauch dieser Rechnung in Frankreich und andern Ländern, sondern er bereicherte sie auch mit der Exponential-Rechnung, wie sie Leibnitz nannte. Es fehlte nur noch an einem Lehrbuche; und diesen Mangel ersetzte der **Marquis de l'Hopital** durch seine Analyse des infiniment petits, Paris 1696. 4. Auch die Integral-Rechnung wollte er hinzufügen, weil aber Leibnitz sie selbst abhandeln wollte: so legte er seine Feder nieder. Erst 1707 befriedigte **Manfredi** den Wunsch der Gelehrten so gut als es damals geschehen konnte. Man vergißt über diese Erfindung Leibnitzens übrige Arbeiten in der Mathematik, z. B. seine Rechenmaschine, seine Diadic, und was doch wirklich auch wichtig ist, seine Berechnung des Interusuriums. §. 163.

So fing sich dieses Jahrhundert an, in welchem so große und schnelle Riesen-Schritte in allen Theilen der Mathematik und Naturlehre gethan, ganz neue Felder eröffnet, und die eröffneten fast unabsehlich erweitert, dabey aber zugleich solche bequeme Wege angelegt worden sind, daß Anfänger, selbst von mäßigen Fähigkeiten, nicht muthlos werden dürfen, diese weite Bahn zu betreten. Und dieses Verdienst hat selbst der große **Leonhard Euler** (geboren zu Basel 1707 † 1783) ohngeachtet er für Akademien schrieb, und in allen Theilen der Mathematik da fortfuhr, wo seine Vorgänger stehen geblieben waren. Selbst da er des Gebrauchs seiner Augen völlig beraubt war, lieferte er Meisterstücke der subtilsten Analysis, schrieb zugleich Briefe an eine deutsche Prinzessin, und dictirte seinem Bedienten, der ein Schneider war, seine vollständige Anleitung zur Algebra 1770, die seitdem als der faßlichste Commentar über Schriften dieser Art empfohlen wird. Eine kurze Beschreibung seines Lebens von der Hand eines Meisters findet man in der allgemeinen Literatur-Zeitung, Nro. 13. 1785.

Die Verdienste neuer Gelehrten um diese Wissenschaft, und ihre Schriften anzuführen, liegt ausserhalb der Grenze dieser Schrift.

Inhalt.

Einleitung.

* §. 25.

Dritter Abschnitt. Von den Proportionen.

Reihen oder Progressionen.

Vierter Abschnitt. Von den algebraischen Gleichungen.

Veränderung der Gleichungen.

Vollständige Liste von Eulers Werken.

Einzelne Werke.

Dissertatio physica de Sono. Basil. 1727. 4.

Mechanica sive motus scientia analytice exposita Petrop. 1736 2 T. 4.

Einleitung zur Arithmetik Petersb. 1738. 2 Th. 8.

Tentamen novae Theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae. Petrop. 1739. 4.

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis Isoperimetrici latissimo sensu accepti Lausannae 1744. 4.

Theoria motuum planetarum & cometarum continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum plan. tum Comet. determinandi Berol. 1744. 4.

Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit Bewegung und Wirkung der Cometen Berlin 1744. 8

Fortsetzung dieser Beantwortung Berlin 1744. 8

Neue Grundsätze der Artillerie aus dem Englischen des Hrn. B. Robins übersetzt und mit Anmerkungen begleitet. Berlin 1745. 8

Varia Opuscula 3 T. Berol. 1746, 50, 51. 4. 6, 4, 3 Abh.

Nova & correcta tabulae ad loca lunae computanda. Berol. 1746. 4

Tabulae astronomicae solis & lunae ibid eod. 4.

Gedanken von den Elementen der Körper Berlin 1746. 4

Rettung der Offenbarung gegen die Einwürfe der Freigeister Berlin 1747. 8.

Introductio ad analysin infinitorum 2 T. Laus. 1748. 4.

Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Petrop 1749. 2 Vol. 4.

Theoria motuum lunae exhibens omnes corporum inaequalitates cum additamento Berol. 1753. 4.
Dissert. de principio minimae actionis unâ cum examine obiectionum Cl. Prof. Königii contra hoc principium factarum. Ibid. eod. 8.
Institutiones Calculi Differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum Berol. 1755. 4.
Constructio lentium obiectivarum ex duplici vitro Petrop. 1762. 4.
Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum Rostoch 1765. 4
Institutiones Calculi Integralis 3 Tom. Petrop. 1768–70. 4.
Lettres à une princesse d'Allemagne sur quelques sujets de physique et de philosophie. 3 T. Petersb. 1768–72. 8.
Einleitung zur Algebra 2 Theile Petersburg 1770. 8.
Dioptrica. Petrop. 1769, 70, 71, 3 T. 4.
Recherches & Calculs sur l'orbite de la Comete de 1769, executées sous la direction de Mr. L. Euler par Mr. Lexell St. Petersb. 1770. 4.
Theoria Motuum lunae nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis unde ad quodvis tempus loca lunae expedite computare licet. Petrop. 1772. 4.
Novae tabulae lunares singulari methodo constructae, quarum ope loca lunae ad quodvis tempus expedite computare licet Petrop. 1772. 8
Theorie complette de la Construction & de la manoeuvre des vaisseaux St. Petersb. 1773. 8
Instruction detaillée pour porter les lunettes au plus haut degré de leur perfection, calculée sous la direction de Mr. Euler par M. N. Fuss. St. Petersb. 1774. 4.
Eclaircissemens sur les Caisses Mortuaires Calculés sous la direction de Mr. Euler par N. N. Fuss St. Petersb. 1776. 4.
Opuscula Analytica. Petrop. 1783 85. 4.

§. 1.

Die Arithmetik ist ein Theil der Mathematik, die sich mit Größen beschäftigt. Die Vorstellung dieser Größen kann entweder **rein**, d. i. abgesondert von allen übrigen Eigenschaften der Dinge, denen eine Größe zukommt, oder **angewandt** auf dieselben seyn. Daher hat man eine reine und eine angewandte Mathematik. Alles was die reine Vorstellung einer Größe enthält, betrifft entweder die Menge ihrer Theile, oder den Umfang und die Gestalt derselben, oder beydes zugleich. Das erste gehört für die **Arithmetik** oder Zahlenlehre, auch Rechenkunst, das zweyte für die **Geometrie**, das dritte für die Ausrechnung geometrischer Größen, hauptsächlich der Dreyecke, deren Seiten und Winkel in der **Trigonometrie** durch Rechnung bestimmt werden. Man theilt aber die reine Mathematik in Ansehung ihres Umfangs und der Behandlungsart noch in die **Elementar**= und höhere Mathematik (**Analysis**) ein.

In der angewandten Mathematik beschäftigt man sich mit Größen der wirklichen Welt, sowohl in der Natur als Kunst.

1. In der Natur verdienen vorzüglich dergleichen Untersuchung:
   a) die Größe der Kräfte, welche eine Bewegung entweder hindern oder hervorbringen, sowohl an festen als an flüßigen Körpern, selbst mit Rücksicht auf ihre Schnellkraft, wenn sich diese dabey merklich äussert: **Statische** und **Mechanische** Wissenschaften.
   b) die Größe des Lichts und des Feuers, besonders des ersten, welches vorzüglich geometrischer Untersuchungen fähig ist, und zwar in sofern es uns die Gegenstände sichtbar macht, sowohl (α) wenn es gerade von ihnen oder ihren auf einer Tafel entworfnen Bildern in unser Auge fällt: **Optic** und **Perspectiv**; als auch β) wenn es auf Spiegel fällt, **Catoptric** oder (γ) von durch=

durchsichtigen Körpern von verschiedener Dichtigkeit, besonders von geschliffenen Gläsern gebrochen wird: **Dioptrik.**

c) Die Erscheinungen der Weltkörper am gestirnten Himmel, ihre Stellung gegen einander, die Größe ihrer Bewegung und Entfernung, auch Verbindung untereinander nach optischen und mechanischen Gründen: **Astronomie**, dazu noch die **mathematische Geographie, Chronologie** und **Gnomonik** gehört.

2. Kunstsachen, die vorzüglich der Hülfe der Mathematik bedürfen, sind die **bürgerliche = Kriegs = Schiffs =** und **Deich = Baukunst**, welche letzte jedoch noch erst eine mathematische Form erwartet; die Kunst, ein Schiff besonders durch Segel zu regieren und zu bewegen; die **Artillerie =** und **Feuerwerker = Kunst**, welche Wissenschaften aber sämtlich, einem großen Theile nach, nicht mathematisch sind.

§. 2. Die mathematische Methode oder Behandlungsart dieser Gegenstände hat man von jeher für ein so vollkommenes Muster in richtiger Bestimmung und Zusammenordnung der Begriffe und Sätze gehalten, daß die Griechen deßhalb die Größen=Lehre ausschliessungsweise **Wissenschaften** (μαθήματα) genannt haben. Sie gründet sich eigentlich nur auf eine Regel, welche so allgemein brauchbar ist, daß sogar unsere gewöhnlichen Reden und Erzählungen ohne dieselbe nicht einmal recht verständlich seyn können. Diese Regel nämlich verlangt, daß man **dasjenige immer zuerst vortragen soll, was zur richtigen Einsicht des folgenden dient.** Deßhalb schickt sie allemal erst deutlich bestimmte Begriffe (Definitiones) voraus, verbindet damit die nöthigen **Grundsätze** (Axiomata), d. i. solche Sätze, deren Richtigkeit, dem gegebenen Begriff zufolge, man sogleich einsieht, folgert daraus **Lehrsätze** (Theoremata), deren **Beweis** den Zusammenhang mit den vorhergehenden, als wahr angenommenen, Begriffen und Sätzen so deutlich zeigt, daß man jene wieder umstos-

sen

Academische Schriften

In den

Commentariis Acad. Sc. Petrop. v. II – XIV — 74.
Novis commentariis — 179.
~~Novis~~ Actis bis T. IV p. II a. 1780. — 66.

319.

Memoires de l'Academie Royale des Sciences à Paris

1765. Précis d'une théorie generale de Dioptrique
1778. Essai d'une theorie de la resistence qu'eprouve la proue d'un vaisseau dans son mouvement.

Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Acad. royale des Sc. a Paris.

2. Meditationes super problemate nautico de implantatione malorum.
4. Dissertatio de igne in qua eius natura et proprietates explicantur
Inquisitio physica in caussam fluxus & refluxus maris
5. De Observatione inclinationis magneticae dissertatio
Dissertatio de Magnete.
7. Recherches sur la question des inegalites du mouvement de Saturne & de Jupiter.
Recherches sur les irregularites de Jupiter. 2
8. De promotione navium sine vi venti.
Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur.
Examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un vaisseau dans le roulis & dans le tangage.
9. Theorie de la lune et specialement sur l'equation seculaire.
Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la lune.

sen müßte, wenn man diese leugnen wollte. Werden daraus unmittelbare Folgen (Zusätze, Corollaria) gezogen: so darf man nur, wenn es nöthig ist, ihre Verbindung mit den Lehr-Sätzen zeigen. Werden Anwendungen von diesen Sätzen gemacht; so sind diese entweder so leicht, daß sie keiner weitern Anweisung bedürfen, in welchem Fall sie Foderungssätze (Postulata) heissen; oder es ist diese Anweisung (Auflösung, solutio) erfoderlich. Alsdann muß aber auch noch ein Beweis geführt werden, daß auf die angezeigte Art der Foderung ein Genüge geschieht. Alles, was nicht in einen so scharfen Zusammenhang gebracht werden kann, aber doch zweckmäßig ist, bringt man in besondere Anmerkungen (Scholia). Aus andern Wissenschaften entlehnte Sätze (**Lehn-Sätze**, Lemmata) gebraucht man hier weit weniger als in andern Wissenschaften. **Erfahrungen** dagegen in der angewandten Mathematik vertreten oft die Stelle allgemein erwiesener Sätze. **Willkührliche** Sätze (Hypotheses) müssen so beschaffen seyn, daß sie ohne Nachtheil der Wahrheit, bloß zur Bequemlichkeit in der Ausübung, angenommen werden können.

Bey dieser so natürlichen Ordnung im Vortrage kommt dem Verstande noch dieses sehr zu statten, daß man gewöhnlich von sinnlichen Vorstellungen anfängt, und diese nach und nach in abgesonderte bloß intellectuelle Begriffe überträgt. Dadurch wird die Mathematik das geschickteste Mittel, selbst die Jugend im Denken zu üben.

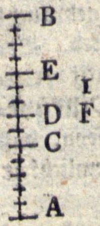
Erster Abschnitt.

Rechnung mit einfachen Zahlen.

1) Methoden, die Größe als Zahl auszudrucken.

§. 3 Erklärungen. Größe ist, was sich vermehren oder vermindern läßt. Gleichartig wird sie genannt, wenn ihre Theile durch einerley Maaß können bestimmt werden. Dergleichen sind Längen, die nach dem bekannten Fußmaaß (zwey Fuß geben eine Elle, zehn oder 12 Fuß eine Ruthe, der zehnte oder zwölfte Theil des Fußes einen Zoll), Flächen, die durch Flächen=Maaß, und Körper, die durch körperliche Maaße von bekannter Größe oder einem bekannten Gewicht oder Werth bestimmt werden. Ein solches Maaß nun heißt die **Einheit**, und giebt die auszumessende Größe in **ganzen Zahlen** an, wenn diese damit genau ausgemessen werden kann. Kann man aber dazu nur einen Theil der Einheit gebrauchen: so heißt die auszumessende Größe in Ansehung dieser Einheit **ein Bruch**.

Eine solche Größe ist die Linie AB, die aus den Theilen AC, CD, DE und EB bestehet. Das Auge entdeckt sogleich, daß sie weiter nicht gleichartig sind, als in sofern jede eine Länge ist. Man kann mit DC, als dem kleinsten Theil, keinen der übrigen Theile bestimmen. Nimt man aber das gleichartige Maaß F: so ist dieses in DC zweymal, in DE dreymal, in BE viermal und in AC fünfmal enthalten. Wüßte man nun die Größe von F, und die Anzahl aller gleich großen Theile in AB: so hätte man eine deutliche Vorstellung von der Länge der Linie AB, als Zahl ausgedruckt. Zwey Stücke also müssen hier gewußt werden: 1) die Größe der Einheit; 2) wie vielmal die Einheit in der gegebenen Größe (hier in AB) enthalten sey.



Rechnen heißt daher, durch Vergleichung der gegebenen Größe mit bekannten gleicher Art die Zahl finden, welche ihre Größe bestimmt. Giebt man diese Zahl nach einem bekannten Maasse, z. E. nach Zollen oder Fußen an: so ist es eine **benannte Zahl**. Giebt man bloß die Menge der Theile an, ohne ihr Maaß zu nennen: so ist es eine **unbenannte Zahl oder Ziffer**. Bezeichnet man Maaß und Zahl durch allgemeine Zeichen, dergleichen die Buchstaben sind: so hat man **allgemein bestimmte Zahlen**, dergleichen man vorzüglich zur Erfindung der Regeln in der Rechenkunst nöthig hat. Ihre Zusammensetzung lehrt zugleich die Art des Verfahrens.

Observationes circa integralia talium formularum: $\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{\frac{q-1}{n}}$ posito post integrationem $x=1$

Memoires de la Societé de Vlissingue

Tome IX 1782. Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques.

Ephemerides de Berlin 1783

Theorie der Parallaxen für die sphäroidische Gestalt der Erde

---

Memoires de la Societé Economique

VI. 1766. Nachricht von einem neuen Mittel zur Vermehrung des Getraides.

Noch 208 Abh. im Manuscript wovon indeß 13 schon im zweiten Bande der Opuskel u. sehr viele in den Novis actis abgedruckt sind.

3

Die Anzahl ~~der~~ aller verschiedenen algebr. Functionen &c.

grad	1	2	3	4
Alle	$p-1.$	$p.p-1.$	$p^2.p-1$	$p^3.p-1$
Untheilb.	$p-1$	$\frac{p.p-1}{2}$	$\frac{p.p+1.p-1}{3}$	$\frac{p+2.p+1.p.p-1}{2.4}$
Eig. 1 allein		$\frac{p.p-1}{2}$	$\frac{p+1.p.p-1}{6}$	
1.2			$\frac{p.(p-1)^2}{2}$	

Zwischen x u. α ist die Gleichung gegeben:

$\varphi(x,\alpha) = 0$ Man soll $f(x,\alpha)$ in eine Reihe entw.

Man löse die Gleichung $\varphi(x,0) = 0$ auf. Eine Wurzel sei $x = h$ und es sei $\varphi(x,0) = (x-h)^2 X$ so daß X den Factor $x-h$ nicht mehr enthalte. Dann sei

$f(x,\alpha) = p + \alpha p' + \alpha^2 p'' + \alpha^3 p'''$ &c ~~so ist~~:

$$p^N = \frac{d^n f(x,\alpha)}{1.2.3\ldots n\, d\alpha^n} - \frac{d^{n-1}\left\{(x-h)^n \dfrac{\partial^n\left\{\dfrac{df(x,\alpha)}{dx}\log\varphi(x,\alpha)\right\}}{1.2.3\ldots n\, d\alpha^n}\right\}}{1.2.3\ldots(n-1)\, i\, \partial x^{n-1}}$$

$p.p-1 : 2$

$p+1.p.p-1 : 3$

$p+1.p.p.p-1 : 4$

$p.p^4-1 : 5$

~~$p.p-1.p^4+p^3+p^2+1$~~

$p.p-1.p+1 \quad p^3+p+1$

p^4-1

p^6-1

$-p^3+1 \quad p^6-p^3-p^2+p$

$-p^2+1$

$p^3 - \quad p^5-p^2-p+1$

$p.p-1$

$x-h-\alpha\xi=0$

$d^{n-1}\left\{(x-h)^n \frac{d^n f'x \lg.\varphi(x-\alpha)}{1\ldots n\, d\alpha^n}\right\} \quad p^4+p^3$

$- d^{n-1}\left\{(x-h)^n f'x \frac{d^n \lg\varphi(x-\alpha)}{1\ldots n\, d\alpha^n}\right.$

~~$\frac{d^n f(x,\alpha)}{1\ldots n\, d\alpha^n}$~~ Courage

$- d^{n-1}\left\{(x-h)^n d^n\left\{\frac{d f(x,\alpha)}{}\right.\right.$

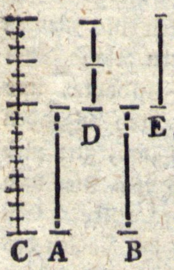
Die Arithmetik muß demnach lehren, 1) die Methoden, die Größe als Zahl auszudrucken; 2) die Veränderungen, die mit einer Zahl vorgenommen werden können, (Vermehrung oder Verminderung, drey Arten von jeder); 3) die Hauptsache, nämlich, wie man das unbekannte aus dem bekannten durch Vergleich finden könne.

§. 4. Willkührliche Sätze: 1) die Ziffern, oder unbenannte Zahlen, deren Bedeutung bekannt ist; sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, lauter einfache ganze Zahlen, wenn nicht das Gegentheil angezeigt ist, sie machen die Klasse der **Einer** aus. 2) Die folgenden Klassen bestehen zwar wieder aus diesen Zahlzeichen, aber ihr Werth ist zehn, hundert, tausend, zehntausend, hunderttausend, Million, zehn Millionen, hundert Millionen, tausend Millionen, zehntausend Millionen, hunderttausend Mill., Billion ꝛc. mal grösser, je nachdem man sie auf den 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten, 8ten, 9ten, 10ten, 11ten, 12ten, 13ten Platz ꝛc. von der Rechten zur Linken gezählt, schreibt. Die leeren Plätze werden, wenn keine Zahl der niedern Klasse sie einnimmt, mit 0 bezeichnet. **Jede Zahl demnach auf den nächst höhern Platz hat einen zehnmal höhern Werth.** 3000 ist zehnmal so groß als 300, 300 zehnmal so groß als 30 ꝛc. 3) Zehn Einheiten einer niedern Klasse also machen eine Einheit der höhern Klasse aus. 4) Man zählt immer **Einer, Zehner, Hunderte**, und wiederholt diese Benennungen bey jeden drey folgenden Plätzen, so doch, daß bey den Zahlen des 4ten, 5ten und 6ten Platzes **tausend**, bey den Zahlen des 7ten 8ten und 9ten Platzes, **Millionen**, bey den Zahlen des 10ten, 11ten und 12ten Platzes tausend Millionen, bey den Zahlen des 13ten, 14ten und 15ten Platzes **Billionen**, bey den drey folgenden tausend Billionen, alsdenn **Trillionen** u. s. w. hinzugesetzt werden. Man darf also nur immer von der Rechten zur Linken 3 Zahlen abstreichen, um den Werth derselben nach ihren Plätzen richtig zu bezeichnen, welches **Numeriren** genannt wird. Also 3|467''|891|076'|384|602

 heißt:

heißt: Dreytausend, vierhundert sieben und sechzig Billionen, acht hundert ein und neunzig tausend, und sechs und siebenzig Millionen, drey hundert vier und achtzig tausend sechs hundert und zwey. 5) Jede Zahl der niedern Klasse ist ein Bruch in Ansehung der Einheit der höhern Klasse, und zwar ein Decimal=Bruch, wie in der Folge deutlicher wird erklärt werden.

§. 5. Jede Vergleichung zweyer gleichartiger Größen, um zu untersuchen, ob die eine so groß, größer oder kleiner sey, als die andere, heißt ein **Verhältniß**, und zwar ein **arithmetisches**, wenn man bloß den **Unterschied** der Größe bemerkt; ein **geometrisches** aber, wenn man durch die Vergleichung findet, wie **vielmal** die eine größer ist, als die andere. Das Zeichen der **Gleichheit** sind zwo gleich weit über einander stehende Linien ($=$); das Zeichen des **Größern** und **Kleinern** zween zusammenlaufende Striche ($>$), die Oeffnung nach dem Größern, die Spitze aber nach dem Kleinern gerichtet. Das Zeichen des Unterschiedes ($-$) wird auch gebraucht, wenn man eine Größe von einer andern wegnehmen, oder diese um jene vermindern will. Will man eine hinzusetzen, so braucht man das Zeichen $+$. Das Zeichen der Theilung bey einem geometrischen Verhältnisse ist ein Colon ($:$).



$A = B$; $C > A$; $C - A = D$ ein arithmetisches Verhältniß; $15 - 6 = 9$, und im vorigen §. die Vergleichung der AB mit der Einheit $F = 14:1$, ein geometrisches Verhältniß. Dergleichen geometrisches Verhältniß, wie dieses, giebt jede Zahl.

§. 6. Der Begriff von Groß und Klein beruhet bloß auf das Verhältniß einer Größe zu einer andern. Eine Fliege ist ungemein groß im Verhältniß gegen eine Käsemilbe, aber sehr klein in Vergleichung mit einem Elephanten.

II) Ver=

Sit data aequatio

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots\ldots = 0$$

cuius ~~et~~ radices $x', x'', x''' \ldots x^N$

Sit

$\Sigma x = (1)$

$\Sigma xx = (2)$

$\Sigma x^3 = (3)$

$$(a^7b^7) = (a^6b^6)(ab) - (a^7b^6c) - (a^6b^6cd)$$

$$(a^7b^7) = a^7b^6$$

& sic deinceps: tum

$$A = (1)$$

$$B = \tfrac{1}{2}(1)^2 - \tfrac{1}{2}(2)$$

$$C = \tfrac{1}{6}(1)^3 - \tfrac{1}{2}(1)(2) + \tfrac{1}{3}(3)$$

$$D = \tfrac{1}{24}(1)^4 - \tfrac{1}{4}(1)^2(2) + \tfrac{1}{8}(2)^2 + \tfrac{1}{3}(1)(3) - \tfrac{1}{4}(4)$$

Sit E. g. $(1) = -1$; $(2) = -3$; $(3) = +17$; $(4) = -27$

Erit aequatio fundam.

$$x^4 + x^3 + 2xx - 4x + 3 = 0$$

$$\left(\text{Obiter} = \left(xx + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}\right)^2 - 13\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\right)^2\right)$$

$(1) = A$ 4

$(2) = AA - 2B$

$(3) = A^3 - 3AB + 3C$

$(4) = A^4 - 4AAB + 2B^2 + 4AC - 4D$

$(5) = A^5 - 5A^3B + 5AB^2 + 5AAC - 5BC - 5AD + 5E$

$(6) = A^6 - 6A^4B + 9A^2B^2 - 2B^3 + 6A^3C + 3CC - 12ABC \ldots - 6AAD + 6AE + 6BD - 6F$

$$(n) = A^n - nA^{n-2}B + \frac{n.n-3}{1.2}A^{n-4}B^2 - \frac{n.n-4.n-5}{1.2.3}A^{n-6}B^3 \ldots\ldots$$
$$- nA^{n-3}C + \frac{n.n-5}{1.2}A^{n-6}CC - \frac{n.n-7.n-8}{1.2.3}A^{n-9}C^3 \ldots\ldots$$

legem generalem vide pagina sequenti

Ex aequ. $a+bx+cxx\ldots=0$ elicere aliam in z ut sit $z=xx$ statuatur

$$a+cxx+\ldots=P$$
$$bx+dx^3\ldots=Q$$

erit aequatio quaesita: $PP-QQz=0$

2. Porro si fieri debeat $z=x^3$ statuendum erit simili literarum significatione

$$P^3+Q^3z+R^3zz=3PQRz$$

---

1. $\alpha^n=\alpha^n$

2. Sit $\alpha+\beta=p$
$\alpha\alpha+\beta\beta=q$
erit

$$\alpha^3+\beta^3=\tfrac{1}{2}(3pq-p^3)$$
$$\alpha^4+\beta^4=\tfrac{1}{2}(qq+2ppq-p^4)$$
$$\alpha^5+\beta^5=\tfrac{1}{4}(5pqq-p^5)$$
$$\alpha^6+\beta^6=\tfrac{1}{4}(q^3+6ppqq-3p^4q)$$

x^2+ax+b

$(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
$(\alpha+\gamma)x+\alpha\gamma$
$(\alpha+\delta)x+\alpha\delta$
$(\beta+\gamma)x+\beta\gamma$
$(\beta+\delta)x+\beta\delta$
$(\gamma+\delta)x+\gamma\delta$

$$z^6+(-3Ax+B)z^5-$$

Coefficiens termini $a^m b^n c^p d^q\ldots$ ~~est~~ A (si A significet numerum permutationum huius expressionis) $=$

$$\cancel{\frac{A\,mnp\ldots}{m+n+p+\ldots}\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+\frac{3}{p}\ldots\right)}$$

$$\frac{A}{m+n+p\ldots}(m+2n+3p\ldots)$$

II) Veränderung der Zahlen durch Vermehrung und Verminderung.

1) Gemeine Addition und Subtraction, durch Zahlen, die verschieden in Ansehung ihrer Größe seyn können.

§. 7. Das leichteste Verhältniß ist das arithmetische. Vermindert man (§. 5.) die Größe C um den Theil D: so bekommt man A. Die Vermehrung einer Größe durch eine andere gleichartige heißt **Addition**, und die daraus entstandene Größe die Summe; also, wenn $A + D = C$; so ist C die Summe der Theile A und D. Die Verminderung einer Größe durch eine andere gleichartige heißt **Subtraction**; das, was nach der Verminderung übrig bleibt, die **Differenz** oder der Rest. Wenn $C - A = D$: so ist D der Unterschied, Rest oder die Differenz zwischen C und A. Wie dies mit wirklichen einfachen Zahlen zu verrichten sey, gehört unter die Foderungs-Sätze (Postulata). Auch lehren die Formeln $A + D = C$, und $C - A = D$, daß eins die Probe der richtigen Rechnung vom andern sey.

Eigentlich kann, wie man aus eben diesen Formeln sieht, die Addition und Subtraction nur mit 2 Zahlen vorgenommen werden; da aber Summe und Differenz alsdann wieder als eine Zahl zu betrachten ist: so sieht man, daß Addition und Subtraction mit mehrern Zahlen angeht. Z. B. §. 3. $AC + CD = 5 + 2 = 7 = AD$ Dazu addirt man $DE = 3$, also $AC + CD + DE = 7 + 3 = 10 = AE$. Hiezu kommt noch $EB = 4$. Also $AE + EB = AC + CD + DE + EB = 14$. Eben so ist $AB - BE = 14 - 4 = 10 = AE$; ferner $AB - BE - ED = AE - ED = 10 - 3 = 7 = AD$, und $AB - BE - ED - DC = AD - DC = 7 - 2 = 5$. Auch ist $AB - BE - ED - DC = AB - (BE + ED + DC)$.

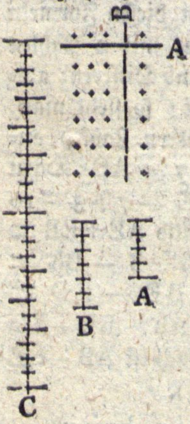
§. 8. Grundsätze. 1) nur Dinge von einerley Art können mit einander verglichen und zusammen gezählt werden. 2) Die Theile, woraus das Ganze besteht, wenn sie zu-

 sammen

sammen gezählt werden, sind dem Ganzen gleich. 3) Ein Theil ist kleiner als das Ganze. 4) Gleiches kann vor Gleichem an dessen Stelle gesetzt werden, wie §. 5 $A+D$ statt C. 5) Wenn zwo Größen einer dritten gleich sind: so sind sie unter einander selbst gleich. 6) Gleiches zu Gleichem addirt, auch Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches zur Summe oder Differenz. 7) Gleiches zu Ungleichem addirt, oder davon subtrahirt, giebt Ungleiches zur Summe oder Differenz.

2) Wiederholte Addition und Subtraction eben derselben Zahl: Multiplication und Division.

§. 9. Erklärung. Eine Größe so vielmal nehmen, als die Einheit in einer andern enthalten ist, heißt **multipliciren.** Die zu multiplicirende Größe (Multiplicandus) sowohl, als die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal sie genommen werden soll (Multiplicator) heißen Factores; die Größe, welche dadurch entsteht, das **Product.** Das Zeichen der Multiplication ist ein Punct (.) oder ein liegendes Kreuz (X).



4.6 oder $4 \times 6 = 24$. Hier ist 24 das Product, 4 und 6 aber sind die Factoren. Auch ist das Verhältniß des Multiplicandus zum Product gleich dem Verhältniß der Einheit zum Multiplicator.

$4:24 = 1:6$. Wenn nämlich $4 = A$ zur Einheit angenommen wird: so ist dieses Maaß im Product $24 = C$ sechsmal enthalten; so oft also, als die für B angenommene Einheit in B enthalten ist.

§. 10. Zusatz. Man sieht schon aus dieser Erklärung, daß die Multiplication eine so oft wiederholte Addition des Multiplicandus sey, als die Einheit im Multiplicator enthalten ist. $4+4+4+4+4+4 = 4.6 = 24$.

Ad solutionem aequ: $x^p = 1$ aeq: conditionales:

__Secundi gradus.__ $xx + x - n = 0$ | pro $p = 4n+1$
$xx + x + n = 0$ | pro $p = 4n-1$

__tertii gradus.__

p	aequ. 1.	aeq. 2. e prima $z = 3x+1$	Radicum binae partes
7	$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$	$z^3 - 21z - 7 = 0$	$\sqrt[3]{(7 \pm 21\sqrt{-3}) : 2}$
13	$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$	$z^3 - 39z + 65 = 0$	$\sqrt[3]{(-65 \pm 39\sqrt{-3}) : 2}$
19	$x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$	$z^3 - 57z - 133 = 0$	$\sqrt[3]{(133 \pm 57\sqrt{-3}) : 2}$
31	$x^3 + x^2 - 10x - 8 = 0$	$z^3 - 93z - 4.31 = 0$	
37	$x^3 + x^2 - 12x + 7 = 0$	$z^3 - 111z + 11.37 = 0$	

Aequationis secundae forma generalis

$z^3 - 3pz - kp.$

k determinatus hoc modo:

fit $p = tt + 3uu$

et erit $k = \pm t \pm 3u$

~~Ubi signa ita sumenda sunt ut $3A + kA + 1$ per $2k$ fiat divisib:~~

~~seu 3p~~

Rad $=$

$\sqrt[3]{(kp \pm l\sqrt{-3}) : 2}$

$l = p(t \pm u)$

$\cancel{bb} + cc - bc$
$+ hh - \cancel{3hb} - 3hc$
$\cancel{+2bc}$
$-h + b + c$
$- h(b+c) \cancel{+h(b+c)} = 0$

~~sit $p = tt + 3uu$~~

$2(bb+cc)$
$+3bc + hh - 3h(b+c)$
$-h + b + c = 0$

5

-1
$+3$
$+90$
-46
217
93
94

2.3
-2 ± 9
248
-11

$p - k^2 = 6uu$
$\pm 6tu$

1	19	20	8
3	26	29	24
9	16	25	10
27	17	13	30

1	3	5
2	6	9
4	7	10
8	12	11
15	14	13

$3aa + 3bb + 3ab$
$- 3ah - 3bh$
$+ hh = a$

$AA = 2A + 4B + 2C$
$AB = 4A + 2B + 4C$
$AC = 2A + 4B + 4C$

+10
1 2
7 3
5 6
9 14
16

a | ab
b | bc
c | ac

$\left(h - \frac{3}{2}(b+c)\right)^2 - \frac{1}{4}(b^2 + c^2) + \frac{3}{2}bc$

12 16 8
16 8 16
4 8 8

$aa - a$
$+bb$
$+cc = ab + bc + ac$

$a + b + c = h$

$ah -$

$aa - bc$

$aa - a + \cancel{bb} + hh \cancel{+aa} + \cancel{bb} - \cancel{2ah} - \cancel{2bh} \cancel{+2ab}$
$= \cancel{ab} + bh \cancel{-ab} - \cancel{bb} + \cancel{ah} - \cancel{aa} \cancel{-ab}$

$$\frac{\Sigma(\text{rad}^n)}{n} = a^n A + \cancel{1}\frac{b^n B}{2} + \cancel{3}\frac{c^n C}{3} + \cancel{4}\frac{\delta^n D}{4} \ldots\ldots$$

$$x^m - Ax^{m-1} - Bx^{m-2} - \&c$$

$$\begin{bmatrix} A, & B, & C & \ldots. \\ 1, & 2, & 3 & \ldots.. \end{bmatrix}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9							
4	8	12							
5	10	15							
6	12	18							
7	14	21							
8	16								
9	18								
10	20								

$$\cancel{\xi = \frac{1}{1.5}\,{}^5\xi - \frac{1}{1.2.3.2}\,{}^4\xi}$$

$$N = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(a^n A - b^n B - c^n C \ldots\right)$$

$$\begin{pmatrix} [1] & \frac{[2]}{2} & \frac{[3]}{3} & \frac{[4]}{4} & \frac{[5]}{5} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Denn bey den Zahlen heißt 42 nicht 4.2 oder 8 sondern zwey u. vierzig: bey den großen Buchstaben aber AB die Linie A——B.

$$N = a^n A - \frac{1}{1.2} b^n B + \frac{1}{1.2.3} c^n C - \frac{1}{1.2.3.4} \delta^n D \ldots$$

$$\begin{array}{cccc} \cancel{A} & \cancel{B} & \cancel{C} & \cancel{D} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} [1] & \tfrac{1}{2}[2] & \tfrac{1}{3}[3] & \ldots. \\ 1 & 2 & 3 & \ldots. \end{bmatrix}$$

$$x^m - Ax^{m-1} - Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots = 0$$

$$+2bc$$

$$aa+bb+cc-a = ab+\cancel{3}bc+ac \qquad 2a = hh+3M$$

$$aa-bc = M$$

$$a+b+c = h \qquad 79.7 = \mathfrak{A}^2$$

$$aa-a+(h-a)^2 = ah-aa+3aa-3M \qquad 553$$

$$hh-3ah-a = -3M \qquad 676$$

§. 11. Das Einmal Eins, dessen Erfindung man dem Pythagoras zuschreibt, ist eine Producten-Tafel von allen einfachen Zahlen, immer zwey und zwey mit einander multiplicirt. Man kann es also nach §. 10. leicht durch Hülfe der Addition machen.

§. 12. Der Anblick der Figur §. 9, man mag die Puncte oder Linien nehmen, lehrt schon, daß es einerley sey, welchen von beiden Factoren man zum Multiplicator oder Multiplicandus macht. Vier sechsmal genommen ist so viel als sechs viermal genommen. **Einerley Factores in geänderter Ordnung geben daher einerley Product.** A.B = B.A.

§. 13. Sowohl A als B können Producte aus andern Factoren seyn. Z. B. A = 4 = 2.2, und B = 6 = 3.2. Allgemein also sey A = ab, und B = cd: so ist A.B = B.A = abcd = cdab, welche Factoren noch gar verschiedene Versetzungen leiden. 4.6 = 2.2.3.2 = 2.2.2.3 = 24. u. s. w.

Anmerk. Die Puncte, welche hier zwischen den Ziffern, als nothwendige Zeichen der Multiplication stehen, läßt man zwischen den kleinen Buchstaben weg.

§. 14. Die **Division** ist ein geometrisches Verhältniß zweyer Zahlen, die man **Divisor** und **Dividendus** nennet. Wie vielmal **erster** im **letzten** enthalten sey, zeigt der **Quotient**, den man auch den **Exponent** des Verhältnisses nennt. Das Divisionszeichen ist entweder das §. 5, oder ein Strich zwischen dem Dividendus und dem darunter gesetzten Divisor. $24:4 = \frac{24}{4} = 6$.

Man kann sich auch die Division als eine wiederholte Subtraction des Divisors vom ~~Quotienten~~ vorstellen; wie oft diese geschehen könne, zeigt der Quotient. Dividendo

§. 15. Zusatz. Der Divisor ist im Dividendus so oft enthalten, als die Einheit im Quotienten. 4 : 24 = 1 : 6. Was also §. 9. Factoren waren, ist hier Divisor und Quotient. **Der Dividendus ist das Product aus beiden**

 Facto-

Factoren, und eins ist die Probe vom andern. $\frac{24}{4} = \frac{4.6}{4}$ Man sieht daraus leicht, wie man vermittelst des Einmal Eins dividiren müsse.

§. 16. Nimt man den Divisor zur Einheit an; so drückt der Quotient die Größe des Dividendus aus. Ist (§. 9.) A der Divisor und C der Dividendus; so ist C = 6 A. Wäre B der Divisor von C: so ist C = 4 B, welches eine zweyte Probe der richtigen Division abgiebt. Auch können Anfänger durch dieses Mittel erfahren, wie groß sie den Quotient nehmen sollen. Sie machen auf einer Linie so viel Abtheilungen, als der Dividendus Einheiten hat, und auf einer andern Linie machen sie die Abtheilungen des Divisors, und verfahren dabey auf die hier gezeigte Art. Nicht weniger kann das Exempel in Puncten §. 9. dazu dienen.

§. 17. Grundsätze. 1) Ist die Einheit der Multiplicator oder Divisor: so bleibt die Zahl des Multiplicandus und Dividendus so groß, als sie ist, welches man auch so ausdruckt: Eins multiplicirt und dividirt nicht. 2) **Gleiches** mit **Gleichem** multiplicirt oder dividirt, giebt Gleiches im Product oder Quotienten; **Ungleiches** mit **Gleichem** multiplicirt oder dividirt, giebt Ungleiches, der kleinere Multiplicandus nämlich ein kleineres Product, und der kleinere Dividendus einen kleinern Quotienten. Gleiches mit Ungleichem multiplicirt oder dividirt giebt Ungleiches im Product oder Quotienten. Der kleinere Multiplicator nämlich giebt ein kleineres Product, der kleinere Divisor aber einen größern Quotienten. Ein halb so großer Divisor ist in demselben Dividendo noch mal so oft enthalten, als der ganze Divisor; ein zehnmal so kleiner, zehnmal so oft.

§. 18. Ist der Dividendus so groß als der Divisor: so ist der Quotient = 1. $\frac{4}{4} = 1$; $\frac{24}{24} = 1$; allgemein $\frac{a}{a} = 1$.

§. 19. **Eine Größe mit einerley Zahl multiplicirt** und **~~oder~~ dividirt, bleibt ungeändert.** $\frac{A.m}{m} = A$ (§. 18. u. §. 17. 1.), A mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn.

§. 20.

Beweis des La Grangischen Lehrsatzes

La Grange

$4\,/\,6789548\,\backslash\,1697387$

Es sei $x = t + u\xi$

$$\left(\frac{d\varphi x}{du}\right) = \left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)$$

$$\left(\frac{d\varphi x}{dt}\right) = \left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$ Aber

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = \xi + u\left(\frac{d\xi}{du}\right) = \xi + u\left(\frac{d\xi}{dx}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1 + u\left(\frac{d\xi}{dt}\right) = 1 + u\left(\frac{d\xi}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

diese Werthe in obigen Gleichungen substituirt u. $\frac{d\varphi x}{dx}$ eliminirt gibt

$$\left(\frac{d\varphi x}{du}\right) = \xi\left(\frac{d\varphi x}{dt}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

diese Gleichung nach dt differentiirt gibt

$$\left(\frac{d^2\varphi x}{dt\,du}\right) = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)\frac{d\varphi x}{dt} + \xi\left(\frac{d^2\varphi x}{dt^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Hingegen nach du differentiirt

$$\left(\frac{d^2\varphi x}{du^2}\right) = \left(\frac{d\xi}{du}\right)\frac{d\varphi x}{dt} + \xi\left(\frac{d^2\varphi x}{dt\,du}\right)$$ 6

Allein aus 1 ist wenn man $\varphi x = \xi$ setzt

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right) = \xi\left(\frac{d\xi}{dt}\right)$$ hieraus u. aus (A) wird

$$\left(\frac{d^2\varphi x}{du^2}\right) = 2\xi\left(\frac{d\xi}{dt}\right) + \xi\xi\left(\frac{d^2\varphi x}{dt^2}\right).$$

$$= \left(\frac{d.\,\xi\xi\left(\frac{d\varphi x}{dt}\right)}{dt}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Differentiirt man diese Gleichung nach u so ist

$$\left(\frac{d^3\varphi x}{du^3}\right) = \left(\frac{d^2\ \xi\xi\left(\frac{d\varphi x}{dt}\right)}{dt\,du}\right)$$

Da es aber gleichgültig ist ob man auf der rechten Seite erst nach t u. dann nach u differentiirt oder umgekehrt so ist

$$\frac{d^3\varphi x}{du^3} = \frac{\partial.\left(\xi\xi\left(\frac{d^2\varphi x}{dt\,du}\right) + 2\xi\left(\frac{d\varphi x}{dt}\right)\left(\frac{d\xi}{du}\right)\right)}{dt}$$

Aber wenn man die Werthe von $\frac{d^2\varphi x}{dt\,du}$, $\frac{d\xi}{du}$ substituirt

$$\frac{d^3\varphi x}{du^3} = \partial\left(\xi^3\left(\frac{d^2\varphi x}{dt^2}\right) + 3\xi\xi\xi\,\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\varphi x}{dt}\right)$$

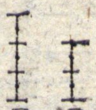
$$= \left(\frac{\partial^2\ \xi^3\frac{d\varphi x}{dt}}{\partial t^2}\right) \quad \ldots\ldots (3)$$

Ganz eben so findet man

$$\left(\frac{d^4\varphi x}{du^4}\right) = \left(\frac{\partial^3\ \xi^4\ \frac{d\varphi x}{dt}}{dt^3}\right)$$ u. s. w.

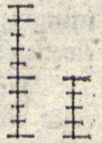
§. 20. Ein Bruch (§ 3.) ist ein geometrisches Verhältniß der gegebenen Größe zur Einheit in gleiche Theile zerlegt. Das Maaß nämlich, oder die Einheit, muß hier gleichsam zerbrochen, oder in kleinere gleich große Theile zerlegt werden, um einen Theil davon zur Ausmessung der gegebenen Größe zu gebrauchen. Ein Bruch besteht also aus 2 Zahlen, als Divisions=Exempel geschrieben, davon der Dividendus die gegebene Größe ist, welche hier der **Zähler** heißt, und der Divisor die Einheit in gleiche Theile zerlegt, welcher der **Nenner** genannt wird.

Wäre (§. 16.) A der Bruch oder die gegebene Größe, und C die Einheit: so wäre $\frac{A}{C} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Eben so $\frac{B}{C} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ (§. 19.) Ist D der Bruch und E die Einheit: so ist $D = \frac{2}{3} E$, oder $\frac{D}{E} = \frac{2}{3}$.



E D

§. 21. Eben das ist nöthig, wenn der Zähler größer ist als der Nenner, aber nicht so groß, daß diese als Einheit ganz genommen etlichemal ganz darin wäre. Es sey A durch B auszumessen: so findet man, daß B in A zweymal und noch $\frac{1}{4}$ mal enthalten sey. Nimt man dieses Viertel zum Maaß: so ist $\frac{A}{B} = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$. Die 2 ganzen Einheiten in A machen $\frac{8}{4}$ aus $= \frac{2.4}{4}$ (§. 19.) also $\frac{9}{4} = \frac{2.4+1}{4}$.



A B

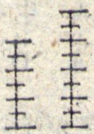
Der allgemeine Ausdruck für solche Größen ist demnach $\frac{am+n}{m}$, wo a die darin enthaltenen ganzen Einheiten, und n die Zahl der Theile derselben, deren m auf die ganze Einheit gehen, anzeigt. Nämlich $\frac{am}{m} = a$, dazu kommt noch $\frac{n}{m}$. Also die ganze auszumessende Größe ist $= \frac{am+n}{m}$ (§. 8. 1.) Hier ist $a = 2$, $m = 4$, und $n = 1$.

§. 22. Eine Zahl heißt ein **ächter** Bruch, wenn der Zähler kleiner ist, als der Nenner; **unächt** aber, wenn der Zähler so groß oder größer ist, als der Nenner.

$\frac{n}{m}$ (§. 21.) ist ein ächter Bruch, $\frac{am}{m}$ und $\frac{am+n}{m}$ aber sind unächte Brüche.

§. 23. Der Ausdruck $\frac{am+n}{m}$ ist sehr geschickt alle ganze und gebrochene Zahlen zu bezeichnen. Für ganze Zahlen verschwindet n, oder $n = 0$, so daß nur $\frac{am}{m}$ bleibt. Für ächte Brüche ist $a = 0$.

§. 24. Jede ganze Zahl kann als ein Bruch ausgedruckt werden. $a = \frac{am}{m}$ (§. 19.). z. E. $a = 2$, so ist, wenn man für m nach einander 2, 3, 4, 5 u. s. w. setzt, $2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$ u. s. w.



A B

§. 25. Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt wird (§. 19.).

$\frac{n}{m} = \frac{n.p}{m.p}$ was man auch für eine Zahl für p setzt.

$\frac{A}{B} = \frac{3}{4} = \frac{3.2}{4.2} = \frac{6}{8}$ u. s. w.

§. 26. Aufgabe. **Brüche unter einerley Benennung zu bringen**, oder in solche zu verwandeln, die einerley Nenner haben.

Auflösung und Beweis: 1) Man gebe jedem Bruche einen Nenner, der dem Product aller Nenner der gegebenen Brüche gleich ist. Z. B. wenn $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{n}{m}$ gegeben sind: so ist das Product aller Nenner $= bdm$. In so viele Theile also muß die Einheit eingetheilt werden. 2) Man multiplicire den Zähler mit eben den Factoren, womit dessen Nenner multiplicirt ist: so bleibt der Bruch ungeändert (§. 25.): also

$$\frac{a}{b} = \frac{adm}{bdm};\quad \frac{c}{d} = \frac{cbm}{dbm};\quad \frac{n}{m} = \frac{nbd}{mbd}.$$

§. 27. Zusatz. Eigentlich kommt es hier nur darauf an, für den gemeinschaftlichen Nenner eine Zahl zu finden, darin alle gegebene Nenner enthalten sind. Bey Ziffern daher

Allgemein wenn

$$\frac{d^n \varphi x}{(du)^n} = \left(\frac{\partial^{n-1} \xi^n \left(\frac{d\varphi x}{dt}\right)}{dt^{n-1}}\right)$$ so ist nach u diff.

$$\left(\frac{d^{n+1}\varphi x}{du^{n+1}}\right) = \frac{\partial^n \xi^n \frac{d\varphi x}{dt}}{dt^{n-1}.\, du}$$ u. wenn man auf der rechten

Seite nach u zuerst differentiirt

$$= \left(\frac{\partial^{n-1} \left(n\xi^{n-1} \frac{d\xi}{du}\frac{\partial\varphi x}{\partial t} \quad \xi^n \frac{d^2\varphi x}{dt\,du}\right)}{dt^{n-1}}\right)$$

oder nach den gehörigen Substitutionen

$$= \frac{\partial^{n-1} \left((n+1)\xi^n \frac{\partial\varphi x}{\partial t}\frac{\partial\xi}{dt} + \xi^n \frac{d^2\varphi t}{dt^2}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$= \frac{\partial^n \xi^{n+1} \frac{\partial\varphi x}{dt}}{dt^n}$$ Also das Gesetz allgemein

bewiesen.

7

4 / 6789548 = 1697387

4
27
24
38
36
29
28
15
12
34
32
28
28

Quadratur parabolischer Curven

x	a	$a+\Delta$	$a+2\Delta$	$\ldots$	$a+(n-1)\Delta$
y	α	β	γ	$\ldots\ldots$	μ

$$\int y\,dx = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta\right)\Delta$$

Rest $\frac{1}{24}$ $\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma\right)\Delta \\ \left(\frac{3}{8}\alpha + \frac{9}{8}\beta + \frac{9}{8}\gamma + \frac{3}{8}\delta\right)\Delta \end{array}\right.$

$\frac{3}{160}$ $\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{14}{45}\alpha + \frac{64}{45}\beta + \frac{24}{45}\gamma + \frac{64}{45}\delta + \frac{14}{45}\varepsilon\right)\Delta \\ \left(\frac{95}{288}\alpha + \frac{375}{288}\beta + \frac{250}{288}\gamma + \frac{250}{288}\delta + \frac{375}{288}\varepsilon + \frac{95}{288}\zeta\right) \end{array}\right.$

$\frac{275}{1728 \cdot 14}$ $\left\{ \left(\frac{41}{140}\alpha + \frac{216}{140}\beta + \frac{27}{140}\gamma + \frac{272}{140}\delta + \frac{27}{140}\varepsilon + \frac{216}{140}\zeta + \frac{41}{140}\eta\right)\right.$

Beispiel

berechnet für 7 E.

$\alpha = 0,$	0.	1,	0.292857143
$\beta = 0,3090170$	0.0067379	0,9607893	1.88960634
$\gamma = 0.5877853$	0.0820850	0.8521438	0.26344776
$\delta = 0.8090170$	0.1888756	0.6976063	1.37380746
$\varepsilon = 0.9510565$	0.2865048	0.5272945	3.81971870 also $\frac{1}{\pi}$
$\zeta = 1.$	0.3678879	0,3678879	0.31830989

bis auf die letzte Ziffer richtig

0.3298611	0.1213519	0.4512130
1.6407207	0.3818264	1,9376091
1.2125020	0.2352089	1,3452692
3.1830838	0.7383872	3,7340913

sollte seyn 3.183099

also

$$\int e^{-\frac{1}{x}}\,dx = 0.1476774 \quad \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$$

$$0.7468182 = \int e^{-xx}\,dx$$

sollte seyn 0.746824

sollte seyn $\frac{1}{e}(1-2+6..) = 0.1485$

daher zerlege man die gegebenen Nenner in ihre kleinsten Factoren; finden sich darunter welche, die auch in andern Nennern vorkommen: so übergeht man diese bey den folgenden Nennern, und setzt nur diejenigen als Factoren des gemeinschaftlichen Nenners hinzu, welche in den vorigen noch nicht enthalten waren. Auf solche Weise bekommt man sogleich den gemeinschaftlichen Nenner, in der kleinsten Zahl ausgedruckt.

Z. B. $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ sollen unter einerley Benennung gebracht werden. Diese ist $= 4.2.5.3$, weil darin alle gegebene Nenner als Factoren vorkommen.

folglich $\frac{3}{8} = \frac{3.5.3}{4.2.5.3} = \frac{45}{120}$; $\frac{2}{5} = \frac{2.4.3.2}{5.4.2.3} = \frac{48}{120}$; $\frac{5}{6} = \frac{5.4.5}{2.3.4.5} = \frac{100}{120}$; $\frac{3}{4} = \frac{3.2.5.3}{4.2.5.3} = \frac{90}{120}$; $\frac{1}{2} = \frac{1.4.5.3}{2.4.5.3} = \frac{60}{120}$.

§. 28. Aufgabe. **Brüche zu addiren oder zu subtrahiren.**

Auflösung und Beweis: 1) Haben sie einerley Nenner, so werden bloß die Zähler addirt oder subtrahirt, weil bloß die Zähler die gegebenen Größen sind, welche man zusammenzählen soll. 2) Haben sie verschiedene Nenner: so bringe man sie unter einerley Benennung, nach §. 26. und 27., und addire oder subtrahire die auf solche Art gefundenen Zähler;

so ist $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{45 + 48 + 100 + 90 + 60}{120} = \frac{\overset{243}{343}}{130}$.

§. 29. Aufgabe. **Ganze und gebrochene Zahlen zusammen zu zählen.**

Auflösung. Man drucke die ganzen Zahlen als Brüche aus, deren Nenner der gemeinschaftliche Nenner aller gegebenen Brüche ist, und verfahre nach §. 28.

so ist $a + \frac{n}{m} = \frac{am + n}{m}$

§. 30. Aufgabe. **Brüche mit einer gegebenen Zahl zu multipliciren.**

Auflösung und Beweis: 1) Ist der Multiplicator eine ganze Zahl: so multiplicire man damit den Zähler allein:

$\frac{3}{4} . 6$

$\frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3.6}{4}$ (§. 10.) $= \frac{3.3}{2}$ (§. 19.). 2) Ist der Multiplicator ein Bruch: so multiplicire man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner $\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$. Um diese Regel selbst zu finden, setze man $\frac{a}{b} = A$, und $\frac{n}{m} = B$; also $a = bA$, und $n = mB$. (§. 15.); also $an = bm. AB$ (§. 17. 2. und §. 12.) und $\frac{an}{bm} = AB$ (§. 17. 2.) das verlangte Product beyder Brüche. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3.5}{4.6} = \frac{15}{24}$.

§. 31. Aufgabe. **Einen Bruch mit einer gegebenen Zahl zu dividiren.**

Auflösung: 1) Man bringe Divisor und Dividendus, als Brüche ausgedruckt, unter einerley Benennung, weil man nur Dinge von einerley Art mit einander vergleichen kann. 2) Man vergleiche das mit einander, was man hat, also die Zähler, und sehe zu, wie vielmahl einer in dem andern enthalten ist.

Exempel. 1) Wenn der Divisor allein eine ganze Zahl ist.
$\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{4} : \frac{6.4}{4}$ (§. 24.) $= \frac{3}{6.4} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ (§. 25.)
2) Wenn der Dividendus allein eine ganze Zahl ist.

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6.4}{4} : \frac{3}{4} = \frac{6.4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

3) Wenn Divisor und Dividendus ein Bruch ist.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3.7}{5.7} : \frac{2.5}{7.5} = \frac{3.7}{2.5} = \frac{21}{10} = \frac{20+1}{10} = 2 + \frac{1}{10}$$

§. 32. Der 2te Fall §. 30 kann auch nach §. 31. 1. behandelt werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = a . \frac{n}{m} : b = \frac{an}{m} : \frac{bm}{m} = \frac{an}{bm}$$

§. 33. **Brüche aufheben, heißt ihre Zähler und Nenner durch die Division mit einerley Zahl auf die kleinsten Zahlen bringen.** Wie das gemacht werde, lehren §. 19. u. f.

so ist §. 27. $\frac{45}{120} = \frac{3.15}{8.15} = \frac{3}{8}$.

Ein anderes Verfahren wird weiter unten vorkommen.

Ich bezeichne $x.x-1.x-2 \ldots x-n$ mit $[n]$

$$\frac{d[n]}{dx} = \overline{n+1}\left([n-1] + \frac{n}{2}[n-2] + \frac{n.n-1}{\cancel{1.2}\;3}[n-3] \ldots\ldots\right)$$

$$\int [n]dx = \frac{[n+1]}{n+2}$$

Annäherung zu l2

$\cancel{1}$ · 1. $\frac{1}{2}$	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	1 $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$
0,5	0.5	0.5625
25	0.8888	1. 51875
(1)…0,75	1.3888	2. 08125
	(2).. 0. 6944	(3)..0.69375

1 $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{1}{2}$	1 $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{1}{2}$
0.46667–	0. ~~439814815~~ 4947916666
1. 95048–	1. 808449074
0. 35555 +	1. 162574405
2.77270	~~3.410838294~~
0.693175…(4)	~~0.69~~ 3. 465815146
	0. 693163029…..(5)

1. $\frac{6}{7}$ · $\frac{6}{8}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{6}{12}$

~~0.439285714~~ …..	434285714
~~2.164007421~~ …..	2164007421
~~0.867857143~~….	346~~428571~~ 071429
~~1.295238095~~ ….	1295238095
~~4.766388373~~	~~4,144459801~~
	~~69315996~~ …(6)
	602659

0. 3231944
1. 3027150
0. 8697969
0. 8719883
1. 3126270
0. 3340633

5.0143849
~~1.0028769~~
0.50143849

$= \int \frac{dx}{(1-\cancel{3}x)^{1:2}}$

$\cancel{\begin{bmatrix} x=0 \\ x=0,5 \end{bmatrix}}$

$\begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 0,05 \times \sqrt{10} \end{bmatrix}$

8

439285714
2164007421
260357143
1295238095

4158888373
0,693148062 …(6)

sollte sein ……71

also der Fehler $\frac{1}{7\ldots\ldots}$ des Ganzen

$\frac{1}{xx} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{2.x^6}$

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{xx}}dx}{xx}$$

$\frac{1}{xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2.x^2} + \frac{1}{2.3.x^3} - \&c = C$

$C \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3.x^3} + \frac{1}{2.5}$

0,	0
0,2	0
0,4	0,01206534
0,6	17271176
0,8	32751780
1,	0,36787944

$1 + z + z^2 + z^3$

$-\frac{1}{3} - 3.\frac{1}{3} - 6.\frac{1}{3}$

log.

$C - \frac{1}{e}z +$

$\frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{1-y}$

$\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$

$\alpha\varepsilon$ 0.311111....
$\beta\delta$ 1.422222....
γ 0.555555....

0.1213519
0.4264555
0.1603968
0.7082042
0.1416408

$\alpha\zeta$ 0.329861111.....
$\beta\varepsilon$ 1.302083333.....
$\gamma\delta$ 0.868055555.....

$\alpha\eta$ 0.29285714.... 9,4666558
$\beta\zeta$ 1.54285714... 0,1883257
$\gamma\delta$ 0.19285714... 9,2852357
ε 1.94285714... 0.2884409

1335389.084
8450980 4
2884404

$\alpha\theta$ 0.304
$\beta\eta$ [illegible]
$\gamma\zeta$
$\delta\varepsilon$

$\alpha\eta, \frac{3}{10} - \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{42} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{35}$

$\beta\zeta, 1\frac{1}{2} + \frac{3}{70} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{35}\cdot 1\frac{1}{2}$

$\gamma\varepsilon = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{28}$

$\delta = 2 - \frac{1}{18} - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{35}$

7468182
1416408
0,8884570
~~8862269~~

§. 34. Kann Zähler und Nenner, oder auch eine ganze Zahl nicht in Factoren zerlegt werden (davon aber 1 ausgeschlossen ist): so heißt die Zahl eine Prim-Zahl. Dergleichen sind 1, 3, 5, 7, 11, 13, u. s. w. Läßt sich Zähler und Nenner, oder auch eine ganze Zahl, durch 2 theilen, so heissen die Zahlen gerade Zahlen. Alle gerade Zahlen sind demnach unter dem Ausdruck 2 a begriffen, alle ungerade Zahlen aber unter $2a + 1$.

§. 35. Aufgabe. **Einen Bruch in einen andern von einem gegebenen Nenner zu verwandeln.**

Auflösung und Beweis. Der Bruch sey allgemein $= \frac{a}{b}$, der neue Nenner sey $= d$. Man sucht dazu den Zähler $= x$.

$$\text{also } \frac{a}{b} = \frac{x}{d}. \text{ folgl. } \frac{ad}{b} = \frac{xd}{d} = x$$

§. 36. Hiernach lassen sich Brüche benannter Zahlen (§. 3.) berechnen. z. E. $\frac{2}{3}$ Thlr. Wenn es in gute Groschen angegeben werden soll: so ist $d = 24$.

also $x = \frac{2 \cdot 24}{3}$ ggr. $= 2 . 8$ ggr. $\frac{3}{4}$ ℔ $= \frac{3 \cdot 32}{4}$ Lt. $= 24$ Lt.

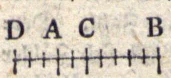
1 Dukaten $= 2 + \frac{5}{6}$ Rthlr. $= 2$ Rthlr. $+ 20$ ggr.

$\frac{11}{72}$ Rthlr. $= \frac{11 \cdot 24}{24 \cdot 3}$ ggr. $= 3 + \frac{2}{3}$ ggr. $= 3$ ggr. $+ 8$ pf.

Rechnung mit entgegengesetzten Größen.

§. 37. **Größen, die, zusammen gerechnet, sich mit einander entweder ganz oder zum Theil aufheben, heissen entgegen gesetzte Größen.** Dergleichen sind die mit + und — bezeichnete Größen, davon die mit + bezeichneten positiv, die mit — bezeichneten negativ heissen. $+a - a = 0$, zwey gleiche aber entgegengesetzte Größen, die sich ganz aufheben. Aber $+ 6 - 4 = 2$. Die entgegengesetzte Größe 4 ist um 2 kleiner als 6; sie kann daher von dem entgegengesetzten Werth nur 4 aufheben, und läßt 2 übrig. Aber $+ 4 - 6 = - 2$. Hier kann + 4 von — 6 nur — 4 aufheben,

heben, und läßt — 2 übrig. Man kann sich diese Größen am besten durch Vermögen und Schuld, durch Einnahme und Ausgabe erläutern. Auch dient dazu



folgender Fall: Ein Schiff soll von A nach B segeln. Jeder Theil des Weges nach B hin, z. B. AC ist positiv. Jeder Theil des Weges nach D hin ist negativ. Wenn nun das Schiff von A nach C 2 Meilen vorwärts gesegelt wäre: so wäre AC = + 2 Meilen. In C aber soll ein entgegengesetzter Wind es nach D treiben: so ist CD = — 5 Meilen. In A ist sein Weg wieder = 0; + 2 — 2 = 0; aber nun geht er durch 0 ins Negative über, und in D ist sein Weg völlig = — 3 Meilen; + 2 — 5 = — 3. Endlich treibt der Wind das Schiff gerade von D nach B. Also ist sein ganzer Weg = + 2 — 5 + 10 = + 7 Meilen = AB.

§. 38. Grundsatz. Entgegengesetzte Größen addiren heißt subtrahiren. Also ist die Subtraction eine Addition des Entgegengesetzten.

5 Rthl. Einnahme und 3 Rthl. Ausgabe zusammengerechnet, läßt 2 Rthl. Ueberschuß; allgemein + 5 a — 3 a = + 2 a, was auch a für eine Größe bedeuten mag.

Soll aber — 3 a von + 5 a subtrahirt werden: so muß man das Entgegengesetzte davon, also + 3 a addiren. Denn einen Mangel subtrahiren, heißt so viel geben, als der Mangel beträgt.

Daher von + 5 a	aber von — 5 a	und von — 5 a
subtr. — 3 a	subtr. + 3 a	subtr. — 3 a
bleibt + 8 a;	bleibt — 8 a;	bleibt — 2 a

§. 39. Lehrsatz. **Bey der Multiplication und Division geben einerley Zeichen + im Product und Quotienten, verschiedene aber. —**

Beweis: a) für die Multiplication. 1) + 4 . + 3 = + 12; denn + 4 + 4 + 4 = + 12; 2) — 4 . + 3 = — 12; denn — 4 — 4 — 4 = — 12, 3mal eine Schuld von 4 giebt eine Schuld von 12: folgl. auch — 3 . + 4 = — 12. §. 10. und §. 12. 3) — 4 . — 3 = + 12: denn sollte es

— 12

Lemniscata [1797]

In der Curva elastica ist

s Sinus eines Bogens
c Sinus des Compl. des B.

$ss+cc+ccss=1$

Sinus des Dopp. $\frac{2(s+s^3)c}{1+s^4} = \frac{2sc}{1-sscc} = \frac{2sc}{ss+cc}$

Cosinus des Dopp. $\frac{1-2ss-s^4}{1+2ss-s^4} = \frac{cc-ss}{1+ccss} = \cancel{\frac{1-2ss+ccss}{2+ss+cc}}$
$= \frac{cc-ss}{2-ss-cc}$

Sinus der Summe $\frac{s'c+sc'}{1-s'sc'c}$ | d. Diff $\frac{s'c-sc'}{1+s'sc'c}$

Cosinus der Summe $= \frac{c'c-s's}{1+s'sc'c}$ | d. Diff. $\frac{c'c+s's}{1-s'sc's}$

$\cos(A-B).\sin(A-B) = \cos(A+B).\sin(A+B)$

man setze $\frac{s+c}{\cancel{sc}} = t$
$1-sc = u$ so ist immer

$tt+uu=1$ ferner v. doppelten W.

$T = \frac{2-2u}{tt+2u-2} +$ $-1-2u-uu$

$2u-u$

$1-s^4 = t^4$ 9

$\frac{1-ss}{1+ss} = cc$

Sinus d. S. + C. d. d.

$\cancel{T} = \frac{tT}{uU-u-U+2}$ $\frac{tt}{1+ss} = cc$

S. d. d. $\frac{2st}{1+s^4}$

$sc+s'c'$

S. d. S. $\frac{\frac{s'tt}{1+ss} + s\frac{t't'}{1+s's'}}{1-s's\frac{tt\,t't'}{(1+ss)(1+s's')}} =$

$\frac{s'tt+s'^3tt+st't'+s^3t't'}{1+ss+s's'+sss's' - s'stt\,t't'}$

Daher d. 3fachen B. $\dfrac{\dfrac{2scc}{1-sscc}+\dfrac{ccs-s^3}{1+sscc}}{\cancel{1-}\dfrac{2ssc^4-2s^4cc}{1-s^4c^4}}$

$$= \frac{3scc+2s^3c^4-s^3+s^5cc}{1-s^4c^4-2ssc^4+2ccs^4}$$

$$= \frac{\cancel{3scc+s^3c^4-s^3}\ ..\ ?}{\cancel{1-1-s^4-c^4+2ss+2cc}-2sscc-\cancel{2cc}+\cancel{2c^4+2ccss}+2ss-2s^4-\cancel{2sscc}}$$

~~Also der Nenner = $4ss-3s^4$ folglich~~

~~Daher d. 3 f. B.~~ $\dfrac{\cancel{3cc+ssc^4-ss+s^4cc}}{4s-3s^3}$

$\cancel{1-1-s^4-c^4}+2ss+2cc-\cancel{2sscc}$

$\cancel{+2cc}+2c^4\cancel{+2ccss}+2ss-2s^4-\cancel{2sscc}$

$-2\cancel{+2cc}+2ss$

$-2+6ss-3s^4+2cc+c^4$

$$= s\left[\frac{6cc+\cancel{c^2}-c^4\cancel{-ccss}\cancel{-ss}+\cancel{s^2}-s^4\cancel{-sscc}\ \ {}^{-2+2ss}}{}\right]$$

$$= s\left(\frac{6cc-c^4-2+2ss-s^4}{6ss-3s^4-2+2cc+c^4}\right) = s\left[3c-1\ 2c-1\right.$$

$5.\ s\dfrac{5-\quad s^4-}{1+50s^4}$

— 12 geben: so müßten die Factores verschiedene Zeichen haben. Dies ist auch daher klar, weil man — 4 nicht wirklich 3mal (+ 3mal), sondern das entgegengesetzte davon (also das entgegengesetzte von $-4 = +4$) 3mal addiren soll. Also $+4+4+4 = +12$.

b) für die Division. 1) $\frac{+ab}{+a} = +b$; 2) $\frac{+ab}{-a} = -b$ denn $-a \cdot -b = +ab$ (nach 3); 3) $\frac{-ab}{+a} = -b$; denn $+a \cdot -b = -ab$. 4) $\frac{-ab}{-a} = +b$; denn $\frac{-a \cdot +b}{-a} = \frac{-ab}{-a} = +b$; $\frac{+12}{+4} = +3$; $\frac{+12}{-4} = \frac{-3 \cdot -4}{-4} = -3$; $\frac{-12}{+4} = \frac{-3 \cdot +4}{+4} = -3$, und $\frac{-12}{-4} = \frac{+3 \cdot -4}{-4} = +3$.

2) Vermehrung und Verminderung durch eine mit derselben Zahl wiederholte Multiplication oder Division: Rechnung mit Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Irrational- und unmöglichen Größen.

§. 40. Erklärung. Eine Zahl mit sich selbst multiplicirt heist eine Potenz. Wie vielmal dieß geschehen sey, zeigt eine Zahl rechter Hand über der Potenz an, welche man **Exponent** nennet. So ist $aa = a^2$ die 2te Potenz von a, die man auch wegen der Fignr, darin sich die Einheiten stellen lassen, ein Quadrat nennt, und 2 der Exponent. $aaa = a^3$ die 3te Potenz. Die erste Potenz $= a$ nennt man die Wurzel, deren Zeichen $\sqrt{}$ ist. Z. E. wenn $a = 2$ gesetzt wird: so ist $a^2 = 4$, und $\sqrt{4} = 2 = a$. Muß die Wurzel mehrere male mit sich selbst multiplicirt werden, um die Zahl zu bekommen, welche die verlangte Potenz anzeigt: so zeigt man dies durch eine Zahl im Wurzelzeichen an. Z. E. $\sqrt[3]{8} = 2$ zeigt an, daß die Wurzel 2 3mal mit sich selbst multiplicirt werden muß, um 8 zu bekommen. Also $8 = 2^3$, $\sqrt[4]{81} = 3$; denn $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$. Allgemein: wenn $c = a^n$; so ist $\sqrt[n]{c} = a$; denn wäre $n = 3$: so wäre $\sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt[3]{c} = c = a^3$.

§. 41. Erklärung. Eigentlich bezieht sich der Ausdruck Exponens auf ein geometrisches Verhältniß $= \frac{a}{1}$. Man nennt daher die Exponenten der Potenzen auch Logarithmen, d. i. Zahlen, welche anzeigen, wie vielmal ein solches Verhältniß genommen ist. Deshalb ist der Logarithmus von $\frac{a}{1}$, 1, von $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1} = \frac{a^2}{1}$, 2; von $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{1} = \frac{a^3}{1}$, 3, u. s. w. Weil indeß 1 unverändert bleibt, so daß überhaupt $\frac{a^n}{1} = a^n$: so heißen auch die Exponenten der einzelnen Potenzen von a Logarithmen, deren Zeichen l ist.

§. 42. Wenn man das Verhältniß $\frac{a}{1}$ nach der natürlichen Ordnung der Zahlen §. 4 zusammen setzt: so entsteht folgende Reihe von Potenzen

$1 \quad a^1 \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5 \quad a^6 \quad a^7 \quad a^8 \quad a^9 \quad a^{10}$ u. s. w.

Die darüber stehenden Logarithmen oder Exponenten folgen allemal so, wie hier, in der natürlichen Ordnung unserer Zahlen, was auch a für einen Werth haben möge. Also hängt es jedesmal von der Bestimmung dieses Werths ab, wenn man bestimmen will, zu welcher Reihe von Potenzen ein solches logarithmisches System gehört. a heißt daher die Basis oder **Grundzahl** des logarithmischen Systems.

Z. B. 1) a = 2 giebt folgendes logarithmisches System:

a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Hier ist nun l 2 = 1; l 32 = 5; l ~~52~~ 512 = 9.

2) a = 3 giebt für eben diese Reihe folgende Werthe,

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049,

also für diese Basis ist l 3 = 1; l 243 = 5; l 19683 = 9.

3) a = 4 giebt folgende Reihe mit den darunter gesetzten Logarithmen:

4,	16,	64,	256,	1024;
1	2	3	4	5

wo also schon die 5te Potenz = 1024, und daher **log. 1024 = 5.**

4) für a = 10, welches die gewöhnliche Basis unserer Logarithmen ist, wäre log 100 = 2, log. 1000 = 3, log 10000 = 4 u. s. w.

Uebrigens mag a so groß oder so klein angenommen werden als man will: so sieht man doch leicht, daß aus dem positiven

Verfahren des dreifachen b.

$$(c^3 - css)(ss + cc) - 2ssc(2 - ss - cc)$$

$$\begin{array}{l} 4ss + 4cc - 2 - s^4 - c^4 \\ \quad + 2cc - 2 \quad - 2c^4 \\ + 2ss + 2cc \quad + 2s^4 \\ - 4ss - 2cc + 2 \\ \hline 2ss + 6cc - 2 + s^4 - 3c^4 \end{array}$$

Also

$$s \qquad sc\frac{2}{ss+cc} \qquad s\,\frac{2 \begin{array}{l} - 6cc + c^4 \\ - 2ss + s^4 \end{array}}{2 \begin{array}{l} - 6ss + 3s^4 \\ - 2cc - 3c^4 \end{array}}$$

$$c \qquad \frac{cc - ss}{2 - cc - ss} \qquad c\,\frac{2 \begin{array}{l} - 6ss + s^4 \\ - 2cc + c^4 \end{array}}{2 \begin{array}{l} - 6cc + 3c^4 \\ - 2ss - s^4 \end{array}}$$

$$f^2 = 4ss\frac{1 - \delta\delta}{1 + s^4}$$

10

$$s \quad sc\,\frac{2 + 2ss}{1 + s^4} = sc\,\frac{2 + 2cc}{1 + c^4}$$

$$c \quad \frac{1 - 2ss - s^4}{1 + 2ss - s^4} = \frac{1 - 2cc - c^4}{1 + 2cc - c^4}$$

$$y = \frac{\cancel{x} - xx}{1 + xx}$$

$$z = \frac{1 - 2x - xx}{1 + 2x \cancel{x} - xx}$$

$$x = xx + yxx + y$$

$$2xz + 2x = xxz - xx + 1 - z$$

$$2(z+1)(y+1)xx - xx(z-1) = +1 - z$$

$$+ 2(z+1)y$$

$$\frac{1 - z - 2(z+1)y}{2zy + z + 2y + 3}$$

$$s \quad \frac{3 - 6s^4 - s^8}{1 + 6s^4 - 3s^8}$$

$$c \quad \frac{3 - 6c^4 - c^8}{1 + 4cc - 6c^4 + 4c^6 + c^8} = c\,\frac{1 + 6s^4 - 3s^8}{1 + 4ss - 6s^4 + 4s^6 + s^8}$$

~~Die formeln scheinen einfacher zu werden~~

wenn man anstatt S u. $\sqrt{\frac{1-ss}{1-ss}}$, S

u. $\sqrt{1-s^4}$ gebraucht. Man hat dann

$s.1 = s$

$t.1 = t$ $\qquad 1 = s^4 + t^4$

vom d. Bogen

$s2 = \frac{2st}{1+s^4}$ $\qquad t2 = \frac{1-6ss+s^8}{1+2ss+s^8} = \frac{t^8 - 8t^4 + 8}{t^8}$

$s3 =$

$$-\frac{d^{n-1}\left\{(x-h)^n f'x \cdot \frac{d^n \log \varphi(x,\alpha)}{1.2.3\ldots n\, d\alpha^n}\right\}}{1.2.3\ldots n-1.\, i\, dx^n}$$

~~$sA + B$~~

$$\varphi(x,\alpha) = x - h - \alpha\xi$$

$$\overline{\varphi(x,a)} \qquad \log.(x-h-\alpha\xi)$$

Lenitrag

$\cancel{x}-h$

$$fx = fh + \alpha^{f'h \frac{dx}{d\alpha}} \qquad \frac{-\xi}{x-h-\alpha\xi}$$

Gran

$b\ h$

$$(x-h)f'x\,\frac{\frac{d\varphi\, x,\alpha}{dx}}{\varphi(x,\alpha)} \qquad \varphi(x+\alpha) = 0$$

$$\frac{d\varphi(x,\alpha)}{dx} + \frac{d\varphi(x,\alpha)}{d\alpha} = 0$$

$$(x-h)\frac{\frac{d\varphi(x,\alpha)}{dx}}{\varphi(x,\alpha)}$$

tiven Werth derselben nie eine negative Potenz entstehen könne; und da jedes System für ein positives a berechnet wird, daß man keine Logarithmen für negative Zahlen habe.

§. 43. Ist a ein Bruch $= \frac{c}{d}$; so ist $a^2 = \frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c^2}{d^2}$. Also $\sqrt{\frac{c^2}{d^2}} = \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{d^2}} = \frac{c}{d}$, und $a^3 = \frac{c^3}{d^3}$, folgl. $\sqrt[3]{\frac{c^3}{d^3}} = \frac{c}{d}$
$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{18}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; $\sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$;
$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

§. 44. Ist a ein Product aus 2 oder mehrern Factoren $= pm$; so ist $a^2 = pm \,.\, pm = p^2 \,.\, m^2$. Also $\sqrt{a^2} = \sqrt{p^2} \,.\, \sqrt{m^2} = pm$; $a = 6 = 2 \,.\, 3$, giebt $a^2 = 36 = 4 \,.\, 9$, also $\sqrt{36} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{9} = 2 \,.\, 3 = 6$.

§. 45. Man kann dies sehr vortheilhaft gebrauchen, wenn eine Zahl keine vollkommne Potenz aus irgend einer angeblichen Zahl ist. Dergleichen ist z. E. die Zahl 2 als Quadrat betrachtet. Sicher läßt sich ein Quadrat gedenken, das 2mal so groß ist, als ein anderes. Aber wie wird man nach unsern bekannten Zahlen-Systemen die Wurzel davon genau angeben können? Wollte man sie $\frac{3}{2}$ setzen: so ist $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, also zu groß. $\frac{4}{3}$ wäre zu klein, denn $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$ zu klein. Es wird in der Folge gezeigt werden, wie man die Wurzel zwar durch Näherung finden, aber nie genau ausdrucken könne. Solche Zahlen heißen **Irrational-Zahlen**, die man unter dem allgemeinen Ausdruck $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, oder $\sqrt[n]{a}$ u. s. w. begreift, vorausgesetzt, daß aus diesen Zahlen die Wurzel sich nicht genau angeben lasse. Indeß lassen sie sich doch oft zum Theil von ihrer Irrationalität befreyen: So ist $\sqrt{12} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{3}$ (§. 44.) $= 2\sqrt{3}$; $\sqrt{48} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{3} = 4 \,.\, \sqrt{3}$; $\frac{18}{\sqrt{2}} = \frac{9 \,.\, \sqrt{2} \,.\, \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2} = \sqrt{162}$.

§. 46. Summe und Differenz der Potenzen kann man durch die Addition und Subtraction nur von Potenzen finden, die einerley Wurzel und Exponent

 haben.

haben. In andern Fällen begnügt man sich, sie durch das bekannte Zeichen + oder — mit einander zu verbinden, wofern sie nicht in Ziffern gegeben sind. So ist $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$ (§. 8. 1.); $3ab - ab = 2ab$; $6a^2b^3 - 4a^2b^3 = 2a^2b^3$; aber $5a^2 \pm 4a^3$ muß so bleiben, wenn man den Werth von a^2 und a^3 nicht in Zahlen berechnet.

§. 47. **Lehrsatz. Potenzen von einerley Wurzel multipliciren heißt ihre Exponenten oder Logarithmen addiren.**

Beweis: $a^3 . a^2 = a^{3+2} = a^5$. Denn $aaa.aa = a^5$ (§. 40.) Eben so kann man zeigen, daß überhaupt $a^m . a^n = a^{m+n}$, was man auch für einen Werth für m und n setzen will. Also ist $l. (a^m . a^n) = l. a^m + l. a^n = m+n = l. a^{m+n}$ (§. 41.); $l. (16 . 64) = l. 16 + l. 64$. Ist nun $a = 4$; so ist $l. 16 + l. 64 = 2 + 3 = 5 = l. 1024$. Setzt man $a = 2$; so findet man eben das, obgleich alsdann $l. 16 + l. 64 = 4 + 6 = 10$ ist. Denn für diese Basis ist $10 = l. 1024$. (§ 42.)

§. 48. Um zwey solche Systeme zu vereinigen, setze man allgemein $c = a^m$, also $c^2 = a^m . a^m = a^{2m}$; $c^3 = a^{3m}$, $c^4 = a^{4m}$, $c^5 = a^{5m}$, $c^n = a^{nm}$. Es sey nun $c = 4$, und $a = 2$, also $c = 2^2$, daher $m = 2$; folgl. $c^5 = a^{2.5}$; oder $4^5 = 2^{10} = 1024$; daher $l. 4^5 = l. 2^{10}$.

§. 49. Lehrsatz: **Potenzen von einerley Wurzel dividiren, heißt ihre Exponenten oder Logarithmen subtrahiren.**

So wie die Multiplication der Potenzen die Addition der Exponenten erfodert: so muß die Division durch ihre Subtraction bewirkt werden (§. 14.). Also $a^m : a^n = a^{m-n}$, wie man für jeden Werth der m und n leicht zeigen kann. Z. B. $m = 6$, $n = 4$ giebt $\frac{aaaaaa}{aaaa} = aa = a^{6-4}$. Für $a = 3$ ist (§. 42.) $\frac{a^6}{a^4} = \frac{729}{81} = 9 = a^2$; und $l. 729 - l. 81 = 6 - 4 = 2 = l. 9$.

Theilt man also auch hier die ganze Peripherie in 360° so ist

chorda arcus		
0°	0	
30°		$= \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}{1+\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}} = \dfrac{1-\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}{\sqrt{(4-\sqrt{12})}}$
45°	0.6435943	$= \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$
60°	0.8253788	$= \sqrt[4]{(\sqrt{12}-3)} = \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\,\sqrt[8]{3}$
90°	1	

$$d\sin = \frac{2}{c+\frac{1}{c}}\,d\phi = \left(\frac{1+ss}{cs}\right)d\phi$$

$4-\sqrt{12}$ $\quad 7\sqrt{12}-24$

$\sqrt{12}-3$

$$d\cos = \frac{-2}{s+\frac{1}{s}}\,d\phi$$

$$\frac{\sqrt{(4-\sqrt{12})}-\sqrt{(7\sqrt{12}-24)}}{4-\sqrt{12}}$$

$$\sin = \varphi - \tfrac{1}{10}\varphi^5 + \tfrac{1}{120}\varphi^9$$

$$\cos = 1 - \varphi\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi^4$$ 11

$$\frac{(4+\sqrt{12})\left(\sqrt{(4-\sqrt{12})}-\sqrt{(7\sqrt{12}-24)}\right)}{4}$$

$$\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{10}\varphi^3$$

$$\frac{1}{\cos} = 1 + \varphi\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi^4$$

$$\phi = s + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}s^5 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{9}\,s^9 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\,\tfrac{1}{13}\,s^{13}$$

Man nenne nach der Analogie des Kreises

$\frac{s}{c}$ . . . t so ist

$$dt = \left(\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{cc}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{cc}+\tfrac{ss}{cc}\right)\right)d\varphi$$

$$s\,4 = sc\,\frac{1+ss}{1+s^4}\;\overline{1+20s^4-26s^8-20s^{12}-s^{16}}$$

$$\text{Si}\ \frac{dx}{X} = dy\ \text{erit}$$

$$\frac{dx}{dy} = X$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = X\frac{dX}{dx} = \tfrac{1}{2}d\,XX$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = XXd^2X + XdX^2 = \cancel{\ldots} = \tfrac{1}{2}Xd^2XX$$

$$\frac{d^4x}{dy^4} = XXXd^3X + 4XXdXd^2X + XdX^3 \ \#$$

$$1.\,(4) + 7\,(3)(1) + 4\,(2)(2) + 11\,(2)(1)(1) + (1)(1)(1)(1)$$

$$1\,(5) + 11\,(4)(1) + 15(3)(2) + 32\,(3)(1)(1) + 34\,(2)(2)(1) + 26.\ 2.1.1.1.$$
$$+\ 1.1.1.1.1$$

$$\# = \tfrac{1}{6}X^3d^3X$$
$$+\tfrac{1}{6}XXd^3XX$$
$$+\tfrac{1}{6}Xd^3X^3$$

(0)
(0.1)
(0.0.2) + (0.1.1)
(0003) + 4 (0012) + (0111)
(00004) + 7 (00013) + 4 (00022) + 11 (00211) + (01111)
6 7

$B = (1)\,a$
$C = (1)\,B + (0.2)\,a$
$D = (1)\,C + 3\,(0,2)\,B + (003)\,C$
$E = (1)\,D +$

§. 50. Zusatz: $\frac{a}{a} = 1 = a^{1-1} = a^0$. Also l. 1 = 0 für jedes logarithmisches System, womit also auch jede der Reihen (§. 42.) anfangen muß.

§. 51. Zusatz: $\frac{1}{a} = a^{0-1} = a^{-1}$. Also l $\frac{1}{a} = -1$.

Eben so $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$, und log. $\frac{1}{a^2} = -2$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ und log. $a^{-n} = -n$

Alle Potenzen daher, deren Exponenten negativ sind, sind Brüche, deren Zähler = 1, und deren Nenner eben die Potenz mit einem positiven Exponenten ist; und alle negative Logarithmen sind Logarithmen solcher Brüche.

§. 52. **Potenzen zu noch höhern Potenzen erheben, heißt den Exponens der Potenz mit der Zahl, welche die Erhöhung der Potenz bestimmt, multipliciren.** Wenn nämlich a^m in die 3te Potenz erhoben werden soll: so hat man $a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{3m}$, wie schon §. 48 gezeigt ist. Ueberhaupt $(a^m)^n = a^{mn}$.

Nun ist l. a = 1; also log. $a^m = m = m$ l. a und l. $a^{mn} = mn$ l. a. Es sey $4 = a^2$ in die 5te Potenz zu erheben: so ist $4^5 = a^{10}$ und 5 l. 4 = 10 l. 2 (§. 42.)

§. 53. **Die Wurzel von einer verlangten Ordnung aus einer gegebenen Potenz ausziehen, heißt, den Exponenten oder Logarithmus der gegebenen Potenz, mit dem Wurzel Exponenten dividiren.**

Beweis. Der auf solche Weise gefundene Exponent mit der Zahl des Wurzel-Exponenten multiplicirt, giebt die Potenz, daraus die Wurzel gezogen war, wieder. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; denn $\frac{m \cdot n}{n} = m$; also $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^m$ (§. 40.) $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. Es sey a = 2, so ist $a^6 = 64$ und $\sqrt[3]{64} = 4$; und $\frac{l.\ 64}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Durch

Durch diese Methode also lassen sich vermittelst der Logarithmen aus jeder Potenz die Wurzeln von jeder verlangten Ordnung leicht finden.

§. 54. Zusatz. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $a\sqrt{a} = a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$ (§. 51.) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^4}} = a^{2-\frac{4}{3}} = a^{\frac{6-4}{3}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[3]{a} \,.\, \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \,.\, a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2+3}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$; $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$, welches alles auch mit Logarithmen bequem gemacht werden kann.

§. 55. Grundsätze. Gleiche Größen zu einerley Potenz erhoben, aus gleichen Größen Wurzeln von gleichem Grade gezogen, sind einander gleich; so wie auch ihre Exponenten und Logarithmen einander gleich sind.

§. 56. Aus §. 39. a) erhellet, daß die Wurzel von a^2 sowohl $+a$ als $-a$ seyn könne. Denn $-a \,.\, -a = +a^2 = +a \,.\, +a$. Also $\sqrt{a^2} = \pm a$. Setzt man $\pm c = a^m$: so ist auch $c^2 = a^{2m}$ allemal positiv, man mag $+c$ oder $-c$ zur Wurzel haben. Alle gerade Potenzen sind daher positiv, und $-c^2$ oder $-a^{2m}$ sind als Producte aus ihren Wurzeln betrachtet unmögliche Größen. Daher ist überhaupt $\sqrt{-b}$, oder wie die Zahl heißen mag, die man sich als ein Quadrat, und doch negativ gedenken soll, eine unmögliche Größe. Man nennt sie auch imaginaire oder eingebildete Zahlen. Kommen solche Größen in einer Aufgabe vor: so weiß man, daß sie was unmögliches enthalte, wofern sie nicht weggeschafft werden können. Daher ist es nöthig, etwas von ihrer Rechnung zu wissen.

Wurzel [illegible] Quadrats

§. 57. $\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-a} = -a$ (§. 40.) folglich $\frac{-a}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-a}$ (§. 15.); $\frac{-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$.

§. 58. $\sqrt{+a} \,.\, \sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$ (§. 39.). Es sey $b = 1$; so ist $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{-1} = \sqrt{-a}$.

§. 59. $\frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{ab} \,.\, \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \,.\, \sqrt{-1}}$ (§. 58.) $= \sqrt{a}$; $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{+2}$.

§. 60.

Sit $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = f:\Phi(x,y)$ erit Integrale

$$z = \int dx \int P dx + x f:y + F:y$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = P\frac{\partial z}{\partial x} + Q \quad \text{Int:} \quad z = \int e^{\int P dx} dx \int e^{-\int P \partial x} Q dx + f:y.\int e^{\int P dx} dx + F:y$$

ubi P et Q s. fctnes ipsorum x, y.

$$\frac{a\,d\overset{n}{y}}{dx^2} = yy + x^n$$

~~[illegible]~~ ...

$$\text{sit } y = \frac{-a\,dt}{t\,dx} \quad \Big\| \quad -\frac{aa\,d^2t}{t\,dx^2} + \frac{aa\,dt^2}{t^2dx^2} = \frac{+aa\,dt^2}{t^2dx^2} + x^n$$

$$\frac{aa\,d^2t}{dx^2} + t x^n = 0$$

$$t = A + Bx^{n+2} + Cx^{2n+4} \ldots$$

$$\begin{array}{l|l} aa\,B.n+2.n+1 & +aa\,C\;2n+4.2n+3 \\ + \quad A & \quad +B \;\&c \end{array}$$

n

$$t = A\left(1 - \frac{aa}{n+1.n+2}x^{n+2} + \frac{a^4 \; x^{2n+4}}{n+1.n+2.2n+3.2n+4} \;\&c.\right)$$

$$+ B\left(x - \frac{aa}{n+2.n+3}x^{n+3} - \frac{a^4}{n+2.n+3.2n+4.2n+5}\;\&c\right)$$

$$y = \frac{\cancel{-A} \; \frac{a^3x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^5}{n+1.n+2.2n+3} \ldots + \mathfrak{A}\left(a - \frac{a^3}{n+2}x^{n+2}\right)}{\left(1 - \frac{aa}{n+1.n+2}x^{n+2} \ldots\right) + \mathfrak{A}\left(x - \frac{aa}{n+2.n+3}x^{n+3} \ldots\right)}$$

66 fri

$$x = y - ay^{m+1} + by^{2m+1} - cy^{3m+1} \ldots\ldots\ldots$$

erit

$$y = \cfrac{x}{1 + \cfrac{ax^m}{1 + \cfrac{\left(ma - \frac{b.m}{a}\right) x^m}{1}}}$$

$$\cfrac{x}{1 + \cfrac{ax^m}{1 + \cfrac{\left(\frac{b}{a} - \frac{m}{2}a\right) x^m}{1 + \cfrac{c}{\frac{b}{a} - \frac{m}{2}a}}}}$$

l.f. $X\,dx = dy$

$$X\frac{dx}{dy} = 1$$

$$X^3\frac{d^2x}{dy^2} = -X'$$

$$X^5\frac{d^3x}{dy^3} = 3X'X' - XX''$$

$$X^7\frac{d^4x}{dy^4} = 15(1.1.1) + (0.1.2) - (0.0.3)$$

$$\frac{1}{4}(4+\sqrt{12})\left(\sqrt{(4-\sqrt{12})} - \sqrt{(7\sqrt{12}-24)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(4+\sqrt{12})} - \frac{1}{4}(4+\sqrt{12})\sqrt{(7\sqrt{12}-24)}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(4+\sqrt{12})} - \sqrt{(7\sqrt{12}-24)} - \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{24\sqrt{3}}{2} - 18\right)}$$

§. 60. $\frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{+a}} = \sqrt{-b}$; $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{+2}} = \sqrt{-2} = \sqrt{2}.\sqrt{-1}$ (§. 58.) Es sey $a = b = 1$; so ist $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{+1}} = \sqrt{-1} = \frac{-1}{\sqrt{-1}}$ (§. 57.)

§. 61. $-\sqrt{-1} = \frac{+1}{\sqrt{-1}}$; denn $-1.\sqrt{-1}$ $= \frac{-1.-1}{\sqrt{-1}}$ (§. 57.) $= \frac{+1}{\sqrt{-1}}$ (§. 39.)

Zweiter Abschnitt.

Rechnung mit zusammengesetzten Zahlen.

§. 62. Das decadische System unserer Zahlen läßt sich aus der Lehre von den Potenzen erklären. Nämlich jede ganze oder gebrochene Zahl besteht aus solchen Ziffern, wie §. 4, mit Potenzen der 10 multiplicirt. Die Exponenten dieser Potenzen sind für ganze Zahlen positiv und für Brüche negativ. $600 = 6.10^2$; $\frac{6}{100} = 6.10^{-2}$ (§. 51.) Schreibt man daher mit Weglassung des beständigen Factors 10 bloß den Exponenten der jedesmaligen Potenz der Zehne neben der Ziffer: so hat man nicht einmal die Bezeichnung ihres Werths durch den Platz nöthig, sondern kann solche Zahlen doch richtig numeriren. Z. E. $4^{+8}\ 3^{+6}\ 2^{+4}\ 5^{+1}\ 3^0\ 7^{-1}\ 8^{-3}\ 6^{-4} = 400000000 + 3000000 + 20000 + 50 + 3 + \frac{7}{10} + \frac{8}{1000} + \frac{6}{10000} = 40302053,7086$; wo das Comma die Decimal-Brüche von den ganzen Zahlen absondert. Man kann auch statt des Comma ein Punkt gebrauchen, doch ist jenes gewöhnlicher. Hat man Decimal-Brüche ohne ganze Zahlen: so wird auf den Platz der Einer 0 gesetzt, und dieses durch ein Comma von den Plätzen der Brüche abgesondert. Also $0,7 = \frac{7}{10}$; $0,008 = \frac{8}{1000}$ u. s. w.

§. 63. Aufgabe: Ganze Zahlen und Decimal-Brüche zu addiren oder zu subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die Zahlen von einerley Klasse oder Potenz der 10 unter einander nach §. 8. 1. und wenn in der Addition die Summe solcher Zahlen Einheiten höhe=

höherer Klassen enthalten, so zähle man sie da als gleichartige Größen mit jenen zusammen. Fehlt bey der Subtraction in einer Klasse eine Zahl, oder ist sie nicht groß genug um die darunter stehende zu subtrahiren, so zerlege man die nächste Zahl in der höhern Klasse, davon die Subtraction geschehen soll, so, daß eine Einheit derselben für die niedrigere Klasse nach ihrem Werth gerechnet werden kann. Man nennet dies **Borgen**. Die geborgte Einheit muß auch oft wieder zerlegt werden.

Exempel der Addition.	Exempel der Subtraction.
3785, 365	
792, 8546	268.00, 47.06
0, 0965	1406, 2354
4578, 3161	25394, 2352

Im Subtractions-Exempel fehlt auf dem Platz der Tausendtel eine Zahl. $\frac{7}{100}$ wird daher in $\frac{6}{100} + \frac{1}{100} = \frac{6}{100} + \frac{10}{1000}$ zerlegt, und von der letzten $\frac{5}{1000}$ subtrahirt. Auf dem Platz der Einer und Zehner ist auch keine Zahl vorhanden; daher 800 in $700 + 100 = 700 + 90 + 10$ zerlegt wird, wovon 406 subtrahirt wird.

§. 64 Aufgabe: **Benannte Zahlen zu addiren oder zu subtrahiren.**

Auflösung: Man muß hier das Gesetz ihrer Eintheilung kennen, und übrigens bey positiven Größen nach §. 63. verfahren; bey entgegengesetzten Größen aber §. 38. zu Hülfe nehmen.

Exempel der Addition.

1) mit einerley Zeichen:

Rthl.	ggr.	pf.
7	+ 8	+ 6
6	+ 4	+ 8
5	+ 15	+ 7
4	+ 20	+ 5
24 thl	1 ggr	2 pf.

Näml. 26 pf. = 2 ggr 2 pf. die 2 ggr. zu den übrigen ggr gerechnet geben 49 ggr. = 2 thl 1 ggr

Exempel der Subtraction.

5 Rthl.	+ 4 ggr.	+ 8 pf.
4 „	+ 20 „	+ 5 „
	+ 8 ggr.	+ 3 pf.

Hier ist 5 Rthl. in 4 Rthl. + 24 ggr. zu zerlegen, um von (24 + 4) ggr. = 28 ggr. 20 ggr. zu subtrahiren.

2) mit

Iterum

$$x = \cfrac{y}{1+\cfrac{ay^m}{1+\cfrac{by^m}{1+ \&c.}}}$$

$$x = y - ay^{m+1} + a(a+b)y^{2m+1} \ldots\ldots$$

$$y = x + ax^{m+1} + (maa - ab)x^{2m+1}$$

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{3}{5}}$

B p. 16

$$\varphi . 1 = \varphi . \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \varphi \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$\varphi . \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \cancel{\varphi \sqrt{\tfrac{1}{7}}}\ \varphi \tfrac{1}{7}$$

$$\varphi \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \cancel{\varphi 1} - \varphi \sqrt{\tfrac{24}{25}}$$

$$2\varphi \tfrac{1}{7} =$$

$$\varphi 1 = \varphi \sqrt{\tfrac{1}{m}} + \varphi \sqrt{\tfrac{m-1}{m+1}}$$

$$\varphi \sqrt{\tfrac{1}{m}} - \varphi \sqrt{\tfrac{m-1}{m+1}} = \varphi \frac{mm-2m-1}{mm+2m+1}$$

B

$$\begin{array}{c|l|l|l} s & sc\ \dfrac{2+\cancel{3}ss}{1+s^4} & s\ \dfrac{\cancel{3}-6s^4}{1+6s^4} & sc\ \dfrac{4+12-12}{1+2} \\ c & \dfrac{1-2ss-s^4}{1+2ss-s^4} & c\ \dfrac{1+6s^4}{1+4ss-6s^4} & \end{array}$$

$3+12-18$
-6
$1 \quad +12$

$1- ss\frac{1-ss}{1+ss}\ \dfrac{3+62s^4}{1+4ss}$ *

$1+5ss$

$$\begin{array}{c|l} s\ \dfrac{a+bss+cs^4}{1+dss+es^4} & sc\ \dfrac{(a+1)+(b+d+f+ak)ss+}{1+(1+dk-a)ss} \\ c\ \dfrac{f+gss+hs^4}{1+kss+ms^4} & \dfrac{1+(d+f-a)\ ss}{1-} \end{array}$$

$a + b + c$
$+ak + bk$
$+am$

$1 - \frac{1.1}{2.2}BB - \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}B^4 - etc.$

$+f + g$

$1+(dk+1)$. $\cancel{B}B+\frac{1}{4}B^3+\frac{9}{64}B^5 .. = 4z+8z^5$

$1+ d+f-1\ ss$ $\quad B = 4z-16z^3+376z^5$
$\cancel{+16 \quad -192}$
$+576$

$1-4+94$
$1-8+172$
$-4+32+\cancel{276}688 \to -176$
$+12+192$
-80

$1\ Periph. = 1-4z^2+20z^4+800z^6$

$z^{-\frac{1}{2}}$

$4-16+48$
$+16-192$
$+144$

$1-4+16-48$
4

$1-4$

2) mit verschiedenen Zeichen. Man verfährt nach §. 38.

7 Rthl.	— 5 Ggr.	+ 3 Pf.
6 =	+ 8 =	— 2 =
2 =	+ 17 =	+ 5 =
9 =	— 16 =	— 8 =
24 Rthl.	+ 4 Ggr.	— 2 Pf.

7 Rthl.	— 5 Ggr.	+ 3 Pf.
3 =	— 16 =	— 6 =
4 Rthlr.	+ 11 Ggr.	+ 9 Pf.

§. 65. Zusatz: Wenn Buchstaben statt benannter Zahlen gebraucht werden: so fällt die Auflösung in Einheiten höherer Gattungen weg, und man verfährt bey entgegengesetzten Größen bloß nach §. 38.

Addition.

$$\begin{array}{rrrr} 3a & +5b & -c & +3d \\ 4a & +b & +6c & -8d \\ a & -6b & -4c & +7d \\ \hline 8a & & +c & +2d \end{array}$$

Subtraction.

$$\begin{array}{rrrr} 5a & -3b & +2c & -4d \\ 3a & +2b & -6c & +d \\ \hline 2a & -5b & +8c & -5d \end{array}$$

§. 66. Aufgabe: **die Summe und Differenz zweyer Zahlen zu addiren und zu subtrahiren.**

Auflösung: Die Zahlen seyn a und b, so ist $(a+b) + (a-b) = 2a$ und $(a+b) - (a-b) = a+b-a+b = 2b$.

Also ist $a = (\frac{a+b}{2}) + (\frac{a-b}{2})$ und $b = (\frac{a+b}{2}) - (\frac{a-b}{2})$.

§. 67. Aufgabe: **Eine zusammengesetzte Zahl mit einer einfachen zu multipliciren.**

Auflösung und Beweis: Die Zahl sey $= a + b$, der Factor $= 3$; so ist $(a+b) \cdot 3 = a+b+a+b+a+b = 3a+3b$. (§. 10.)

Anmerk. 3 heißt der gemeinschaftliche Factor. Die zusammengesetzte Größe wird in Klammern eingeschlossen, und der gemeinschaftliche Factor, wenn es eine Ziffer ist, linker Hand davor gesetzt. So ist $3a + 3b = 3(a+b)$. Bey Buchstaben ist dies gleichgültig. Z. E. wenn c der gemeinschaftliche Factor wäre: so könnte man schreiben $ac + bc = (a+b)c$.

§. 68. Aufgabe: **Eine ganze Zahl mit einer andern ganzen Zahl zu multipliciren.**

Auflösung und Beweis: 1) Beyde Factoren sind sonst einfache Ziffern, aber Producte aus Potenzen der Zehn (§. 62.): so verfährt man nach §. 10 und 11, und hängt so viel Nullen am Product, als die Summe der Exponenten der Zehn beträgt (§. 47.), $3000 \cdot 600 = 3 \quad 6 \cdot 10^{3+2} = 1800000$.

2) Einer der beyden Factoren ist zusammen gesetzt: so verfährt man mit dessen Theilen nach §. 67. schreibt aber nur von dem jedesmaligen Produkt die niedrigste Ziffer, auch wenn sie 0 ist, unter den Platz des Multiplicandus, und rechnet die Ziffer der höhern Klasse zu dem Produkt der nächstfolgenden höhern Ziffer, oder schreibt sie dahin, wenn diese = 0 wäre.

$$\begin{array}{r} 2400 \\ \underline{3} \\ 7200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4060 \\ \underline{8} \\ 32480 \end{array}$$

3) Beyde sind zusammengesetzte Zahlen: so verfährt man mit allen Theilen des Multiplicators, wie vorher, setzt aber die niedrigste Ziffer unter den Platz, den er selbst hat.

$$\begin{array}{r} 30246 \\ \underline{432} \\ 60492 \\ 90738 \\ \underline{120984} \\ 13066272 \end{array}$$

§. 69. Oft läßt sich der Multiplicator in Factoren zerlegen, und alsdann multiplicirt man das Product der Factoren nach einander. Z. B. $432 = 6 \cdot 8 \cdot 9$. also $30246 \cdot 432 = 30246 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9$.

§. 70. Aufgabe: **Factoren, die Decimal-Brüche enthalten, mit einander zu multipliciren.**

Auflösung. Man verfährt wie bey ganzen Zahlen (§. 67 und 68) und streicht vom Product so viel Ziffern von der Rechten zur Linken ab, als die Summe der Decimal-Brüche beträgt.

Der Beweis ist §. 47 u. 49; $30,246 \cdot 4,32 = 130,66272$.

§. 71. Benannte Zahlen können nur durch unbenannte multiplicirt werden, (§. 3 und 9.)

§. 72. $(c+d)(a+b) = (c+d)a + (c+d)b$ (§. 67.) wenn man statt des dortigen c hier $c+d$ setzt, $= ac + ad + bc + bd$.

§. 72.

$$P.nx = nQ^{nn-1}p - \frac{n.nn-1.nn+6}{60}Q^{nn-5}p^5 - \frac{n^6-13n^4+36nn+420.n.nn-1}{10080}Q^{nn-9}p^9$$

$$l.P.nx = \begin{matrix} ln + lp \\ +(nn-1)lQ \end{matrix} - \frac{nn-1.nn+6}{60}\frac{p^4}{Q^4} - \left.\begin{matrix}\frac{1-14+49+384-420}{10080} \\ -\frac{1+10+13-60+36}{7200}\end{matrix}\right\}\frac{p^8}{Q^8}$$

$1+5-6$

$1+10-12$
$+25-60+36$

$$l.P_{nx} = \begin{matrix} lnp \\ +(nn-1)lQ \end{matrix} - \frac{nn-1.nn+6}{60}s^4 - \left(\frac{1}{4200}n^8 * \ldots\right.$$

$$l.P.z = l\,\sin - l\,\text{Arc.}$$

$$lQz = \begin{matrix} \cancel{+nn}\; l.Q\frac{z}{n} \\ +lnP\frac{z}{n} - lz \end{matrix}$$

Peripheria Ellipseos

$$= 1 - \frac{1.1}{2.2}BB - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}B^4 \text{ etc.}$$

$$B + \frac{1}{4}B^3 + \frac{1}{4}.\frac{9}{16}B^5 \ldots = \left(2z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{1}{2}} + \text{etc.}\right)^2 = rr$$

$(a^2b) = (1)(2) - 3(3)$

$(a^3b) = (1)(1)(2) -$

$$= \frac{2bbrdr}{BBdB} - \frac{rr}{B}$$

$$-\frac{m[\alpha+b+\gamma..-1]}{[\alpha][b][\gamma]}1^\alpha 2^b 3^\gamma 4^\delta$$

$$+\frac{(m-1)[\alpha+b+\gamma..-2]}{[\alpha-1][b][\gamma]}$$

$$\frac{2dr}{r} \quad \frac{dB}{B(1-BB)}$$

$$\frac{2Bbbrdr - rrdB}{B^3dB} = \int\frac{r^2bb\,xdp}{B^4\,pdx}$$

$$\frac{B}{rr}\;\frac{2bbrdr}{BBdB} - \frac{bb}{BB}$$

$$+m-1 - m\frac{(\alpha+b+\text{etc.}-1)}{\alpha}$$

$\int$im

$1^\alpha 2^b 3^\gamma$ etc.

$$bb\frac{2bbdr}{rBdB} - \frac{b}{BB}$$

$$\begin{matrix}\alpha m-\alpha \\ -\alpha m-m\end{matrix}\;\frac{bb}{BdB}\left(\frac{2dr}{r} - \frac{dB}{B}\right.$$

$2d\log px$

$\alpha+2b+3\gamma$ etc. $= m$

$$-\frac{[\alpha+b+\gamma\ldots-2]}{[\alpha][b][\gamma]\text{ etc.}}\left(\alpha+m(b+\gamma+\delta+\text{etc.}-1)\right)$$

$$\frac{2dp.bb}{pBdB}$$

coeff. $= -$

$$\frac{2(1-bb)bdr + rdb}{r^3b}$$

$$\frac{2BBbbdr - rBdB}{r^3bb} = \int\frac{xdp}{pdx}$$

$$\frac{\frac{2dr}{r} + \frac{db}{b(1-bb)}}{rr(1-bb)}$$

rr

$$\frac{1}{b} + \frac{b}{1-bb} \quad \frac{1}{b} + \frac{\frac{1}{2}}{1-b} - \frac{\frac{1}{2}}{1+b}$$

14

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n} =$$

$$-\frac{2}{k}\cos\frac{m\pi}{k}\, l\sqrt{(1-2x\cos\frac{\pi}{k}+xx)}$$
$$-\frac{2}{k}\cos\frac{3m\pi}{k}\, l\sqrt{(1-2x\cos\frac{3\pi}{k}+xx)}$$
$$-\&c$$
$$-\frac{2}{k}\cos\frac{im\pi}{k}\, l\sqrt{(1-2x\cos\frac{i\pi}{k}+xx)}$$
$$+\frac{2}{k}\sin\frac{m\pi}{k}\, A.tg\,\frac{x\sin\frac{\pi}{k}}{1-x\cos\frac{\pi}{k}}$$
$$+\frac{2}{k}\sin\frac{3m\pi}{k}\, A.tg\,\frac{x\sin\frac{3\pi}{k}}{1-x\cos\frac{3\pi}{k}}$$
$$+\&c$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt[4]{(1-p^4)}} = (\text{posito } 1-p^4 = p^4x^4)$$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, l\,\frac{1-x\sqrt{2}+xx}{1+x\sqrt{2}+xx} \qquad x=\sqrt[4]{\frac{1-p^4}{p^4}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, A.tg.\,\frac{x\sqrt{2}}{1-xx} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, A.\cos\,\frac{(1-xx)^2}{1+x^4}$$

Also $x=0 \mid 0$
$x=\infty \mid$

Also fine $p=0,\!|8$
$x=\sqrt[4]{\frac{5904}{4096}}$

§. 73. $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b = (a+b)^2$.

§. 74. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; Differenz zweyer Quadrate.

§. 75. $(a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

§. 76. $(a^2 + ab + b^2)(a-b) = a^3 - b^3$; und $(a^2 - ab + b^2)(a+b) = a^3 + b^3$; ferner $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = a^6 - b^6$.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & a & +\, b \\
 & & a & +\, b \\
\hline
 & & ab & +\, b^2 \\
 & a^2 & +\, ab & \\
\hline
 & a^2 & +\, 2ab & +\, b^2 \\
 & & a & +\, b \\
\hline
 & a^2b & +\, 2ab^2 & +\, b^3 \\
a^3 & +\, 2a^2b & +\, ab^2 & \\
\hline
a^3 & +\, 3a^2b & +\, 3ab^2 & +\, b^3
\end{array}
$$

§. 77. $(a + b\sqrt{c})^2 = a^2 + b^2c + 2ab\sqrt{c}$; $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

§. 78. $(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c$; $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$.

§. 79. Aufgabe: **Eine ganze Zahl durch eine andere ganze Zahl zu dividiren, wenn beyde mit Potenzen der Zehn multiplicirt sind.**

Auflösung: 1. Der Dividendus sey ein Product des Einmal eins, und einer Potenz der zehn, der Divisor aber, (auch ein Product mit einer Potenz der Zehn) darin enthalten: so sucht man den Quotient nach §. 11 u. 15. und multiplicirt ihn mit einer Potenz der Zehn, deren Exponens die Differenz zwischen beyden Exponenten ist (§. 49.) oder, welches einerley ist: Man streicht im Divisor und Dividendus eine gleiche Zahl Nullen ab, und verfährt mit dem Divisor, als einer einfachen Zahl.

$$\frac{480000}{800} = \frac{48}{8} . 10^{4-2} = 6 . 10^2 = 600$$

oder $\frac{4800}{8} = 600$.

2. Der Dividendus sey kein Product des Einmal eins, falle aber zwischen solchen Producten: so zerlege man ihn in solche, und verfahre, wie vorher

$$\frac{34000}{8} = \frac{32000}{8} + \frac{1600}{8} + \frac{400}{8} = 4000 + 200 + 50.$$

Diese

8) 34000	4000
32000	200
2000	50
1600	4250
400	
400	
0	

Diese Zerlegung erfolgt von selbst, wenn man die nächst niedrigen Producte aus dem Einmal Eins nimmt, und sie vom Dividendus subtrahirt, wie aus beystehendem Exempel erhellet.

8) 34000	
32	4250
20	
16	
40	
40	
0	

Hier sind noch die einzelnen Theile des Quotienten zu addiren, welches auch vermieden werden kann, wenn man sie gleich an einander gehörig schreibt; wobey man noch den Vortheil hat, daß die Nullen in den einzelnen Produkten nicht immer dürfen geschrieben werden.

3. Der Divisor sey nicht ganz im Dividendus enthalten, übrigens sey alles wie vorher: so bleibt zuletzt ein Rest, der im Quotient noch einen Bruch giebt, dessen Zähler dieser Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. z. E. $\frac{364}{40} = 9\frac{4}{40}$ denn in dem Rest 4 ist 40 $\frac{4}{40}$ mal enthalten, indem $\frac{4}{40} . 40 = 4$ (§. 30)

4. Sind Divisor und Dividendus zusammengesetzte Zahlen: so ist die Aufsuchung des Quotienten mühsamer. Man kann aber besonders bey großen Zahlen sich die Arbeit sehr bequem machen, wenn man für den Divisor sich, so weit solches etwa nöthig seyn mögte, eine Productentafel, oder ein großes Einmal eins macht. Z. E. wenn 194235 durch 563 dividirt werden sollte. Hier sieht man sogleich, daß dem Werthe 194200 der Werth 168900 oder der 1942 der Werth 1689 in der Tafel am nächsten kommt, welches = 563 . 3. Also der erste Quotient ist 3. Eben so findet man die übrigen Zahlen des Quotienten.

563	1
1126	2
1689	3
2252	4
2815	5

194235	345
1689	
2533	
2252	
2815	
2815	
0	

§. 80. **Wenn der Dividendus kleiner ist, als der Divisor: so hat man einen ächten Bruch (§. 22.) dessen gemeinschaftlichen größten Theiler (§. 33.) man sucht.**

Auflö-

1 Hannöversche Quartier 49 $\frac{1}{6}$ par. Cub. Z.

Maaß in Berlin 57

Nößel in Braunschweig 177

Bremen 160

Maaß in Cassel 103

Englische Pinte 47,68

Engl. Bushel 1800

fr. Boisseau 644,66

691,5876
461638

$\sin \frac{1}{14}\pi = 0{,}187289\ 825306 \ldots 0745796$

$- \quad 23\ 0539 \qquad - 73$

$0{,}187266\ 77244$

236

$+ \quad 0{,}187266\ 775480$

$\sin \frac{2}{14}\pi = 0{,}37384316$

$\cos. \frac{1}{14}\pi = 1, \qquad 0{,}01753873 \qquad 9$

$- \ldots .5127 \qquad + \quad 10$

$0{,}99994873 \qquad 0{,}01753883$

01753883

$9824099 0 = 9922928$

$1{,}01748756 \qquad 0075291$

9847637

10037
99631363|953

90333
90333
60222

9996852
30111

9999863 1
130481

999993581
60222
96032
30111
90431
90333
464

9999996032

3968
15745024
62476255232

3968
3968
31744
23808
35712
11904
15745024
62980096
503840768
62476255232

9963136395
1107015155
221403031

9963136
2490784
622696
77837
554
2243
16
2

277.281

15

5726896

0,37184316	~~5726898~~	2907591	19117855
0,9655252	9847636	9390545	8690694

3010300
5655290

5534512
192386

5726898
92

2	0.3718432	5726897	2907591	0,9953255	9099539	0,0812744
6	0.9655252	9847636	9390545	8690694	3070279	202,7813
4	0,7261653	8610355	4441420	2780622	3292024	2,134039
			6739556	1,1666652	5461842	209,966

6739556 1,1666

203,83
7,83

0,1660122. 2201398

$p = \bar{7}$ 8450980

1638,64

$s = + 42$ 42,165 6249582

163,864
6,144

xx + 42x + 441 = 448 142681

1808,16

16306
6114

0,1660105 9604
1598

159598

7,830052 $\sqrt{11200}$ 9604
11200

11609 11397
71 | 445
1658
16.

Auflösung: Man dividire mit dem Zähler in den Nenner, und mit dem Rest in den Zähler u. s. f.; findet man einen Rest, der im letzten Divisor enthalten ist: so ist dies der größte gemeinschaftliche Theiler. Ist der letzte Rest $= 1$: so giebt es keinen gemeinschaftlichen Theiler. Also 1) der gegebene Bruch sey $\frac{345}{437}$. Man setze den Nenner $= am + n$ (§ 23.) also $345 = m$. Dividirt man damit in 437: so findet man den Rest $= 92 = n$. 2) Man versuche, wie vielmal dieser Werth in m enthalten sey? durch die Division findet man $m = 3 . 92 + 69 = pn + q$. 3) Man suche ferner $n = 69 . 1 + 23 = qt + r$; so ergiebt sich $69 = 23 . 3$, oder $3r = q$. folgl. $n = (3 + 1) r = 92$, und $m = (p . (3 + 1) + 3) r$. Also $r = 23$ ist der gemeinschaftliche Theiler und $\frac{345 : 23}{437 : 23} = \frac{15}{19}$.

§. 81. Zusatz: Sind noch mehr Zahlen vorhanden, davon man das gemeinschaftliche Maaß sucht: so suche man dasselbe nach §. 80 erst für zwey Zahlen; hernach für den gefundenen gemeinschaftlichen Theiler, und die dritte Zahl, u. s. w.

§. 82. Grund-Satz: Ein Bruch ist desto kleiner, je öfter der Zähler im Nenner enthalten ist; also je größer dieser im Verhältniß gegen jenem ist. Er verschwindet, wenn der Nenner im Verhältniß gegen den Zähler unendlich groß ist. Das Zeichen des Unendlichen ist ∞, also $\frac{1}{\infty}$ ist eine verschwindende Größe, dafür man 0 setzen kann.

§. 83. Aufgabe: **Einen Bruch in einen Decimal-Bruch zu verwandeln.**

Auflösung: Dies geschieht nach §. 35. wenn man statt d eine Potenz der Zehn setzt, oder überhaupt an deren Zähler so viel Nullen hängt als man gebraucht.

Exempel: $\frac{3 . 10^4}{16} = 1875$; also $\frac{3}{16} = 0{,}1875$.

Aber $\frac{2}{3} = 0{,}666666 \ldots$ oder die decadische Eintheilung der Einheit ist für die Eintheilung der Einheit in 3 Theile irrational. Nur solche Brüche, deren Nenner Factoren einer

einer Potenz der Zehn sind, lassen sich genau durch Decimalbrüche ausdrucken; andere nur durch Näherung, die man aber so weit treiben kann, daß der Fehler verschwindet (§. 81.) So fehlt hier an 0,666666 nur noch $\frac{4}{1000000}$ um $\frac{2}{3}$ genau zu haben.

§. 84. Aufgabe: **Wenn der Divisor oder Dividendus, oder beyde zugleich Decimal-Brüche enthalten, ihren Quotienten zu finden.**

Auflösung: 1) Man mache die Zahl der Decimal-Brüche durch Anhängung der Nullen im Divisor und Dividendus gleich, und sehe alsdenn nach §. 25 alles als ganze Zahlen an; verfahre also nach §. 79. 4.

2) Um nun davon den Quotient so genau zu finden, als man nur will, multiplicire man den Dividendus mit einer dazu erforderlichen Potenz der Zehn, oder welches einerley ist, man hänge so viel Nullen an, als nöthig ist; streiche aber im Quotienten wieder eben so viele Ziefern ab, von der Rechten zur Linken gerechnet, als man angehängt hat. Denn die im Dividendus angehängten Nullen bestimmen die Potenz der 10 = d, (§. 35), deren Exponent im Quotienten negativ zu nehmen ist.

$$
\begin{array}{rl}
563)\ 1{,}9000 & (0{,}003374\ldots \\
1689 & \\
\hline
2110 & \\
1689 & \\
\hline
4210 & \\
3941 & \\
\hline
2690 & \\
2252 & \\
\hline
438 &
\end{array}
$$

$$\frac{194{,}235}{563} = \frac{1\overset{94}{\cancel{49}}235}{563000} = 0{,}345;$$

$$\frac{194235}{5{,}63} = \frac{19423500}{563} = 34500;$$

$$\frac{1942{,}35}{0{,}563} = \frac{1942350}{563} = 3450;$$

$$\frac{1{,}9}{563} = \frac{19}{5630} = 0{,}003374\ldots$$

§. 85. Die Division mit benannten Zahlen, wenn es Gattungen von einerley Art sind, ist möglich (§. 8. 1.) Man verwandle alle Theile derselben in die kleinsten Einheiten von einerley Art und verfahre nach §. 79 und 84.

§. 86. Die Division mit Buchstaben ist noch leichter, weil der Dividendus meistens schon in seine Factoren zerlegt ist. §. 3. §. ~~14~~. 15

Rechnung bei 60°

0,874019 185
8500 678
− 29 5286
− 154
+

874019 198
8538 206
865488 994

1176122227
~~882519 863~~
865518 507
295 132
865223 375

168 542

1,048629 815
− 33 7847
1,048289 968
+ 1 693
1,048291 661

1048594 030
169
199

0.874019 185
8500 678
865518 507
29 513
0,865488 994
1,048594 199

$\frac{16}{64}$ $\frac{1}{12}$

2954261
11817044
13130048
1458894
486298

1,9372616 0208075
0757987 0757987
8616629 9448088

0,7272151666 0,880661
26

$\frac{1}{18}\pi$ - 0,434

5849887

9.6377843
0.4971499
0,1349342
1,2552725
8,8796617

0,3845818

273205081

0,4364888
60206
8344288
9448096

840896

0.3010300
0752575
9247425

$A = \frac{1}{2}p^4 + ppqq - \frac{1}{2}q^4$

$B = -\frac{1}{2}p^4 + ppqq + \frac{1}{2}q^4$

$A + B = a = 2ppqq$

$A - B = b = p^4 - q^4$

$(A-B)^2 + (A+B)^2 = (p^4+q^4)^2$

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{\left((A+B)^2 + (A-B)^2\right)} + A - B}{2}}$$

$1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)\frac{K'}{K} = M$

$1 \quad | -1$

$\sqrt[4]{\frac{2 \pm 2}{2}}\ \ell$

$K + \left(x - \frac{1}{x}\right) K'$

$K - (1-xx)K + \frac{(1-xx)^2}{x} K'$

$1 - \frac{3}{4}$

$+ \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{4}$

$xxK + x(1-xx)^2 K'$

$90^\circ \quad 0 \quad \sqrt[4]{2}$

$K(1-xx) + xK'(1-xx)$

$\frac{1}{2} - xx + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{16} \quad \frac{1}{2} \quad xK$

$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2\sqrt{2}} \pm \sqrt[4]{2}}{2}} \qquad \sqrt{} \qquad 1 - xx \ \partial B$

$\sqrt{(\sqrt{2}+1)}$

$$\boxed{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{8} \pm \sqrt[4]{2}}{2}}}$$

$\sqrt{2}+1 \qquad a + b\sqrt{2}$

$1+2 \qquad aa + 2bb = 1$

$2ab = 1$

$aa + \frac{1}{2aa} = 1$

$a^4 - aa + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}$

$a^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-}$

$\frac{64a^3b^2}{4a^2b} = 16ab$; $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b} = a+b$ (§. 73.);

$\frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$ (§. 74.)

$$\begin{array}{l} a+b)\ a^2 - b^2\ (a-b; \\ \quad\ \ a^2 + ab \\ \hline \quad - ab - b^2 \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline \qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3a-2b)\ 18a^2 - 8b^2\ (6a+4b \\ \qquad\quad\ 18a^2 - 12ab \\ \hline \qquad\quad + 12ab - 8b^2 \\ \qquad\quad + 12ab - 8b^2 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

§. 87. Aufgabe: **Den Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufzulösen.**

Auflösung: Man dividirt mit dem ersten Theile des Divisors, welcher hier 1 ist. Also kommen im Quotienten immer die Zahlen des Restes (§. 17. 1.) und zwar wegen der Multiplication mit a, um eine Potenz höher. Der Rest ist daher immer um einen Grad höher, als der letzte Quotient. Also wenn dieser $= a^2$, so ist der Rest a^3. Allgemein wenn der letzte Quotient $= a^{n-1}$; so ist der Rest a^n also $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 \ldots\ldots + a^{n-1} + \frac{a^n}{1-a}$

$$\begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+a+a^2 \\ \qquad\ 1-a \\ \hline \qquad\ +a \\ \qquad\ +a-a^2\ (\text{§. 38.}) \\ \hline \qquad\qquad +a^2 \\ \qquad\qquad +a^2-a^3 \\ \hline \qquad\qquad\qquad +a^3 \end{array}$$

§. 88. Subtrahirt man hier von beyden Seiten den Rest: so bleibt $\frac{1}{1-a} - \frac{a^n}{1-a} = 1 + a + a^2 \ldots\ldots a^{n-1}$ eine **unendliche Reihe** von Potenzen, wenn n keinen bestimmten **Werth** bekommt.

§. 89. $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \frac{a^5}{1+a}$, wenn man hier abbricht; lauter abwechselnde Zeichen im Quotienten, also beschwerlich zu summiren. Man setze daher $1 + a = x - 1$, folglich $x = a + 2$, und $\frac{1}{a+1} = \frac{1}{x-1}$ $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \ldots = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a+2)^3}$ $+ \frac{1}{(a+2)^4} \ldots$ wodurch jene abwechselnde Reihe ganzer

Zahlen

Zahlen in eine Reihe von positiven Brüchen verwandelt wird.

Exempel: $\frac{1}{3}=\frac{1}{a+1}$ giebt $a=2$, und $x=4$; also $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\ldots.$ Eben so kann man $\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x-1}$, also $x=y+2$ setzen, und man erhält eben diese Reihe.

§. 90. Weil $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (§. 51.): so ist $\frac{a^2\,.\,b^{-3}}{c\,.\,a^{-1}}$ $\frac{a^2\,.\,a}{cb^3}=\frac{a^3}{cb^3}$; und weil $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$: so ist $a^2\,.\,a^{\frac{1}{3}}=a^{2+\frac{1}{3}}$ (§. 48.) $=a^{\frac{7}{3}}=\sqrt[3]{a^7}$. Es sey $a=8$, also $a^2=64$; und $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{8}=2$. Also $a^2\,.\,a^{\frac{1}{3}}=64\,.\,2=128$ und $128=\sqrt[3]{8^7}=\sqrt[3]{2097152}$. Die Probe ist, wenn 128 dreymal mit sich selbst multiplicirt 2097152 giebt.

$\sqrt{48ab^2}+b\sqrt{75a}=4b\sqrt{3a}+5b\sqrt{3a}=9b\sqrt{3a}$.

§. 91. $\sqrt[3]{8}=2$ aber auch $=-1+\sqrt{-3}$ oder auch $-1-\sqrt{-3}$. Denn wenn $a^3=8$ so ist $a^3-8=0$, und weil auch $a-2=0$: so ist $\frac{a^3-8}{a-2}=0=a^2+2a+4$, also $a^2+2a+1=-3=(a+1)^2$ und $\pm\sqrt{(a+1)^2}=\pm\sqrt{-3}$, oder $a+1=\pm\sqrt{-3}$, welches die vorhin genannten beyden Werthe in unmöglichen Wurzeln giebt. Die Probe ist, wenn jede derselben in die 3te Potenz erhoben 8 giebt.

$$
\begin{array}{l}
a-2)\;a^3-8\;(a^2+2a+4\\
\quad\;\; \underline{a^3-2a^2}\\
\qquad +2a^2-8\\
\qquad\;\; \underline{2a^2-4a}\\
\qquad\qquad +4a-8\\
\qquad\qquad \underline{+4a-8}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

§. 92. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ die allgemeine Formel für ein zweytheiliges Quadrat.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, Formel für einen zweytheiligen Cubus.

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ $=(a+b)^3\,.\,(a+b)$

$$(1) = p - 1$$

$$(2) = \tfrac{1}{2}(pp - p)$$

$$(1.1) = \tfrac{1}{2}(pp - p)$$

$$p^{18} - p^{9}$$
$$p^{18} - 1$$
$$-p^{9} + 1$$
$$9 - 1$$
$$-3 + 1$$

$$18 - 9 + 3$$
$$\cancel{-6 + 3 + 2 - 1}$$
$$\cancel{-3 + 1}$$
$$-2 + 1$$
$$\cancel{-1}$$
$$18 - 9 - 6 + 3$$

$$(3) = \tfrac{1}{3}(p^3 - p)$$

$$(1)(2) = \tfrac{1}{2}(p^3 - 2pp + p)$$

$$(1)(1)(1) = \tfrac{1}{6}(p^3 - p)$$

$$a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} .. = A$$

$$A - \frac{A}{a} - \frac{A}{b} - \frac{A}{c} \cdots$$
$$+ \frac{A}{ab} + \frac{A}{ac} + \frac{A}{bc} \cdots$$
$$- \frac{A}{abc} \cdots$$

$$(4) = \tfrac{1}{4}(p^4 - pp)$$

$$(1,3) = \tfrac{1}{3}(p^4 - p^3 - pp + p)$$

$$(2,2) = \tfrac{1}{8}(p^4 - 2p^3 + 3pp - 2p) = \tfrac{1}{8}(2)^2 + \tfrac{1}{2}(2)$$

$$(1,1,2) = \tfrac{1}{4}(p^4 - 2p^3 + pp)$$

$$(1,1,1,1) = \tfrac{1}{24}(p^4 + 2p^3 - pp - 2p)$$

$$2 - 1 + 0$$
$$4 - 3 + 2$$
$$-3 + 2$$

$$1 + 6 + 11 + 6$$
$$8 \quad 6$$
$$3$$

$$(4) + \tfrac{1}{2}(2) + \tfrac{1}{4}(1)$$

$$(1)(3) + \tfrac{1}{3}(1)(1)$$

$$\tfrac{1}{2}(2)(2) + \tfrac{1}{2}(2)(1) + \tfrac{1}{4}(1)(1)$$

17

$$\tfrac{1}{4}(4) + \tfrac{1}{3}(1)(3) + \tfrac{1}{8}(2)(2) + \tfrac{1}{4}(1)(1)(2) + \tfrac{1}{24}(1)^4$$
$$+ \tfrac{1}{4}(2) \qquad \cancel{+ \tfrac{1}{2}(1)(1)} \qquad + \tfrac{1}{6}(1)^3$$
$$\cancel{+ \tfrac{1}{2}(1)(2)} \qquad + \tfrac{11}{24}(1)^2$$
$$\cancel{+ \tfrac{1}{4}(2)} \qquad + \tfrac{1}{4}(1)$$
$$+ \tfrac{1}{4}(1)(2)$$

$\int \frac{x^2dx}{(1-x^3)^{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}}$ ist Algebraisch

$\int \frac{xdx}{(1-x^3)^{2:3}}$ fiat $1-x^3+x^3y^3=0$

$$= \frac{dx}{xyy} = \frac{-dy}{1-y^3}$$ also v. kr. abhaengig

$\int \frac{xdx}{(1-x^3)^{1:3}}$ es sei $1-x^3+x^3y^3=0$

$$= \frac{dx}{y} = \frac{ydy}{(1-y^3)^{4:3}}$$ woraus wenig doch

eine particuläre Integration folgt

es sei $1=x^3+y^3$

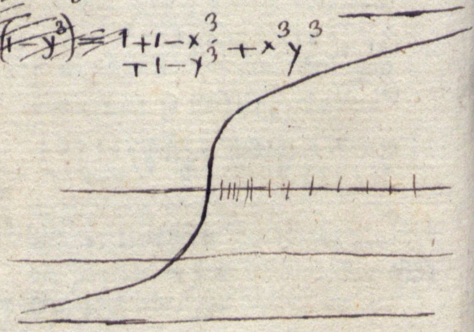
$$= \frac{xdx}{y} = \frac{-ydy}{(1-y^3)^{1:3}}$$ welches gleichf.

eine part. Int. gibt

es sei $\cancel{(1-x^3)(1-y^3)} = 1+1-x^3+x^3y^3$
$+1-y^3$

$\int \frac{xdx}{(1-x^3)^{2:3}}$ sit $x=\frac{1}{y}$

$$= \frac{-dy}{(1-y^3)^{2:3}}$$



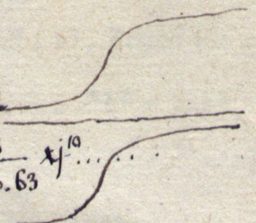
$x=\frac{1}{y}$

$\varphi x + \varphi \frac{1}{x} = C. =$

$\varphi x = \cancel{C}\ x + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4 + \frac{2.5}{3.6}\,\frac{1}{7}x^7 \ldots$

$\varphi \frac{1}{x} = C - x - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \ \&c.$

~~Insigne tam Paradoxon~~



$\frac{dx}{x^2}$

$x = y - \frac{1}{6}y^4 + \frac{2}{63}y^7 - \frac{13}{36.63}y^{10} \ldots$

$\sqrt[3]{(1-x^3)} = 1 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{18}y^6 -$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b^1 + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5 = (a+b)^4 . (a+b)$.

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 5ab^5 + b^6 = (a+b)^5 . (a+b)$.

Die Ziffern, womit hier die Potenzen von a und b multiplicirt sind, heißen Coefficienten. Die ganzen Formeln ergeben sich durch wiederholte Multiplication der $(a+b)$ mit sich selbst.

§. 93. Dreytheilige Wurzeln sind $a+b+c$. Das Quadrat davon ist $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$. Der Cubus ist $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3$. Hat die Wurzel 4 Theile: so ist $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2$ und $(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$.

§. 94. Man bemerkt leicht, daß solche vieltheilige Potenzen auf zweytheilige gebracht werden können. Man setze nämlich 1) bey einem 3theiligen Quadrat $a+b = \alpha$: so ist

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \alpha^2,$$

ferner $2(a+b)c + c^2 = 2\alpha c + c^2$,

folglich $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 = \alpha^2 + 2\alpha c + c^2$.

2) Hat die Wurzel 4 Theile: so setze man weiter $\alpha + c = A$, so ist $(\alpha+c)^2 = A^2 = \alpha^2 + 2\alpha c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$

und $2(a+b+c)d + d^2 = 2(\alpha+c)d + d^2 = 2Ad + d^2$

also das ganze viertheilige Quadrat $= A^2 + 2Ad + d^2$

§. 95. Man kann dies Verfahren bey noch mehrern Theilen der Wurzel anwenden, und wird immer finden, daß, wenn man alle gefundene Theile der Wurzel a nennet alles vom Quadrat subtrahirte zusammen $= a^2$, folglich der Rest $= 2ab + b^2 = (2a+b)b$ sey. Dividirt man also mit 2 a, als der doppelten Summe aller gefundenen Theile der Wurzel in den Rest hinein: so findet man ziemlich genau den folgenden Theil b, ohngeachtet der Divisor wegen des fehlenden b etwas zu klein ist; denn vollständig ist er $2a+b$. Sollte man aber den Quotient für b auch zu groß gefunden haben: so findet man dieses bald, wenn die Formel $(2a+b)b$ in Zahlen verwandelt wird. Zu klein darf b auch nicht genommen werden, welches aus folgendem beurtheilt werden muß. Es sey $b = 1$, so ist $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, also $2a+1$ enthält noch die Wurzel 1. Bleibt nun nach Abzug dieses Werths noch ein Rest übrig, so muß er kleiner seyn, als die um Eins vermehrte doppelte Summe der gefundenen Theile der Wurzel, die zusammen unter a begriffen sind.

Wurzel = Tafel für Quadrat = und Cubic = Zahlen.

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	~~165~~ 125	~~122~~ 216	343	512	729

§. 96. Aus beygesetzter Tafel der Quadrat= und Cubic = Zahlen, die nach §. 40. vermittelst des Einmal Eins leicht zu machen ist, erhält man die Quadrate der Zehner durch Anhängung zweyer Nullen, der Hunderte, durch Anhängung von vier Nullen, der Tausende, durch Anhängung von sechs Nullen u. s. f. So ist $20^2 = 2^2 . 10^2$. (§.44.) $= 400$, $200^2 = 2^2 . 100^2 = 40000$ u. s. f. Also steigen die Quadrate der Ziffern jeder nächstfolgenden Klasse immer um 2 Plätze. Man kann leicht darthun, daß, wenn auch die Summe $(2a+b)b$ aus den höchsten Ziffern jeder Klasse besteht, diese zu jener gezählt, doch nicht mehr Plätze im Quadrat giebt. z. B. $99^2 = 9801$; $999^2 = 998001$ u. s. w. hingegen $10^2 = 100$, welches doch um eine Zahlstelle 9^2 übertrifft, $100^2 = 10000$, (5 Zahlstellen, da 99^2 nur 4 Zahlstellen giebt,) $1000^2 = 1000000$, (7 Zahlstellen, da 999^2 nur 6 Zahlstellen giebt.)

Wenn man daher von der Rechten zur Linken immer zwey und zwey Zahlen abstreicht; so kann man so gleich sehen, aus wie viel Theilen die Wurzel besteht. Man nennet daher diese Abtheilung des Quadrats die Classification desselben.

§. 95.

Sit $\quad 1 = x^3 + y^3.$

$$\frac{dx}{yy} = \frac{dy}{(1-y^3)^{2:3}}$$

$$1 - x^3 + x^3y^3$$

$$\frac{dx}{xxyy} = \frac{-dy}{(1-y^3)^{2:3}}$$

x	y	
0	0	0
0,1	0,1000166 674160	0,099983 331270
0,2	0,2	
0,3	0,3	
0,4		
0,5		
0,6		
0,7		
0,8		
0.9		
1.0	1.766	0.8833
∞	3.53	1.78

3 5.

0.79370058.
66141715
15748027
4899386
1727348
654953
260430
107103
45162

0.883284704

12

für $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

x	y	
0		
0,1		
0,2		
0.3		
0.4		
0.5		
0.6		
0.7		
0.8		
0.9		
1.0	0.684	0.60

0.314980262	0.020998684
4374726	1237296
405072	144555
54610	21482

$A \frac{23}{26} \frac{37}{43}$

$M \cdot \frac{2x}{1+x}^{\frac{1}{2}} = 2x M x$

0.31982

0.0224

0.342

0.30

0.68

0.60

$Mx = \frac{A}{xx}$

$\frac{A(1+xx)}{4x} = 2A$

0.684 . 1,7 . ~~3#3~~ $\frac{\pi}{3\sqrt{\frac{3}{4}}}$

§. 97. Aufgabe: **Eine Quadrat-Wurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen.**

Auflösung: 1) Man classificire die gegebene Zahl, suche für die Zahlen der höchsten Klasse das ihnen am nächsten kommende Quadrat aus der Tafel §. 96, und setze dessen Wurzel auf den Platz der Quotienten.

2) Nachdem man das Quadrat dieser Wurzel subtrahirt hat, dividire man mit 2a in den Rest, um b zu finden, wähle aber diesen Werth so, daß $(2a+b)b$ von den übrig gebliebenen Zahlen abgezogen, entweder nichts, oder doch weniger übrig läßt, als $2a+1$ (§. 95.). Bleibt nichts übrig, so ist die Arbeit geendigt, gesetzt auch, daß noch Nullen im Quadrat ständen, denn für jedes Paar Nullen hängt man eine Null an der Wurzel $a+b$. Bleibt was übrig: so nehme man

3) zu diesem Rest noch 2 Nullen, oder wenn Zahlen im Quadrat vorhanden sind, die Zahlen der nächstfolgenden niedern Klasse, setze die Wurzel $a+b=\alpha$, und dividire mit 2α in den Rest, um die neue Wurzel $=c$ zu finden, worauf $(2\alpha+c)c$ in Zahlen ausgedruckt, von dem Rest subtrahirt wird.

4) Dasselbe Verfahren wiederhole man so oft, als es nöthig ist.

5) Sind im gegebenen Quadrate Decimal-Brüche und zwar paarweise (wenigstens müssen sie, wenn ihre Zahl ungerade wäre, durch Anhängung einer Null zu einer geraden Zahl gemacht werden) oder verlangt man die Wurzel noch genauer in Decimal-Brüchen ausgedruckt, so sondere man nur im Quotienten die ganzen Zahlen der Wurzel von diesen Decimal-Brüchen gehörig ab, und verfahre übrigens wie bey ganzen Zahlen.

Exempel: $\sqrt{590,49} = 24,3$;

	5|90.|49	$20 = a$
$a^2 =$	4|00 |	$4 = b$
$(2a = 40)$	1|90.|	$24 = \alpha$
$(2a+b)b =$	1|76 |	$0,3 = c$
$(2\alpha = 48)$	1449	$24,3$
$(2\alpha+c)c =$	1449	
	0	

$$\sqrt{3582} = 59,84$$

$35 \mid 82$	
$a^2 = 25 \mid 00$	$50 = a$
$(2a = 100) \quad 10 \mid 82$	$9 = b$
$(2a+b)b = 9 \mid 81$	$59 = a+b = \alpha$
$(2\alpha = 118) \quad 101 \mid 00$	$0,8 = c$
$(2\alpha+c)c = 95 \mid 04$	$59,8 = A$
$(2A = 1196) \quad 596 \mid 00$	$0,04 = d$
$(2A+d)d = 478 \mid 56$	
11744	

Bey dem zweyten Exempel waren vier Nullen anzuhängen, um für die Wurzel noch die beyden Decimalbrüche 0,84 zu bekommen; der Rest 11744 ist kleiner als 11969 $= 2a + 1$, und daher d nicht zu klein angenommen. Multiplicirt man diese Wurzel 59,84 mit sich selbst, und addirt den Rest dazu: so kommt das Quadrat 3582 wieder heraus. Wollte man nun noch weiter gehen: so müßten für die folgenden Theile der Wurzel immer 2 und 2 Nullen an dem Rest angehängt werden. Uebrigens hat man nicht nöthig, die Potenzen der Zehn, oder die Nullen an a anzuhängen; wie schon aus der gemeinen Division bekannt ist. Man kann daher mit den einfachen Ziefern, welche a bedeuten, wenn sie doppelt genommen sind, in den Rest hinein dividiren. Nur muß man behalten, daß für die zu suchende b der niedrigste Platz gehört, und daß folglich die Division mit 2α nur in den um die niedrigste Zahl-Stelle verminderten Rest geschehen müsse.

§. 98. $\sqrt{2} = 1,41421356 \qquad \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2,82842712$

$\sqrt{3} = 1,7320508 \qquad \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3,4641016$

$\sqrt{5} = 2,2360679 \qquad \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 6,7082037$

$\sqrt{7} = 2,6457513 \qquad \sqrt{112} = 4\sqrt{7} = 10,5830052$

§. 99. Wenn man aus Brüchen die Wurzel nicht nach §. 43. aus Zähler und Nenner ausziehen will: so verwandele man sie in Decimal-Brüche, und verfahre nach §. 97.

Einige berechnete Quadratwurzeln

2	1.	41421356237309504 88017
3		7320508075688772935274
5	2.	2360679774997896 96
6		449489742783178098197284074705 9
7		6457513110645905905016157536 4.2
10	3.	16227766016837933199889354 4.4
11		31624790355399849114932736.4
13		605551275463 9
14		74165738677392
15		87298334620741 68
17	4.	
19		
21		58257569495584000658805_
22		
23		
26	5.	
29		
30		
31		
33		
34		
35		
37	6.	
38		
		4142●3562373 +
39		
41		40312423743284868488217.67
42		
43		
46		
47		
51	7.	
53		
55	7.	
57		
58		
59		
61		
62		
65.	8.	062257748298549652367_
66		
67		
69		
70		
71		
73		
74		
77		
78		
79		
82	9.	
83		
85		
86		
87		
89		
91		
93		
94		
95		
97.		

1000	31,622776601683793319958935444.4
1	31,638584039112749143106291 58.5
2	31,654383582688827965367857 02.5
3	31,670175244226230836323894192 —
4	31,685959035509718969513569210.
5	31,701734968294716345884144644 01
	$\boxed{94}$
6	31,71750305430741185790547599 68
7	31,73326330524486099689109870 2781
8	31.749015732775087086019389043 70

Die erste Differenz

0.0158074374289558231173561 4.1

Die zweite Differenz.

0.000007893852877000855790 70.1.

Die dritte Differenz.

0.000000011814201049550262 42.8

Die vierte Differenz.

0.000000000029439836011073 4.1

Die fünfte Differenz.

0.000000000000102603419078 2.7

Die sechste Differenz.

0.00000000000000045930435283

Die siebente Differenz.

0. 000000000000000000251048545

$\frac{1}{2} + \alpha xx$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$

$= \frac{1}{2} + 4\alpha x$

$$Mv = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-vv}}{1+\sqrt{1-vv}}\,M\,\frac{1-\sqrt{(1-vv)}}{1+\sqrt{(1-vv)}}$$

$$Mx = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^4 + \frac{41}{2048}x^6 \ldots$$

$$M\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}xMx$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad * \quad \frac{1}{32} \quad * \quad \frac{1}{64}}{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 1}$$

$+\frac{1}{2} - 2 + 5$

0,531
78
26
~~16~~

0,5432

$$\int \frac{\frac{bb}{a} + \frac{(aa-bb)ss}{a}}{\sqrt{(aa - \frac{(aa-bb)ss}{aa})}}$$

5 7
6 8

Periphería Ellipsis cujus axes a, b est

		15	175
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	128	2048
		$\frac{9}{64}$	$\frac{25}{256}$
1	$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{16}$		$\frac{3}{64}$	$\frac{75}{2048}$
$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{1024}$
$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{64}$	$\frac{57}{1024}$
		$\frac{1}{32}$	$\frac{59}{2048}$
		$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{128}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{41}{2048} +$

$$\pi\frac{bb}{a}\left[k\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right]\left(1 + \frac{aa-bb}{bb}M\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right)$$

$$\frac{1 + N\sqrt{\frac{aa-bb}{bb}}}{= \pi\frac{bb}{a}\ \text{Med. inter } 1 \text{ et } \frac{bb}{aa}}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{16}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{5}{16}}$$

$$Nv = vvMv = \frac{1}{2}vv + v\,N\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-vv}}}{1+\sqrt{1-vv}}$$

§. 100. Wenn in der Formel §. 92. für $(a+b)^3$, $b=1$; so ist $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; ziehet man also von der zusammengesetzten Cubic-Zahl a^3 ab: so ist der Rest $= 3a^2 + 3a + 1$ für $b = 1$; und man findet b, wenn man mit $3(a+1)a+1$, oder auch nur mit $3(a+1)a$ in den Rest hineindividirt. Ist b größer als 1: so muß man alle Theile $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ erst summiren, ehe man die Subtraction vom Rest vornehmen kann. Findet man die Summe zu groß: so wird b kleiner angenommen. Aber es muß doch allemal so groß angenommen werden, daß nach geschehener Subtraction weniger übrig bleibt, als die Summe von $3a^2 + 3a + 1 = 3(a+1)a+1$ beträgt.

§. 101. Ist a eine Ziffer aus der Klasse der Zehner: so ist der Cubus davon eine Zahl in der Cubictafel §. 96. mit 10^3 multiplicirt. Also wenn an jeder dieser Cubiczahlen 3 Nullen angehängt werden: so hat man die Cubos der Zehner. Für die Ziffern aus der Klasse der Hunderte müssen 6 Nullen, und für die aus der Klasse der Tausende 9 Nullen angehängt werden. Also steigen die Cubi der nächstfolgenden Zahlen immer um 3 und 3 Zahlstellen. Man kann hier wieder zeigen, daß, wenn auch für a und b die höchsten Ziffern aus jeder Klasse genommen werden, für die Einer nicht mehr als 3 Zahlstellen, für die Zehner und Einer zusammen nicht mehr als 6 Zahlstellen u. s. f. kommen. Man classificirt also eine Cubiczahl, indem man von der Rechten zur Linken immer 3 und 3 Zahlstellen abstreicht.

§. 102. Aufgabe. **Die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl zu finden.**

Auflösung. 1) Man classificire die gegebene Zahl nach §. 101.

2) Man suche aus der Cubictafel §. 96. den Cubus auf, der den Ziffern in der höchsten Classe am nächsten kommt, ziehe ihn ab, und setze zu dem Rest die Ziffern der folgenden Klasse.

 3) In

3) In diesen Rest dividire man mit $3(a+1)a$ hinein, um b zu finden (§. 100.) und suche die Summe von $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, welche vom Rest abgezogen wird.

4) Sind mehrere Klassen vorhanden, oder sucht man die Wurzel, wenn ein Rest übrig geblieben, noch genauer in Decimalbrüchen: so setzt man zu dem Rest entweder die 3 Ziffern der folgenden Klasse, oder in Ermangelung derselben 3 Nullen, nennt die gefundenen Theile der Wurzel a, und verfährt übrigens wie vorher.

$$\sqrt[3]{48627{,}125} = 36{,}5$$

$$\begin{array}{r r|r|r|l}
 & 48 & 627 & 125 & 30 = a \\
a^3 = & 27 & 000 & & 6 = b \\
\cline{2-4}
(3(a+1)a = 2790) & 21 & 627 & & 36 = \alpha = 36{,}0 \\
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 19 & 656 & & 0{,}5 = c \\
\cline{2-4}
3(\alpha+1)\alpha = 3996{,}00 & \multicolumn{3}{r}{1971125} & \\
3\alpha^2c + 3\alpha c^2 + c^3 = & \multicolumn{3}{r}{1971125} & \\
\cline{2-4}
 & \multicolumn{3}{r}{0} &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{nämlich } 3\alpha^2 = 3 \cdot 36^2 &= 3888 \\
c &= 0{,}5 \\
\hline
3\alpha^2 c &= 1944{,}00 \\
3\alpha c^2 &= 27{,}00 \\
c^3 &= 0{,}125 \\
\hline
& 1971{,}175
\end{aligned}$$

§. 103. Auf die §. 102. gezeigte Art findet man auch

$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599206$ $\quad$ $\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759$

$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422496$ $\quad$ $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} = 2{,}519841$

$\sqrt[3]{4} = 1{,}5874011$ $\quad$ $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3} = 4{,}32674841$

§. 104. Die Coefficienten (§. 92.) zeigen die Zahl der Versetzung der Factoren a und b an. So ist bey a^2 und b^2 der Coefficient $= 1$, weil da nur eine Art der Verbindung möglich ist, das gilt von allen Potenzen der a oder der b, die deshalb 1 zum Coefficient haben. Aber bey ab steht der Coefficient 2, weil ab und ba eine verschiedene Verbindungs-Art ist. Hätte man noch einen Factor c: so bekäme man 6 Versetzungen, drey bey ab, nämlich cab, acb, und

$$\int \frac{dx}{x}\, l\frac{1}{1-x} = lx \,.\, l\frac{1}{1-x}$$

$$- \int \frac{dx}{1-x}\, lx$$

$$\varphi x + \varphi(1-x) = lx \,.\, l(1-x) + \frac{\pi\pi}{6}$$

$$\int \frac{dx}{x}\, l(1-x) = \int \frac{dy}{y}\, l y - \int \frac{dy}{y}\, l(1-y)$$

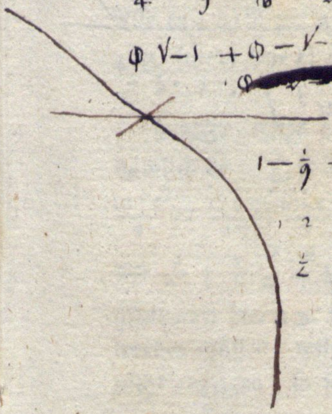
$$\varphi x + \varphi \frac{1}{x} = \frac{(lx)^2}{2} + \frac{\pi\pi}{3}$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \cdots = \frac{\pi\pi}{12}$$

$$\varphi\sqrt{-1} + \varphi - \sqrt{-1} = \frac{5\pi\pi}{24}$$

φ [redacted] $\sqrt{-1}$. −

12



$$1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} \cdots =$$

1 2 3 4 5 6 7 8

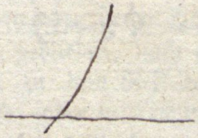
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ − $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{36}$

20

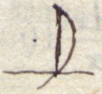
$$\left(a\,\mathrm{I} + aa\,\mathrm{II} + a^3\,\mathrm{III} + a^4\,\mathrm{IV} + a^5\,\mathrm{V}\right)^5$$

$$\begin{aligned} a^5 + a^{10} \dots &= \varepsilon \\ a^4 &= \delta \\ a^3 &= \gamma \\ a^2 &= \beta \\ \alpha &= \alpha \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$$



$$\varepsilon + 5\,\mathrm{I}\Big|_2 \begin{matrix} (a + a^4) \\ (aa + a^4) \\ a^3 + a^3 \end{matrix}$$



$$\frac{x\left(1-\frac{x^6}{729u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729\cdot 2^6u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729\,3^6x^6}\cdots\right)}{\left(1-\frac{x^3}{2^3u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{5^3u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{8^3u^3}\right)\cdots\cdots \quad \left(1+\frac{x^3}{u^3}\right)\left(1+\frac{x^3}{4^3u^3}\right)\cdots\cdots}$$

$$1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{10^3} \cdots = 1{,}01$$

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{11^3} \cdots = \frac{0{,}13}{0{,}8}$$

$$\frac{1{,}766^3}{6} = 0{,}9$$

$$\sqrt[3]{x(1-x^3)} = \frac{\left(1-\frac{x^3}{u^3}\right)\left(1-\frac{1}{4^3}\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots \quad \left(1+\frac{1}{2^3}\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^3}{2^3u^3}\right)\cdots \quad \left(1+\frac{x^3}{u^3}\cdots\right)}$$

und abc, und eben so viel bey ba, cba, bca, bac. Also 2 Factoren geben 2 . 1 Versetzungen, 3 Factoren 3 . 2 . 1 = 6. Vier Factoren aus demselben Grunde 4 . 3 . 2 . 1 = 24 Versetzungen; nämlich, d kann bey jeden der vorhin angeführten 6 Verbindungs-Arten noch 4 verschiedene Stellen bekommen. Sind aber darunter Potenzen von einerley Wurzel: so bekommt man so viel weniger, als das Product aller Zahlen, von 1 bis auf die Zahl des Exponenten beträgt. Z. B. der Coefficient von $a^5 b$ ist $\frac{6}{1} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.5.4.3.2.1}$, von $a^4 b^2 = \frac{6.5}{1.2} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.4.3.2.1}$ nämlich wegen b zwey, und wegen a 24 weniger; von $a^3 b^3 = \frac{6.5.4}{1.2.3} = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.3.2.1}$.

Allgemein also für $a^{m-1} b$ ist der Coefficient $= \frac{m}{1}$; für $a^{m-2} b^2, = \frac{m.(m-1)}{1.2}$, für $a^{m-3} b^3, = \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3}$ u. s. f.

Also $(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3$ u. s. f.

§. 105. Dies gilt auch, wenn m ein Bruch ist. Es sey nämlich $m = \frac{1}{n}$, so ist $\frac{m-1}{2} = \frac{\frac{1}{n}-1}{2} = \frac{1-n}{2n}$; $\frac{m-2}{3} = \frac{1-2n}{3n}$; $\frac{m-3}{4} = \frac{1-3n}{4n}$; $\frac{m-4}{5} = \frac{1-4n}{5n}$. Also $(a+b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a+b)}$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b + \frac{1.(1-n)\, a^{\frac{1-2n}{n}} b^2}{n.2n} \text{ u. s. f.}$$

Weil aber hier $n > 1$, folglich ~~die~~ einige Produkte alsdenn negativ werden müssen, welches die Formeln so, wie sie hier stehen, nicht anzeigen: so setze man für $\frac{1-n}{2n}, -\frac{(n-1)}{2n}$; ferner für die folgenden Werthe $-\frac{(2n-1)}{3n}$; $-\frac{(3n-1)}{4n}$ u. s. f. und

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} + \frac{a^{\frac{1}{n}} b}{n.a} - \frac{(n-1)\, a^{\frac{1}{n}} b^2}{n.2n.a^2}$$

$$+ \frac{(n-1)(2n-1)\, a^{\frac{1}{n}} b^3}{n.2n.3n\; a^3} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\, a^{\frac{1}{n}} b^4}{n.2n.3n.4n.\; a^4}$$

$$+ \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)\, a^{\frac{1}{n}} b^5}{n.2n.3n.4n.5n.\; a^5} \dots$$

 = (1

$$= \left(1 + \frac{b}{na} - \frac{(n-1)\,b^2}{n\,.\,2n\,.\,a^2} + \frac{(n-1)\,(2n-1)\,b^3}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,a^3}\right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n\,.\,a^4} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)b^5}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n\,.\,5n\,.\,a^5}\right) a^{\frac{1}{n}}.$$

Es sey $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ und die gegebene Zahl so zerlegt, daß a ein Quadrat bedeutet; z. B. $a + b = 5$, also $a = 4$: so ist $\sqrt{5} = (1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} - \frac{5}{\cancel{31488}}$ 32768 $\ldots)2$, welches, wenn diese Brüche in Decimalbrüchen ausgedruckt werden, 2,2360 ... gibt: nämlich $\frac{1}{8} = 0,125$; $\frac{1}{1024} = 0,00097\ldots$; $\frac{1}{128} = 0,0078\ldots$; $\frac{5}{\cancel{31488}}$ 32768 $= \cancel{0,00797}$. 0,0000152,6

Indeß ist diese Methode bey niedrigen Potenzen zu mühsam, als daß man sie gebrauchen sollte.

§. 106. Es ist schon §. 47. u. f. gezeigt, wie man vermittelst der Logarithmen die Arbeit des Multiplicirens und Dividirens in Addition und Subtraction, die Erhöhung der Potenzen aber und Ausziehung der Wurzel in eine bloße Multiplication und Division der Exponenten oder Logarithmen verwandeln könne. Dieser ungemeine Vortheil im Rechnen aber setzt voraus, daß man von allen Zahlen den Logarithmen habe, welches §. 42. nicht der Fall zu seyn scheint. Es kommt hier nothwendig darauf an, daß jede Zahl als eine Potenz der a, was auch diese Basis des logarithmischen Systems für einen Werth habe, ausgedruckt werde. Nun würde, wenn $a = 16$, also $l.\,16 = 1$ wäre, $\sqrt{a} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$ seyn; also $l.\,4 = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Ferner $\sqrt{4} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$; also $l.\,2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$; $\sqrt{2} = 16^{\frac{1}{8}} = 1{,}4142\ldots$ also $l.\,1{,}4142\ldots = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $\sqrt{1{,}4142} = 16^{\frac{1}{16}} = 1{,}1934$ und $l.\,1{,}193 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$; endlich $\sqrt{1{,}1934\ldots} = 16^{\frac{1}{32}} = 1{,}09\ldots$ und $l.\,1{,}09\ldots = \frac{1}{32} = 0{,}03125$. Ferner $a^{\frac{1}{16}}\,.\,a^{\frac{1}{32}} = a^{\frac{3}{32}} = 1{,}1934\,.\,1{,}09 = 1{,}3$; also $l.\,1{,}3 = \frac{3}{32}$, und $a^{\frac{1}{32}}\,.\,a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{5}{32}} = 1{,}09\,.\,\sqrt{2} = 1{,}54$; also $l.\,1{,}54\ldots = \frac{5}{32}$ und $1{,}54\,.\,\sqrt{2} = 3{,}08 = a^{\frac{9}{32}}$ oder $l.\,3{,}08 = \frac{9}{32}$; $3{,}08\,.\,2 = 6{,}16 = a^{\frac{9}{32}}\,.\,a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{17}{32}}$; $4\,.\,2 = 8 = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}$, also $l.\,8 = \frac{24}{32}$.

Nimt

Nimmt man hier nicht alles in völliger Schärfe: so hat man für die Grundzahl $a = 16$ folgende Reihe von Zahlen und ihren Logarithmen zwischen 1 und 8.

1;	1,1;	1,2;	1,3;	1,4;	1,5;	1,67;	2;	3,1;	4,1;	6,16;	8
0;	$\frac{1}{32}$;	$\frac{2}{32}$;	$\frac{3}{32}$;	$\frac{4}{32}$;	$\frac{5}{32}$;	$\frac{6}{32}$;	$\frac{8}{32}$;	$\frac{9}{32}$;	$\frac{16}{32}$;	$\frac{17}{32}$;	$\frac{24}{32}$

Alle diese Zahlen der obern Reihe sind aus $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ entstanden, indem man sie so oft mit sich selbst multiplieirt hat, als es der darunter stehende Logarithmus anzeigt, also Potenzen der Grundzahl a. Je größer nun n angenommen wird, also je kleiner die Zahl $a^{\frac{1}{n}}$ ist; desto leichter ist es, eine solche Zusammensetzung dieser Potenzen zu treffen, daß ihr Product von einer ganzen Zahl nicht merklich abweicht. Auf diese Art fand **Heinrich Brigg**, ehemaliger Professor der Geometrie zu Oxford, logarithmische Tafeln, für die Grundzahl $a = 10$ berechnet, die man die Tafel der **gemeinen Logarithmen** zu nennen pflegt.

§. 107. l. $1 = 0$ (§. 50.) Wächst aber 1 auch nur um die kleinste Zahl v; so kann l. $(1 + v)$ nicht mehr Null seyn. Es sey $1 + v = a^{\omega}$, und ω ein unendlich kleiner Bruch: so kann man immer annehmen, daß v oder die Größe, um welche die Zahl wächst, verhältnißmäßig mit den Logarithmen wächst; so daß **der Unterschied der Zahlen den logarithmischen Differenzen gleich gesetzt werden kann**, so lange v **noch sehr klein ist.** Schon für $\omega = \frac{1}{32}$ war dieser Unterschied bey den ersten Gliedern der Reihe 1,1; 1,2; 1; 3 u. s. w. §. 104. unbeträchtlich. Wenn sich daher allgemein ω zu v verhält, wie 1 zu K; so kann man vermittelst dieses Verhältnisses aus den Logarithmen die Zahlen, oder aus den Zahlen die Logarithmen finden. Man setze nämlich $v = K\omega$, und im vorigen Exempel §. 106. $K = 3,2$ für $\omega = \frac{1}{32}$, so findet man selbst bey dieser noch gar nicht kleinen Verhältniß-Zahl die Werthe von v ziemlich genau für die ersten 5 Glieder der Reihe.

Nämlich $1 + \frac{3,2.1}{32} = 1,1$; $1 + \frac{3,2.2}{32} = 1,2$ u. s. w. Allgemein also sey $a^\omega = 1 + K\omega$, und $\omega = l.(1 + K\omega)$ §. 41.; so ist $a^{n\omega} = (1 + K\omega)^n$ §. 52. Diesen Werth setze man $= 1 + x$; also $l.(1 + x) = n\omega$; und $1 + K\omega = (1 + x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{x}{n}$
$- \frac{(n-1)x^2}{n.2n} + \frac{(n-1)(2n-1)x^3}{n.2n.3n} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{n.2n.3n.4n}$
$+ \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^5}{n.2n.3n.4n.5n}$ u s. w. (§. 105.)

§. 108. Soll $n\omega$ eine endliche Zahl seyn: so muß n unendlich groß für $\omega = \frac{1}{\infty}$ angenommen werden (§. 82.). Dies giebt folgende Abkürzung der vorigen Reihe. Weil 1 gegen n verschwindet: so ist $\frac{n-1}{n} = 1$; $\frac{2n-1}{2n} = 1$; $\frac{3n-1}{3n} = 1$ u. s. w. also $(1 + x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n} - \frac{x^4}{4n} + \frac{x^5}{5n} - \frac{x^6}{6n}$ u. s. w. folgl. $(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \ldots)$

§. 109. Da $1 + K\omega = (1 + x)^{\frac{1}{n}}$: (§. 107.) so ist $K\omega = (1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1$, und $\omega = \frac{1}{K}(1 + x)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{K} = l.(1 + K\omega) = \frac{1}{n} l.(1 + x)$: folgl. $n\omega = \frac{n}{K}(1 + x)^{\frac{1}{n}} - \frac{n}{K} = l.(1 + x) = \frac{1}{K}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots)$

§. 110. Hätte x einen negativen Werth: so würden zwar die geraden Potenzen den negativen Werth behalten, den sie von ihren Coefficienten haben; aber die ungeraden würden auch negativ werden. Daher wäre $l.(1 - x) = -\frac{1}{K}(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \ldots)$ und $l.(1 + x) - l.(1 - x) = l.\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{2}{K}(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots)$
Diese Reihe hat den Vorzug vor der ersten, weil sie keine abwechselnde Zeichen hat und schneller abnimmt.

§. 111. Hier ist nur noch der Werth K aus der Grundzahl a zu bestimmen. Man setze zu dem Ende $\frac{1 + x}{1 - x} = a$; also:

~~Beispiel für 10 Ecke etc.~~

Rog. Cotes.

~~Σ bcd~~ ...

$$\left(\sum_{(b,c,d\ldots n)} 1.2.3\ldots p - \sum_{(a,b,\ldots m)} 1.2.3\ldots p\right) : (b-a) = \sum_{(a.b\ldots n)} 1\ldots p-1$$

für $x^{13}-1=0$ die erste Gleichung

$A^3 + AA - 4A + 1$ davon die Wurzeln

$1+5+12+8 = +0{,}273890554914$

$2+10+11+3 = +1{,}377202853977$

$4+7+9+6 = -2{,}651093408956$

$(1+12-5-8)^2 = \cancel{(2)+2+(2)}+$

$2+13-6-9$

$+11+13-7-4$

$+10+13-13-4$

$+3+13-7-9$

$= 4 + B - 2C = 10.679389671889$

	830218681791 2	
	1377202853977	
	6679389671889	
	10.679389671889	∓ 3,267933547655 1
	10 6276	0,273890554914
1.3443	51789	3,541824102569
1.3255	6527	2,994042992741
V(2.6698	45689	0,885456025642
	610067	0,748510748185
	65349	
	588141	
	2192618	
	653583	
	1960749	
	23186989	
4434117	6535863	
8153025	19607589	
6781092	35794000	
	6535866	
	32679332	
	3114668	

21

27389.
750159321.
20548038972469.

548
548
628

750760121
6028..
750159321

363
274
274
3014
33154
99462

20570824......
99462..
205718186200
22775081331

~~2250471963~~
~~2250471963~~
~~75076~~
76
225228
2252281331
24775081331

$A = 0.27389 + B$

0.020548 038972 469	+ 0,2250471963 A
+ 750159321	+ 0,54778
− 1,09556	− 4.
+ 1	772827
+ 0,000001 771072 469	− 3.227172 8037 A + 1,82167 A^2

19829

20570814053800
24775081331
20548038972469

+ 0,82167 A^2

$$A = \frac{0,\cdots\cdots 1\ 771072\ 469}{3,227172\ 8037 - 1,82167 A}$$

1790801869

~~2488064~~
~~5088221~~
7394143 ~~5488025~~

6751415889
6001258568
2250471963
20254247667
2054605886 4869

2530475
5088221
7442254 5549137 −

also $l\,\frac{1+x}{1-x} = 1 = \frac{2}{K}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots\right)$ §. 42. so ist $K = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots\right)$ der Modulus des logarithmischen Systems für die Grundzahl a.

§. 112. Aus $\frac{1+x}{1-x} = a$, findet man $a(1-x) = 1+x$, und $x = \frac{a-1}{a+1}$, welches für die Grundzahl a in in die vorige Gleichung gesetzt, K für jeden Werth der Grundzahl a angiebt. Ist z. B. $a = 10$, so ist $x = \frac{9}{11}$; und $K = 2\left(\frac{9}{11}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{9}{11}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{9}{11}\right)^9 + \frac{1}{11}\left(\frac{9}{11}\right)^{11} + \frac{1}{13}\left(\frac{9}{11}\right)^{13} \ldots$ Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche, so findet man, wenn die Reihe weit genug fortgesetzt wird (für $a = 10$) den **Modulus des Briggischen Logarithmensystems** $K = 2{,}3025850929\ldots$

§. 113. Setzt man $K = 1$: so hat man den **Modulus der Systems für die natürlichen Logarithmen**, deren Grundzahl a unmittelbar aus §. 104. gefunden werden kann. Es sey nämlich $a^{n\omega} = (1 + K\omega)^n = a^1$ oder $n\omega = 1$, also $\omega = \frac{1}{n}$. Diesen Werth substituirt, bekommt man $a = \left(1 + \frac{K.1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n.(n-1)}{n.\ 2n} + \frac{n.(n-1).(n-2)}{n.\ 2n\ \ 3n} \ldots$ Also weil 1 gegen n verschwindet, $a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \ldots$ welches, in Decimalbrüche ausgedruckt, beystehende Werthe giebt, deren Summe $a = 2{,}71828182\ldots$ deren Logarithmus also 1 ist. Für jede andre Zahl in diesem System ist $\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots\right)$

2	$=$	2,0000000000	
$\frac{1}{2}$	$=$	0,5000000000	
$\frac{1}{6}$	$=$	0,1666666666	
$\frac{1}{24}$	$=$	0,0416666666	
$\frac{1}{120}$	$=$	0,0083333333	
$\frac{1}{720}$	$=$	0,0013888888	
$\frac{1}{5040}$	$=$	0,0001984126	7984
$\frac{1}{40320}$	$=$	0,0000248016	873015
$\frac{1}{362880}$	$=$	0,0000027557	31922
$\frac{1}{3628800}$	$=$	0,0000002755	73192
$\frac{1}{39908800}$	$=$	0,0000000025	0521
a	$=$	2,71828182..	~~1927~~

20876
1606
114

§. 112.

§. 114. Es sey $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+d}{n}$; also $n.(1+x) = (1-x)(n+d)$, und $x = \frac{d}{2n+d}$. Setzt man hier $d = n = 1$: so ist $x = \frac{1}{3}$, und $l. \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = l. 2 =$ $2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} \ldots\right)$

näml. $\frac{1}{3}$	$=$	0,333333333
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3}$	$=$	0,012345678
$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5}$	$=$	0,000823045
$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7}$	$=$	0,000065321
$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9}$	$=$	0,000005645
$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}}$	$=$	0,000000513
$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}}$	$=$	0,000000048
$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3^{15}}$	$=$	0,000000004
		0,346573587
		2
		0,693147174

$= 0,6931471806$ wenn man nämlich noch um ein paar Glieder weiter geht, als hier berechnet sind. Eben so findet man $l. \frac{3}{2}$ für $n = 2$ und $d = 1$, und daraus $l. (\frac{3}{2} . 2) = \log. \frac{3}{2} + \log. 2 = \log. 3 = 1,0986122887$.

$\text{Log.}\ 4 = 2\ l.\ 2$; $l. \frac{5}{4}$. für $n = 4$ und $d = 1$, also $l. \frac{5}{4} + l. 4 = l. 5 = 1,6094379124$ und daraus $l. 10 = l. 2 + l. 5 = 2,3025850929$ $l. \frac{7}{6}$ für $n = 6$, und $d = 1$, und daraus $\log. 7 = \frac{7}{6} + \log. 6 = 1,9459101490$.

§. 115. Der natürliche Logarithmus von 10 ist $= K$, (§. 112.) Der Briggische Logarithmus von 10 ist $= 1$.

Jeder natürliche Logarithmus wird ein Briggischer für $a = 10$ wenn er mit $\frac{1}{K} = \frac{1}{2,302585092 9} = 0,4342944819$ multiplicirt wird. (§. 110.)

Daher ist der Briggische $\log. 2 = 0,6931471806$ $\times 0,434944819. = 0,3010299957 \ldots$

In den Tafeln stehen sie nur mit 7 Decimalstellen, näml.

l. 2 = 0,3010300	l. 11 = 1,0413927	l. 23 = 1,3617278
l. 3 = 0,4771213	l. 13 = 1,1139434	l. 29 = 1,4623980
l. 6 = 0,7781513	l. 17 = 1,2304489	l. 31 = 1,4913617
l. 7 = 0,8450980	l. 19 = 1,2787536	l. 37 = 1,5682017

$$l(1-x) = -\frac{1}{K}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots\right)$$

Exempel

1. $x = \frac{1}{10}$

$$\frac{1}{K}x = 0{,}043429448$$
$$\frac{1}{K}\frac{x^2}{2} = 0{,}002171472$$
$$\frac{1}{K}\frac{x^3}{3} = 0{,}000144765$$
$$\frac{1}{K}\frac{x^4}{4} = 0{,}000010857$$
$$\frac{1}{K}\frac{x^5}{5} \text{———} 868$$
$$\frac{1}{K}\frac{x^6}{6} \text{———} 72$$
$$\frac{1}{K}\frac{x^7}{7} \qquad 6$$
$$-0{,}04575749 = 0{,}95424251 - 1 = l\,\tfrac{9}{10}$$

$$l\,9 = 0{,}95424251$$
$$l\,3 = 0{,}47712125$$

2, $x = \frac{1}{100}$

$$\begin{array}{r} 0{,}0043429448 \\ 0{,}0000217147 \\ 0{,}0000001448 \\ 0{,}0000000010 \end{array}$$

$$l\,\tfrac{99}{100} = -0{,}0043648053 = 0{,}9956351946 - 1$$
$$l\,99 = 1{,}9956351946$$
$$l\,9 = 0{,}95424251$$
$$l\,11 = 1{,}04139268$$

Denn für $\frac{1+x}{1-x} = 10$ ist in der Reihe (§ 113) $x = \frac{9}{11}$, wie für **K** 22

3, $x = \frac{1}{1000}$

$$\begin{array}{r} 0{,}00043429 + \\ 0{,}00000022 - \end{array}$$

$$l\,\tfrac{999}{1000} = -0{,}00043451$$
$$l\,999 = 2{,}99956548$$
$$l\,27 = 1{,}4313638$$
$$l\,37 = 1{,}5682017$$

Logarithmen von Primzahlen.

2 301029 995663 981195 213138 894724 4

3 477121 254719 662437 295027 903230 113426 478611 765951 291

7 845098 040014 256830 712216 258

11 041392 685158 225040 750199 971293 028007 399736 388042 9.42

13

+ 1	28396	
− 6811	26092	139
+ 18443	10774	
− 37447	26673	
+ 2534	26541	2.7.181
− 40219	13678	37.1087
+ 15397	17116	89.173
− 33343	16227	
+ 16286	16345	2.17.479
− 33107	16762	
+ 15869	14976	7.2267
− 36679	21703	43.853
+ 9142	24007	2.7.653
− 25159	26311	139.181 ‖ + 14
+ 4534	28097 ·····	+ 2.7.267
− 3727	27808	
+ 8869	25406	+ 181
− 18139	10872	11.17.97
+ 37937	27065	59.643
− 1946		− 2.7.139

1.	0.	806339627
3.	1.	268779876
9.	1.	89593292
27.	19.	29864444
81.	73.	9954876
243.	73.	3318292
729.	316.	1106227
2187.	1045.	369196
6561.	3232	124491
19683.	3232.	41497
22548.	22181.	57981
7516.	7149.	

17

19

23

29

31

37

41

43

47

53

59

61

67

71

73

79

83

89

97

101 004321 373782 642575 275188 178222 937913 469289 364578 352

103

107

Aus den hier mitgetheilten kann eine sehr große Menge Logarithmen gemacht werden. Man hat sie nämlich für alle Zahlen, welche durch die Multiplication der Zahlen von 1 bis 40 herausgebracht werden können.

§. 116. Da für a = 10, l. 10 = 1; l. 100 = 2, l. 1000 = 4, l. 10000 = 5; ferner l. $\frac{1}{10} = -1$, l. $\frac{1}{100} = -2$, l. $\frac{1}{1000} = -3$, u. s. w. so kann man aus der Zahl des Logarithmen, die auf dem Platz der ganzen Einheit steht, und aus dem positiven oder negativen Zeichen desselben, sogleich wissen, aus welcher Klasse die Zahl ist, welcher der Logarithmus zugehört. Z. B. 3,0305997 ist = l. 1073 = l. 37 + l. 29. Daß die Zahl aus der Klasse der Tausende seyn müsse, erkennt man sogleich aus 3 auf dem Platz der Einer.

Eben so ist 1,0305997 = l. 10,73 = l. 1073 — l. 100 und — 0,0305997 = l. $\frac{1}{1{,}073}$ = l. $\frac{1000}{1073}$; — 1,0305997 = l. $\frac{1}{10{,}73}$ = l. $\frac{100}{1073}$.

Man nennet deshalb die Zahl auf dem Platz der ganzen Einheiten die **Kennziffer** oder **Characteristik**; und weil diese jeder leicht bestimmen kann: so wird sie sogar in den besten Logarithmischen Tafeln, dergleichen die Schulzischen und **Vegaschen** sind, weggelassen.

§. 117. Weil die negativen Logarithmen allemal sich auf einen Bruch beziehen, dessen Zähler = 1, und dessen Nenner die Zahl ist, welche eben der Logarithmus positiv genommen anzeigt, so ist es zwar leicht, den zum negativen Logarithmus gehörigen Bruch anzugeben; aber man findet auf solche Art nur einen gemeinen Bruch. Will man gleich den dazu gehörigen Decimalbruch haben, so setze man eine positive Kennziefer von so viel Einheiten darüber, als hinreichend ist, den gegebenen Logarithmen davon zu subtrahiren. Der Rest ist alsdann der Logarithmus des Zählers des Decimalbruchs, dessen Nenner dieselbe vorhin addirte Kennziffer anzeigt, und deshalb mit dem negativen Zeichen dabey gesetzt werden muß. Das ganze Verfahren beruhet

auf

auf §. 35 und §. 83. d bedeutet in der Formel $\frac{ad}{b}$ (§. 35.) hier eine Potenz der Zehen, welche die hinzuzusetzende Kennziffer anzeigt. Also $l. \frac{a}{b} + l. d = l. x$, wozu alsdann die vorhin addirte Characteristik mit einem negativen Zeichen zu setzen ist,

z. B. $-1{,}0280287 = l. \frac{a}{b}$ ist gegeben; man sucht den dazu gehörigen Decimalbruch. Man addirt $+2 = l. d$, und subtrahirt also davon $l. \frac{a}{b}$: so hat

$$\begin{array}{r} -1{,}0280287 \\ +2{,}0000000 \\ \hline +0{,}9719713 - 2 \end{array}$$

man $l. x = l\ 9{,}375$, welche Zahl noch mit 100 zu dividiren ist. Also ist der Bruch $= \frac{9{,}375}{100} = \frac{9375}{100000} = 0{,}09375$.

§. 118. Der vorhin gegebene log. $-1{,}0280287$ weiset auf den gemeinen Bruch $\frac{1}{10{,}666} \ldots = \frac{1}{10\frac{2}{3}} = \frac{3}{32}$, welches nicht einmal aus den gewöhnlichen Tafeln sogleich zu erkennen ist. Also können sogar Fälle kommen, wo man das vorhin erklärte Verfahren gebrauchen muß. Wenn übrigens für $10 + \frac{2}{3}$ der Logarithmus gesucht werden sollte, so müßte die ganze und gebrochene Zahl in einen unächten Bruch verwandelt werden, nämlich in $\frac{32}{3}$, also $l. 32 - l. 3 = l. (10 + \frac{2}{3}) = 1{,}5051500 - 0{,}4771213$, und $l. \frac{1}{10 + \frac{2}{3}} = -1{,}0280287$.

§. 119. Aufgabe. Den Logarithmus für eine Zahl zu suchen, der nicht in den Tafeln steht.

Auflösung. Die gewöhnlichen Tafeln enthalten die Logarithmen nur für 10000. Ist die Zahl größer, so muß man entweder sie in Factoren zerlegen, oder, wenn das nicht gehen sollte, doch die nächst größere und nächst kleinere, und die Logarithmen dieser Factoren addiren. Die Differenzen dieser also gefundenen Logarithmen verhalten sich alsdann wie die Differenzen der Zahlen, und so auch die Theile der gesuchten Differenzen, sowohl der Logarithmen als der Zahlen (§. 107.). Z. B. Man sucht den Logarithmus

$$\int \frac{dx}{(lx-1)^2} \quad \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{l\infty+1}$ .... $\frac{1}{\infty}$ ...... 0.0...

$\frac{1}{(l6+1)^2}$ .... $\frac{1}{(2,7917595)^2}$ ... 0,12830512

$\frac{1}{(l3+1)^2}$ .... $\frac{1}{2.0986123^2}$ ... 0,22705471

$\frac{1}{(l2+1)^2}$ .... $\frac{1}{1,6931472^2}$ ... 0.34882734

$\frac{1}{(l\frac{3}{2}+1)^2}$ .... $\frac{1}{1.4054651^2}$ ... 0,50624412

$\frac{1}{(l\frac{6}{5}+1)^2}$ ... $\frac{1}{1,1823216^2}$ ... 0,71536675

$\frac{1}{(l1+1)^2}$ ..... $\frac{1}{1}$ .... 1,0...

$\frac{41}{140} \cdot 1$ 0.29285714

$\frac{216}{140} \cdot 0,84367187$ 1,30166517

$\frac{27}{140} \cdot 0,73329883$ 0,14142192 23

$\frac{272}{140} \cdot 0.34882734$ 0,67772169

2.41366592

6) 0.40227765 sollte sein:

0.40365

$\sqrt[3]{1.024} =$

$+\,1{,}00000\ 00000 \qquad -0{,}00006\ 40000$
$00800\ 00000 \qquad 136\ 53$
$8533\ 33 \qquad 44$
$2\ 40295\ 3$

$1.00800\ 08535\ 73$
$6\ 40136\ 57$

$1.\ 00793\ 68399\ 1$

Also

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ 10498$

$N'\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \tfrac{?}{}N'x$

$N\frac{2\sqrt{x}}{1+\cancel{x}} = \frac{1}{4}xxNx$

$N = \frac{K\cancel{x}K\sqrt{1-xx}}{xx}$

$\frac{KxK\sqrt{1-xx}}{xx}$

$\cancel{xx}$

$\frac{\alpha}{xx} + \cancel{\frac{\beta}{x}} + \gamma + \delta xx$

$\frac{1}{4}\frac{\alpha}{x} + \frac{1}{2}\cancel{\beta} + \frac{1}{4}\gamma x$

$1.2.3.4 = 1 - \frac{4.3+2.1}{4}$

$\frac{(1+x)Kx}{4x}$

$-1 + \frac{4.3-2.1}{2}$

$-1 + \frac{4.2-3.1}{1}$

$+1 - \frac{4.2+3.1}{3}$

$\frac{\alpha}{4x} + \cancel{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{4}\cancel{\gamma}x$

$+\gamma \quad +4\delta$

$\gamma = -\frac{\alpha}{2}$

$4\delta + \cancel{\frac{1}{4}\alpha} = -\frac{3}{32}\alpha$

$1 - 6 + 15$
$1 +$

$\frac{4.3}{2} + \frac{4.2}{3} = \cancel{2}$

$\frac{2.1}{4} + \frac{4.2}{1} = 2$

$\alpha\left(\frac{1}{xx} - \frac{1}{2} - \frac{3}{32}xx\right.$

$xx + Ax^4 + Bx^6 + Cx^8$

140
82
222
1776

$A = \frac{1}{2}$

$B = \frac{11}{32}$

$C = \frac{17}{64}$

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{11}{32} \quad \frac{17}{64} \quad \frac{1787}{8192}$

$-\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{11}{128} - \frac{17}{256}$

$-\frac{5}{64} - \frac{5}{128} - \frac{95}{\cancel{2048}} \quad \frac{1787}{8192}$

$-\frac{11}{256} - \frac{11}{512}$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{64} + \frac{25}{256} + \quad -\frac{469}{16384}$

$\frac{3574}{1880}$
1894
469
10 − 32

80 | 16
256 C | 132

$4x - 8xx + 12x^3 - 16x^4 + 20$
$+16A \quad -64A + 160A - 160$
$+64B - 384B + 462$
$+256C - 544$
$+1024D$

$4 \quad 0 \quad 4A \quad 6$

$\frac{11}{8}$

l. 5535 = 3,7431176	
l. 5 = 0,6989700	
l. 27975 = 4,4420876	
l. 6919 = 2,8800433	
l. 4 = 0,6020600	
l. 27676 = 4,4421033	
subtr. l. 27675 = 4,4420876	
	157
also 15,7 . 0,7 =	110
add. zu l. 27675	= 4,4420876
l. 27675,7 = 4,4420986	

rithmus für 27675,7; man nehme hier erst 27675 = 5535 · 5, und suche dazu den Logarithmus; ferner 27676 = 6919 . 4. Die Differenz beyder Logarithmen ist 157, davon der zehnte Theil = 15,7 welcher mit 7 zu multipliciren ist. Dies giebt 109,9 = 110; welche Differenz zu l. 27675 addirt den verlangten Logarithmus giebt.

Anmerkung. In den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln des Georg Vega, welche mit den Tafeln des Shervin und Schulze einerley Einrichtung haben, aber wohlfeiler und an vielen Stellen richtiger sind, ist die Einrichtung getroffen, daß man diese Mühe nicht einmal nöthig hat. Von der Zahl 1000 an hat jede Seite 13 Columnen, davon die beyden ersten die Zahl und den dazu gehörigen Logarithmus, aber ohne Kennziefer, enthalten. Die folgenden mit 1, 2, 3 . . . 9 bezeichneten Columnen enthalten die vier letzten Decimal-Stellen für diese Differenzen, welche man statt der 4 letzten des bey der Zahl stehenden Logarithmen abschreibt, wenn die Zahl über 10000 ist. In der letzten Columne stehen nun noch die Differenzen, sowohl die ganzen, als einzelnen Zehntel und Hundertel. So steht bey 2767 . . 4420092. Man übergeht diese 0092 in unserm Exempel, und nimmt für 27675 aus der Columne 5 dafür 0876. Endlich steht in der Columne der Differenzen, daß die ganze Differenz zwischen 27675 und 27676 und allen Logarithmen zwischen 27600 und 27900, 156 betragen; also 156 . 0,7 = 109, welches noch zu obiger Summe zu addiren ist. Man kann auch noch den hundertsten Theil dieser Differenzen dazu nehmen, und also Logarithmen für Zahlen aus der Klasse der Millionen aufsuchen.

So wäre l. 2767578 = 6,4420998

§. 120. Wie man zu den gegebenen Logarithmen vermittelst solcher Tafeln die Zahl finden soll, bedarf keiner besondern Anleitung. Es ist gerade das umgekehrte Verfahren. Höchstens kann man aber nur 7 Zahlstellen auf diese

Art finden, weil die 7te Decimal-Stelle der Logarithmen alsdenn weiter keine Differenz giebt. Hätte man die Logarithmen in weit mehrern Decimal-Stellen: so würde die Formel §. 112 ein leichtes Mittel abgeben, auch für weit größere Zahlen die Logarithmen viel genauer zu berechnen.

Eben so könnte aus einem so vollständigen Logarithmen auch die Zahl so genau, als man es nur verlangen kann, durch Hülfe einer unendlichen Reihe gefunden werden.

Es sey nämlich λ der Logarithm der Zahl y aus dem System, dessen Grundzahl b ist, also $b^\lambda = y$. Ist nun $b = a^{n\omega} = (1 + K\omega)^n$, oder, wenn $n\omega = m$, also $\omega = \frac{m}{n}$, und daher für $1 + K\omega = 1 + \frac{Km}{n}$ gesetzt wird $b = a^m$ $= (1 + \frac{Km}{n})^n$, folgl. $b^\lambda = (1 + \frac{Km}{n})^{\lambda n} = 1 + \frac{\lambda n Km}{n}$ $+ \frac{\lambda n(\lambda n - 1) K^2 m^2}{1 \cdot 2 \quad n^2} + \frac{\lambda n (\lambda n - 1)(\lambda n - 2) K^3 m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad n^3} \ldots$ (§. 104.) oder da $\lambda n - 1 = \lambda n = \lambda n - 2 = \lambda n - 3 = \lambda n - 4$; weil 1, 2, 3, 4 gegen λn verschwinden, und K für das System natürlicher Logarithmen $= 1$: so ist

$$y = 1 + \lambda m + \frac{\lambda^2 m^2}{1 \cdot 2} + \frac{\lambda^3 m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda^4 m^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots ;$$

m, m^2, m^3, m^4, u. s. w. bedeuten hier natürliche Logarithmen, nach der Voraussetzung, daß $K = 1$ sey.

Anwendungen, sowohl für die Findung des größern Logarithmen, als der grössern Zahl aus den vollständigern Logarithmen findet man in Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik 2ten Theils 1ste Abtheilung 2te Auflage, 157. §., wo nur $\frac{q}{2p + q}$ statt der hier §. 112. gebrauchten $\frac{d}{2n + d}$, und 159. §., wo statt m der natürliche Logarithmus (l b) gesetzt ist. Der Gebrauch der Logarithmen selbst nach den vorhin vorgetragenen allgemeinen Regeln wird bey dem Unterrichte gezeigt werden.

Drit-

Discerpend. 283009 in bina quadrata

Excl. qu. rad.

8 ± 2.3
9 $\pm 1, 4..$
~~25~~ $\pm 1.$ 'm: 25 ± 3
7 $\pm 0.1.$
11 $\pm 2.4.$
13 $\pm 1.2.6.$

Lim. 376 .. 531

Man. $40n \pm 0.7.8.12.15.17.\overset{20,}{23}.25.28.32.33$

~~378~~
380
385 7
400 . 9
415 . 9
420 7
425 11
428 . 9
440 . 9
447 7
455 . 9
460 . 9
463
472 9
480 11
495 13
497 7
500 9
503 9
505 9
520
528

21. 10 4 2 1

380 . 463 . 520 . 528

$4225 + 528^2$

Also Primzahl.

Computus logarithmi numeri $0, 8 + \sqrt{0,05}$

Multiplico per 190983

52360, 67977 49978 96964 09173

~~104721~~, 35954 99957 93928 18346
[illegible] 4712, 76117 97498 10726 76826

lg 1000 100008, 89837 02459 83201 41520
9,42492 23594 99621 45354
18

99999, 47344 78864 83519 96166
52360 67977 49978 96964

99999 99705 46842 33558 93130

0,00000 00294 53157 66441 06870
43374 42482
85

00294 53158 09815 49437

Integrale

$$\frac{d\phi}{\sqrt{(1-cc\sin\phi^2)}} + \frac{d\psi}{\sqrt{(1-cc\sin\psi^2)}} = 0$$

85

est

pag. 96

$$\cos\phi\cos\psi = \cos\mu + \sin\phi\sin\psi\sqrt{(1-cc\sin\mu^2)}$$

11, 51292 54649 70228 42008 99573
294 53158 09815 49437
11, 51292 54355 17070 32193 50136

294531
589062
29453 10
4123 4
3534
353
24
2
339678

$$q = \tfrac{\pi}{2}a\left(1 - \frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right) - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{a}\right)^2 \ldots\right)$$

$$= \frac{aa}{M(a,b)} = a\left(\cancel{+1}\,1 + \frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2 + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2 \ldots\right)$$

$$\frac{a}{M(a,b)} - \frac{2q}{\pi a} = \cancel{2a} + \frac{1}{2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right) + \frac{1.1.3}{2.2.4}\left(\frac{aa-b}{aa}\right)^2$$

$$\frac{a}{M(a,b)} - \frac{aa-bb}{aa}$$

1593
3186
156114

86436.281961
312.228

86748.509961
339678
849639

$$\begin{array}{cccccc} y & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \ldots \\ x & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \end{array}$$

$$\int y\,dx \quad \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x=1 \\ x=2 \end{bmatrix}$$

α

$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$

$\frac{5}{12}\alpha + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{12}\gamma \;\Big|\; -\frac{1}{12}\alpha + \frac{2}{3}\beta + \frac{5}{12}\gamma$

$\frac{3}{8}\alpha + \qquad -\frac{1}{24}\alpha \qquad -\frac{1}{24}\alpha$

$\frac{251}{720}\alpha +$

α

$\alpha + \beta$

$\frac{5}{2}\alpha + 2\beta - \frac{1}{2}\gamma \;\Big|\; -\frac{1}{2} + 2 + \frac{5}{2}$

$$\mathcal{K}\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = (1+x)\mathcal{K}x$$

$$\mathcal{K}\sqrt{(1-xx)} = \mathcal{H}x \qquad \frac{1-x}{1+x} = y$$

$$\mathcal{K}\frac{1-x}{1+x} = \mathcal{H}\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} \qquad \frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1+y} = \sqrt{(1-xx)}$$

$$\cancel{\mathcal{H}}\sqrt{(1-xx)} = \frac{2}{1+x}\mathcal{H}\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

$$\mathcal{H}\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1+x}{2}\mathcal{H}x$$

$$xx = \mathcal{G}x$$

$$\mathcal{G}\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{4x}{(1+x)^2}\mathcal{G}x \qquad \mathcal{M}x + \alpha\mathcal{N}x = \mathcal{U}x$$

$$\mathcal{G}x\,\mathcal{H}x\,\mathcal{K}x = \frac{1}{\mathcal{N}x} \qquad \mathcal{U}\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\,\mathcal{U}x$$

$$x \quad \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = x' \pm$$

$$\mathcal{N}\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1}{2}x\,\mathcal{N}x \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x''\left(\frac{1}{2}\right.\right. \qquad \frac{1-\sqrt{1-xx}}{1+\sqrt{1-xx}} = x'$$

$$\frac{xx}{\mathcal{K}x\,\mathcal{K}\sqrt{1-xx}} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x' + \frac{1}{8}x'x'' + \text{etc} = \mathcal{M}x$$

Dritter Abschnitt.

Von den Proportionen.

§. 121. Erklärung. **Proportion** ist die **Gleichheit** zweyer Verhältnisse. Also, da das **arithmetische Verhältniß** durch die Differenz, und das **geometrische** durch den Exponent bestimmt wird (§. 5.): so machen zwey **arithmetische Verhältnisse**, die einerley Differenz haben, und zwey **geometrische** von einerley Exponenten, allemal eine Proportion aus.

$8 - 6 = 12 - 10$; eine arithmetische Proportion.

$8 : 4 = 12 : 6$; eine geometrische Proportion.

§. 122. Zusatz. Jedes Multiplications- und Divisions-Exempel (§. 9. u. 13.), auch jede zwey gleiche Brüche (§. 20. u. 26.) machen eine geometrische Proportion aus.

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; so ist $a : b = c : d$.

§. 123. Weil es bey Vergleichung zweyer Größen nicht auf ihre Stellung, sondern bloß auf ihre Differenz, oder ihren Exponenten ankommt: so kann man immer annehmen, daß im **arithmetischen Verhältniß** das zweyte Glied aus der Summe des ersten Gliedes und der Differenz; im **geometrischen** aber das zweyte Glied aus dem Produkt des ersten und des Exponenten besteht.

Wenn also 1) $a - b = p - q$, und $b = a + d$, folglich $q = p + d$ (§. 121.), (d mag positiv oder negativ seyn): so ist $a - a + d = p - p + d$ der allgemeine Ausdruck für jede arithmetische Proportion.

2) Wenn $\frac{b}{a} = e = \frac{q}{p}$; also $b = ae$, und $q = pe$, so ist $a : ae = p : pe$ der allgemeine Ausdruck für jede geometrische Proportion, e mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn.

§. 124. Lehrsatz. **In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äußersten Glieder der Summe der beyden mittelsten gleich; in einer geo-**

metrischen aber ist das Produkt der beyden äußersten dem Produkt der beyden mittelsten gleich.

Beweis. Einerley Zahlen geben auch in geänderter Ordnung einerley Summe (§. 7.) und einerley Produkt (§. 12.) Daher ist (§. 123.) 1) $a+p+d = a+d+p$ und 2) $aep = ape$.

§. 125. Zusatz. Zwey und zwey Zahlen, die einerley Summe oder Produkt geben, können immer, und zwar die Summen in eine arithmetische, die Produkte aber in eine geometrische Proportion gestellt werden. Man sieht nämlich eins von diesen Paaren als Summe oder Produkt der beyden äußern, und das andere als Summe oder Produkt der beyden mittelsten Glieder an. Ist $a+g = b+c$; so ist $a-b = c-g$; und ist $ad = bc$, so ist $a:b = c:d$.

§. 126. Weil es hier gleichgültig ist, welches von beyden Paaren als Summe oder Produkt der beyden äussersten Glieder, oder auch, welche von beyden Zahlen des Paars als die erste angesehen wird: so leidet jede Proportion acht verschiedene Versetzungen.

1) In der Arithmetischen:

$a-b=c-g$	$b-a=g-c$
$g-b=c-a$	$c-a=g-b$
$a-c=b-g$	$b-g=a-c$
$g-c=b-a$	$c-g=a-b$

2) In der Geometrischen:

$a:b=c:d$	$b:a=d:c$
$d:b=c:a$	$c:a=d:b$
$a:c=b:d$	$b:d=a:c$
$d:c=b:a$	$c:d=a:b$

§. 127. Lehrsatz. **Das vierte Glied der Proportion besteht**

1) **in der Arithmetischen, aus der Summe der beyden mittlern Glieder weniger dem ersten,**
2) **in der Geometrischen, aus dem Product der beyden mittlern Glieder, dividirt durch das erste.**

Beweis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{4}{1}$	$\frac{33}{8}$	$\frac{268}{65}$	$\frac{2177}{528}$	$\frac{17684}{4289}$	$\frac{143649}{34840}$	$\frac{1166876}{283009}$	$\frac{9478657}{2298912}$	$\frac{}{65.287297}$
				pr.	99.1451	pr.		

$287297 = $ pr.
$= 536^2 + 1$
$= 104^2 . 13 + 383^2$

$9478657 = \square - \cancel{586}\ 1584 = \square - 11\square$
$= 2\square - 1$
$= \square - 13904 = \square - 16.11.79$

$2\times \ldots = 4333^2 + \cancel{187425} = \cancel{\square + 11.25}$.
$3\times \ldots = 5339^2 - 25.7.197$
$9478657 = 3077^2 + 36.2.149$

$9478657 = 79 \times 119983$ p.

$aa - \mu = PQ \quad a + b = Qq$
$bb - \mu = QR$
$cc - \mu = RS \quad b + c = Rr$

$PR = x'x' - \mu y'y' \quad a = x$
$PS = x''x'' - \mu y''y'' \quad y = 1$
$PT = x'''x''' - \mu y'''y'''$

$x' = aq - P \quad ; \; y' = q$
$x'' = aqr - rP - a \; ; \; y'' = qr -$

$\cancel{x'' \quad x' \quad a}$

$x'' = rx' - x \quad y'' = ry' - y$
$x''' =$

134
961
2883
3844
128774
41349
87425

961
325
36

41349
269
1444
1345
999
867

192
~~961~~
154

96
77

$\frac{384}{308}$	$\frac{115}{39}$	$\frac{805}{273}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{2}$

$\frac{9478657}{2298912} = \frac{5}{7} + \frac{2}{3} + \frac{4}{11} + \frac{1}{32} + \frac{730}{311}$

$\frac{730}{311} = 2.\ 3472668810\ 2893890675\ 2411157556\ 7009646302\ 2508038\ldots$

$\frac{1}{32} = 3125$

Cetera $= 1,\ 7445887445\ 8874458874\ 4588744588\ 7445887445\ 8874458887$

4. 1231056256 1768359549 70003 51 4455533748
2 2201

1765

$\sqrt{19}$ ~~2; 1, 3, 1, 4, 1, 3, 1, 4 &c~~

~~$\frac{4}{1}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{13}{3}$ $\frac{48}{11}$ $\frac{61}{14}$ $\frac{292}{67}$ $\frac{353}{81}$ $\frac{1351}{310}$~~

4. 2, 1. 3. 1. 2. 8. 2. 1. 3. 1. 2

$\frac{4}{1}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{13}{3}$ $\frac{48}{11}$ $\frac{61}{14}$ $\frac{170}{39}$ $\frac{1421}{326}$ $\frac{3012}{691}$ $\frac{4433}{1017}$

13 26 13

$\frac{13}{3}$ $\frac{170}{39}$ $\frac{4433}{1017}$ $\frac{115428}{26481}$ 3601128

1

$\frac{57799}{13260}$ p 7. 23. 359

2

26 $\frac{1507207}{345779}$

13 $\frac{19651490}{4508361}$ = 9. 13. 38533

= 9. 11. 13. 3503

500929 / 9. 11. 13. 31. 113

385

170.
115597

26

$\frac{\cdots\cdots}{117563163}$ = ~~3. 37. 113. 9341~~

43 3797 35

57799
179397
751387
4433
755820
1502779
4433
1507207

34476
1017
19593691
57799
19651490
345777
1037331
4495101
13260

$aa + mbb = AA + mBB$

$BaaB \equiv \pm MaB$

115597 = n   mnn

$nrn \equiv \pm nrn$

+3Rn
1130R
130R

nrn

$\square + \square$
$\square + 3\square$

482
369

339 26
337^2

$2a^2 + 1$
$4a^3 + 2a$
231194
347
346791
340 2028

$aB = Ab$

$\frac{AAbb}{BB} + mAA$

$= AA + mBB$

$bb + mBB$

$AAbb + mAABB$
$mAABB$
$BBbb$
$bb + mAA = 0$

$337^2 \equiv -3.26^2$
$339^2 = 26^2$
$340^2 \equiv 3$
$340^2 . 339^2 \equiv 337^2$

340.339 ± 337

Beweis. 1) in der arithmetischen ist $q = p + d$ (§. 123. 1.) und $d = b - a$; also $q = p + b - a$.

2) in der geometrischen ist $q = pe$ (§. 123. 2.) u. $e = \frac{b}{a}$, also $q = \frac{p \cdot b}{a}$, welches auch schon aus §. 35. erhellet.

$10 = 12 - 2$ $(d = -2)$; $6 = \frac{12 \cdot 4}{8} = \frac{12 \cdot 1}{2}$ $(e = \frac{1}{2})$ (§. 121.)

d. h. Verhältnisse in

§. 128. Lehrsatz. **Zwey Glieder einer geometrischen Proportion, mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt, ändert das Verhältniß nicht.**

Beweis. Wenn $am : bm = p : q$, so ist auch $a : b = p : q$ denn $q = \frac{p \cdot bm}{am}$ (§. 127.) $= \frac{p \cdot b}{a}$ (§. 19).

§. 129. Anmerkung. Auf §. 127. beruhet die ganze **Regel de tri** (de tribus terminis), welche aus drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte Glied finden lehrt. Wenn Ursachen und Wirkungen, Waaren und ihre Preise, Arbeit und Lohn, Capital und Zinsen, u. s. w. aus ihren Verhältnissen gegen einander bestimmt werden sollen: so ist klar 1) daß die verschiedenen Wirkungen sich gegen einander verhalten, wie ihre Ursachen, auch daß nach §. 8. 1. eigentlich nur Ursachen mit Ursachen, Wirkungen mit Wirkungen verglichen werden können; 2) daß nach §. 127 $\frac{b}{a} = e$ eine unbenannte Zahl sey, womit p zu multipliciren ist; 3) daß das 4te Glied mit dem 3ten Gliede von einerley Art sey, wofern nicht nach §. 126. das erste und dritte verglichen sind, in welchem Fall das 2te und 4te von einerley Art sind.

4) Eigentlich ist dieser letzte Fall doch nur eine Verwechselung der Factoren, und es bleibt bey dem ersten Satze dieses §. Wenn z. B. 4 Pfund 8 rthl. kosten, und man fragt, wie viel 5 Pfund gelten: so setzt man, um des ganzen Exponenten willen, $4 : 8 = 5$ rthl $5 \cdot 2$ rthl statt $4 : 5 = 8$ rthl. $\frac{8 \cdot 5}{4}$ rthl; weil $\frac{8 \cdot 5}{4}$ rthl. $= \frac{5 \cdot 8}{4}$ rthl. (§. 12).

5) Wenn Brüche oder Größen von verschiedenen Theilen in den zu vergleichenden Gliedern vorkommen: so bringt man

 sie

sie auf Dinge von einerley Art. und vergleicht bey Brüchen, wie §. 31., nur die Zähler. 4 Ellen Tuch kosten 12 rthl., was kostet $\frac{1}{2}$ Elle? $4 : \frac{1}{2} = 8 : 1 = 12$ rthl. : x; und $x = \frac{12 . 1}{8}$ rthl. $= \frac{3}{2}$ rthl $= 1\frac{1}{2}$ rthl.

6) Zuweilen ist die Reduction der verschiedenen Theile auf die kleinsten nicht nöthig, alsdann nämlich, wenn man den Exponens ohne dieselbe doch finden kann. Z. B. 2 Pf. 3 Lt. kosten 5 rthl. 4 ggr., was kosten 6 Pf. 9 Lt.? Man sieht sogleich, daß von dem Verhältniß 2 Pf. 3 Lt. : 6 Pf. 9 Lt. der Exponens = 3 ist, also 1 : 3 = 5 rthl. 4 ggr. : 15 rthl. 12 ggr.

7) Kann allgemein das Verhältniß zweyer Glieder der Proportion durch 1 : e ausgedrückt werden, so daß e eine ganze Zahl ist: so hat man eine große Erleichterung im Rechnen, wenn man die kleinern Theile des 3ten Glieds so zerlegt, daß das kleinere Stück im größern enthalten ist. Exempel: 8 Lt. kosten 4 rthl. 18 ggr. 6 pf., was kosten 82 Pf.? hier ist $\frac{1}{4}$ Pf. : 82 Pf. $= 1 : 82 . 4 = 1 : 328 = 1 : e$ und 4 rthl. 18 ggr. 6 pf. $= 4$ rthl. $+ \frac{1}{2}$ rthl. $+ \frac{1}{4}$ rthl. $+ \frac{1}{48}$ rthl. also $1 : e = (4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{48})$ rthl : $4e + \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}e + \frac{1}{48}e$ rthl.

$$\begin{aligned}
4e &= 4 . 328 &&= 1312 \\
\tfrac{1}{2}e &= \tfrac{328}{2} &&= 164 \\
\tfrac{1}{4}e &= \tfrac{164}{2} &&= 82 \\
\tfrac{1}{48}e &= \tfrac{82}{12} = \tfrac{41}{6} &&= 6\tfrac{5}{6}
\end{aligned}$$

also 82 Pf. kosten $1564\frac{5}{6}$ rthl.

8) Zuweilen kann man sich in solchen Fällen noch leichter durch die Subtraction helfen; z. E. die Metze Gerste kostet 11 pf., was kostet der Scheffel oder 16 Metzen?

$1 : 16 = (12 - 1)$ ggr : x; und x = 16 ggr. — 16 pf. = 14 ggr. 8 pf.

§. 130. **Anmerkung über die sogenannte verkehrte Regel de tri.** Da in der Mathematik allgemein erwiesene Sätze ohne Ausnahme, so wie sie gelehrt worden sind, angewendet werden können: so kann es auch keine verkehrte

Regel

$\sqrt{14}$

3. 1. 2. 1.

$\frac{3}{1}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{15}{4}$

40 27525

75.19.61.139

75.19.8479

75.161101

45.13.23.

$\frac{15}{4}$ $\frac{449}{120}$ ~~1832~~ $\frac{13455}{3596}$ $\frac{403201}{107760}$ $\frac{12082575}{3229204}$

1 2 3 4 5

29.31

4. 807301

3987

27

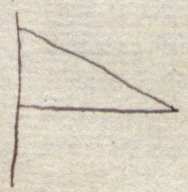
10788
40365
1209603
3232800

$dx\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}$

$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha x+x^3)}}$

$A+B\alpha+C$

$1x^2 - y^2$



$\int dx\sqrt{(1+\alpha x+x^3)}$ $\quad 1+x+xx+x^3$

$\int\frac{dx}{\sqrt{((1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x))}}$

$\int\frac{dt}{\cancel{tt+aa}} = \cancel{C+A.tg.}t$

$\varphi\ \alpha, \beta, \gamma$

$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$

$\int\frac{adt}{(aa+tt)^{3:2}}$

$\frac{1}{4}(zz\cancel{+}4az-5aa)$

$t = u \cancel{+} \frac{a}{u}$

$\frac{1}{4}(u^4 - 4aauu + 2aal\frac{uu+a}{C}$

$\frac{adu}{(u+\frac{aa}{u})^3}+\frac{aadu}{uu(u+\frac{a}{u})^3}$

$\int \cancel{uu+a}\ \frac{au\,du}{uu+a^2}$

$C-\frac{a}{uu+a}$

$\cancel{\int\frac{(a-uu)}{a+uu}u^3du}$

$z = y-a$

$uu = z$

$\frac{1}{2}\int(y-a)\,dy\ \frac{y-2a}{y}$

$\int u^3du\ \frac{uu+a}{uu+a}$ | $\cancel{\frac{1}{2}\int zdz\ \frac{z-a}{z+a}}$

$\frac{1}{2}\int y-3a+\frac{2aa}{y}$

$\int u$

$\frac{u^4}{4}$

$\frac{1}{4}(yy-6ay+2aaly$

$\sqrt{2}$

17.1153 79.

$\frac{1}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{17}{12}$ $\frac{41}{29}$ $\frac{99}{70}$ $\frac{239}{169}$ $\frac{577}{408}$ $\frac{1393}{985}$ $\frac{3363}{2378}$ $\frac{8119}{5741}$ p $\frac{19601}{13860}$ $\frac{47321}{33461}$ p

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

$\frac{114243}{80782}$ 3.113. $\frac{275807}{195025}$ 41.6727 = 7.961 25.29.269

39202 811

14 15 66922 13860 80782 94642 19601 114243 16238 3363 19601 27720 5741 33461

161564 33461 195025 228486 47321 275807 29807 7801 1970 1971 1969

$\frac{11.179.27.73}{2.5.7.197.199}$

18

$xx - 2x - 1$ $\dfrac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n}{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n} = \frac{\frac{1}{2}(-1)^n +}{3}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

2.11.11.27.27.73.73.179

179 − 1

390051 390049

43339 11 | 35459

55

19 | 2281

$a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n)$

$a + b + \sqrt{2}(a-b)$

= 1

$2a = \frac{\sqrt{2}}{4}$

1970 1969 174 36

59.601

$\frac{1}{1}$

551614 114243

4406053 2900903

10598869

$\frac{1}{2}(2,4)$

390050 80782 470832

0.3827 575 23

13.6 8.

36 60

258509/4 122

21

28

5.

299858 258509 41349

$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{27} + \frac{1}{73}$

$\frac{665857}{470832}$ p 1607521

$\frac{14}{7}$ $+ \frac{1}{179} + \frac{1}{197} + \frac{1}{199}$ 1521

11260142 3096550 1213 /25

6725 95

16 17

$195^2 = 38025000625$

975

38034750625

10598869

307367201 2 4

15.......

2.........

7

1331714 275807 1607521

$275^2 = 7562565124$

44385

7606950124

3477418 56 275807 39005

21197738

3265444118

827421 2482263 1379035

10757852035 0

43031408140

150609928490

15213900249 9

13707800965

27415601 93

3.

99 07

39401 2265

8877

$\frac{1}{27}$

61 3 33

$\frac{2741560193}{2151570407}$ | $\frac{347741856}{307367201}$ | $\frac{15213900249 9}{107578520350}$

11260142

35521 34

2434192992

347741856

$\frac{11260142}{10598869}$ | $\frac{41349}{258509}$

$2 + \frac{1}{nn}$ $r - \frac{1}{2rnn}$

$\sqrt{(rr - \frac{1}{nn})}$

1034036 11260142 12294178 299858

115 23 92 23 325 29

307767201

Regel de tri geben, wo man nöthig hätte, zwey Glieder des Verhältnisses verkehrt zu stellen. Die Fälle, wo man glaubt dieses thun zu müssen, erfordern immer die Theilung einer Größe (die man als ein Ganzes mit 1 bezeichnen kann) durch die gegebenen Glieder der Proportion. Folglich sind die Glieder immer als Nenner eines Bruchs anzusehen, dessen Zähler 1 ist. Dergleichen Fälle sind, wenn die Arbeit nach der gegebenen Zeit oder der Zahl der Arbeiter; Proviant, Mehl, Brodt oder Getränke ꝛc. nach der Zahl derer, die es geniessen, oder nach der Zeit, oder nach dem Preise; ein Stück Zeug oder sonst eine Größe nach verschiedenen Maaßen u. s. w. eingetheilt werden sollen, wie man aus folgenden Exempeln leicht sehen wird.

Wenn 4 Zimmerleute ihre Arbeit an einem Hause in 8 Wochen zu Stande bringen können, wie viel Zeit gebrauchen 6 Zimmerleute dazu? Man setze die Arbeit $= 1$, so ist $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{6}{24} : \frac{4}{24} = 6 : 4$ (§. 128.) $= 8 : x$, und $x = \frac{4 \cdot 8}{6}$ W. $= 5$ Wochen 2 Tage.

500 Soldaten haben Proviant auf 6 Monat; wie viel müssen abgehen, wenn damit 10 Monat soll gereicht werden? $\frac{1}{6} : \frac{1}{10} = 10 : 6 = 500 : 300$. Also 200 müssen abgehen, weil nur 300 Mann 10 Monat lang davon leben können.

Wenn der Berliner Scheffel Weizen 1 rthl. gilt, der dem Becker 1 rthl 14 ggr. angerechnet wird: so wiegt eine 3 Pfennigssemmel $12\frac{1}{2}$ Lt.; wie viel muß sie wiegen, wenn der Scheffel 2 rthl. gilt, der ihm zu 2 rthl. 17 ggr. angerechnet wird. Hier ist der Scheffel nach den Preisen 38 ggr. und 65 ggr. zu vertheilen.

also $\frac{1}{38} : \frac{1}{65} = 65 : 38 = 12{,}5$ Lt. : x Lt.,

und $x = \frac{12{,}5 \cdot 38}{65} = \frac{2{,}5 \cdot 38}{13} = 7\frac{4}{13}$ Lt.

Für die Länge C (§. 9.) sind 2 Maaße B und A gegeben, die sich wie 3 : 2 verhalten; wenn nun $C = 4B$, etwa 4 Ellen des größern Maaßes: wie viel beträgt C nach dem kleinern Maaße A?

$\frac{C}{3}$:

$\frac{C}{3} : \frac{C}{2} = \frac{2C}{6} : \frac{3C}{6} = 2 : 3$ (§. 128.) $= 4$ Ellen des Maaßes B : x, und $x = \frac{3 \cdot 4}{2}$ A $= 6$ Ellen des Maaßes A.

Wie viel sind 25 Brabanter Ellen nach Leipziger Ellen, wenn die Brab. Elle zur Leipziger sich verhält, wie $6 : 5$? Die auszumessende Länge sey $= C$, so ist $\frac{C}{6} : \frac{C}{5} = 5 : 6$ $= 25$ Brab. : 30 Leipz.

§. 131. **Lehrsatz. Wenn in einer geometrischen Proportion** $a : b = p : q$; **so ist auch** $a + b : a = p + q : p$; **und** $a + b : b = p + q : q$; **imgleichen** $a - b : a = p - q : p$; **und** $a - b : b = p - q : q$.

Beweis. Weil $aq = bp$; so ist, wenn man auf beiden Seiten ap oder bq addirt, oder jenen Werth davon subtrahirt, 1) $ap + aq = ap + bp$, oder $(a + b)p = (p + q)a$; 2) $ap - aq = ap - bp$; oder $(a - b)p = (p - q)a$; 3) $aq + bq = bp + bq$; oder $(a + b)q = (p + q)b$; und 4) $aq - bq = bp - bq$; oder $(a - b)q = (p - q)b$; woraus nach §. 125. die angezeigten Proportionen sich leicht machen lassen.

§. 132. Eben das gilt, wenn 3 Zahlen $a : b : c$ sich verhalten wie $p : q : r$; alsdann nemlich ist $a : b = p : q$; also 1) $aq = bp$, ferner $b : c = q : r$; folgl. 2) $br = cq$, und $a : c = p : r$; folgl. 3) $ar = cp$: also $ap + bp + cp = ap + aq + ar$, oder $(a + b + c)p = (p + q + r)a$; also $a + b + c : a = p + q + r : p$.

Eben so beweiset man, daß $a + b + c : b = p + q + r : q$, und $a + b + c : c = p + q + r : r$.

Es sey die Zahl $n = p + q + r$ gegeben: so ist $\frac{an}{a + b + c} = p$; $\frac{bn}{a + b + c} = q$; und $\frac{cn}{a + b + c} = r$. Man darf also nur $\frac{n}{a + b + c}$ erst berechnen und hernach die Zahlen a, b, c damit nach einander multipliciren, um die gesuchten Werthe zu erhalten. Man sieht leicht, daß bey noch mehrern Theilen diese Rechnungsart anwendbar ist.

$\frac{17}{120}$ $\frac{53}{360}$ 2520 100·8 25 15

1415926535
353981633
2831853
356813486
356813486
3924948·35

π

$3\frac{17}{120} = 3,14167 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{8}$

$3\frac{785}{5544} = 1 + \frac{1}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{9}{11} = 3.141594$

3925 785 3

142857142 $3 - \frac{1}{792}$
625 $2\frac{37}{99}$
363636363 $\frac{818}{55}$
141593506

Bestimmung der zwei ersten Coefficienten des Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\sin\phi^2)}} = a + b\cos 2\phi - c\cos 4\phi - d\cos 6\phi \ldots$$

$$a = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{2}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16}\,\frac{4.3}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,\frac{1}{64}\,\frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{1.3.5.7.1}{8.7.6.5}\ldots$$

$$\cancel{= 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{3}{1.2.3.4} - \frac{5}{1.2.3.4.5.6}}$$

$$\cancel{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\frac{1}{2}\frac{3.3}{1.2}} - {}^{1.2} = 1 - \frac{1.1}{2.2} + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} - \&c\ldots$$

$$1 - \frac{[2]^2}{2^4} + \frac{[4]^2}{[2]^4 2^8} - \frac{[6]^2}{2^{12}[3]^4} + \frac{[8]^2}{2^{16}[4]^4}\ldots$$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\,(0\ldots1) \times \frac{2}{\pi} = \frac{2A}{\pi} = 0,\ 83462$$ 27

$$b = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,\frac{3.3}{2.6} + \frac{1}{4}\,\frac{3.3}{2.6}\,\frac{5.5}{4.8} + \&c.$$

$$= 2a - \frac{2}{A}$$

$$= \qquad 1 - 1$$

$$\frac{x - \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{10080}x^9}{e^{\pi xx}}$$

397 + 2

13625

9781

1199 14965

8164

10622 8464

9781

18245 21609 9781

9 19481 31390

38809 430

48590 197

8849

18636

1.
1. 1
1. 3. 1
1. 6. 7. 1
1. 10. 25. 15 1
1. 15. 65. 90 31 1
1. 21. 140. 350 301 63 1
1. 28. 266 1050 1701 966 127 1

	1	
1	5.	2
2	25.	12
3	109	47
4	22	~~38~~ 19
5	89	3
6	41	31
7	73	~~64~~ 1
8	86	25
9	94	65
10	53	17
11	38	21
12	97	93
13	107	97

$$\boxed{\begin{aligned}&17\,069722\\ &= 2197^2 + 177.263^2\\ &= 7.1559^2 + 195.17^2\end{aligned}}$$

$\int z dx$

15129 10070

24910 515

Σx

10201

9781 4.04

19982 39204

489 84

194 196

9409 18430

9781

19190 8649

23353

2678419 8534861 Prim.

8534861

7
0, 3

$$xy = \Delta z$$

$$x \Sigma y$$

$$x \Delta y \qquad x dy$$

$$xy + y\Sigma$$

$$\int xy dx = yx - \tfrac{1}{2}x^2\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{6}\frac{d^2y}{dx^2}x^3 \ldots$$

$$\Sigma y \Delta x = \cancel{yx - \tfrac{1}{2}x^2\frac{\Delta y}{\Delta x} + \tfrac{1}{6}x^3\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}} \ldots$$

$$= yx - \tfrac{1}{2}xx\Delta y + \tfrac{1}{6}x^3\Delta^2 y$$

$$+ \tfrac{1}{2}y$$

N3. N59

$A = 17\,069722$

$\cancel{\quad} = xx + 177yy$

$x < \cancel{2315}\ 4140$

$x \equiv \pm 45$ M 118

$x \equiv \pm 1, 4$ M 9

I. 118a + 45

7.	7.	7	11.	11.	11	7.	7.	7	11	7	11	7	
0.	1.	4.	5.	6.	9.	10.	11.	14.	15.	16.	19.	20.	21
7.	11.	11.	13.	7	3.	7.	13.	7	3.	13	~~17~~	7.	7

17.	13	7	7.	11	11	13	7
24.	25.	26.	29.	30.	31.	34.	35
7.	~~17~~	11.	11	3.	7.	7.	7

Nullus superest

$\Delta y\, \Delta x$

$\Delta y - \tfrac{1}{2}$

$$\Sigma z = zx - \tfrac{1}{2}x^2 \frac{dz}{dx} + \tfrac{1}{6}x^3\frac{d^2z}{dx^2}\ldots$$

$$+\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{6} \qquad -\tfrac{1}{30}$$

118
1
1298
45
1343
169 1849
118
1803649
17069722
... 258747
34147
5824
17069722
43956 9
16630153 + 281867
481191 939
1934

118
6
708
45
663

Excl.	A	$\frac{A}{f}$	$\frac{t}{g}$	Excl.
5	2	2	N	1, 4
7	5	5	R	0, 3, 4
11	10	10	R	0, 2, 5, 6, 9
13	7	7	N	2, 4, 6, 7, 9, 11
17	5.	5	N	1. 2. 3. 8. 9. 14. 15. 16
19				

1. 4. 5. 8. 10
7. 6. 2. 1. 4
0. 1. 3. 5. 9. 12
0. 3. 6
0. 1. 4
1. 4. 5. 8. 10
4. 5. 7. 9. 10.
1. 2. 4. 6. 7
1. 3. 6. 9. 10
7. 10. 9. 8 5
0. 2. 4. 8. 10. 12

Quare

8534861 est ~~compositus~~ Primus

§. 133. Anmerkung. Die Formeln §. 131 u. 132. dienen zur Erklärung der Gesellschafts-Rechnung. z. E.

1) 500 rthl sollen nach dem Verhältniß 3 : 4 vertheilt werden; also p + q (§. 131.) = 500, und a + b = 7, giebt $p = \frac{3 \cdot 500}{7}$ rthl und $q = \frac{4 \cdot 500}{7}$ rthl.

2) 3 Kaufleute haben 1000 rthl., 800 rthl. und 450 rthl. beygetragen, womit 4000 rthl. erworben sind. Wie groß ist der Antheil eines Jeden? Hier ist $a : b : c = 1000 : 800 : 450$, also $p = \frac{20 \cdot 4000}{45} = 1777\frac{7}{9}$; $q = \frac{4000 \cdot 16}{45} = 1422\frac{2}{9}$; und $r = \frac{9 \cdot 4000}{45} = 800$ rthl.

3) Ein Kaufmann hat zum Handel 1000 rthl. seit $2\frac{1}{4}$ Jahren angelegt, ein zweyter in eben denselben 2500 rthl. seit 2 Jahren, und ein dritter 3000 rthl. seit $1\frac{1}{2}$ Jahre, und mit Allem ist 10520 rthl. erworben; wie viel bekommt jeder? Auflösung. Man suche hier erst die 3 Einlagen in den kleinsten Zahlen und multiplicire sie mit der Zeit. Diese Produkte, in den kleinsten Zahlen ausgedruckt, geben die Verhältnisse a : b : c. Also da alle 3 Zahlen durch 500 theilbar sind: so verhalten sich die Einlagen wie 2 : 5 : 6; und jede, mit der Zeit multiplicirt, giebt $\frac{2 \cdot 9}{4} : 5 \cdot 2 : \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{4} : \frac{40}{4} : \frac{36}{4} = 9 : 20 : 18 = a : b : c$, folglich $a + b + c = 47$; $p + q + r = 10520$. Also $p = \frac{10520 \cdot 9}{47}$; $q = \frac{10520 \cdot 20}{47}$ und $r = \frac{10520 \cdot 18}{47}$.

4) Ein Amt, dazu 4 Dörfer A, B, C und D gehören, deren Abgaben in dem Verhältniß 5 : 4 : 3 : 3 stehen, soll 6000 rthl. aufbringen: so ist der Beytrag für A $= \frac{6000 \cdot 5}{15} = 2000$ rthl., für B $= \frac{6000 \cdot 4}{15} = 1600$, für C $= \frac{6000 \cdot 3}{15} = 1200 =$ D. Nun hat A 6 Ackerleute, 6 Halbspänner, 12 Kothsassen, deren Beyträge sich verhalten wie $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$. Man frägt, wie viel jeder in diesem Dorfe beyträgt?

Alle Ackerleute geben a = 6, alle Halbspänner $b = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4$ und alle Kothsassen c = 6, also $a + b + c = 16$ und der Beytrag aller Ackerleute ist $= \frac{2000 \cdot 6}{16}$ und eines

Ackermanns $= \frac{2000}{16} = 125$ rthl., folgl. der Beytrag eines Kothsassen $= 62\frac{1}{2}$ rthl., der Beytrag aller Halbspänner $= \frac{2000 . 4}{16}$, und eines einzelnen $= \frac{2000 . 4}{16 . 6} = 83\frac{1}{3}$ rthlr.

5) Es mischt jemand 2 Anker Franzwein, jeden zu 5 rthl., ferner 1 Anker Franzwein zu $8\frac{1}{2}$ rthl. und $\frac{1}{8}$ Brantwein zu 1 rthl. Da man zusammen $3\frac{1}{8}$ Anker hat, und die Kosten $19\frac{1}{2}$ rthl. betragen: so ist der Preis $\frac{19,5}{3+\frac{1}{8}}$ $= \frac{156}{25}$ rthl. also ein bloßes Divisions-Exempel.

6) Wäre aber der Preis des Gemischten festgesetzt: so ist die Untersuchung, wie viel von jedem zu nehmen, schwerer. Dies ist eigentlich die Vermischungs- oder Alligations-Rechnung. Man nehme zu dem Ende α) 2 Dinge von verschiedenem Preise, die zusammen die Größe oder Menge q geben sollen, deren Preis $= c$ ist. Vom Theurern sey dazu die Menge x, und vom Wohlfeilern $q - x$, genommen. Man suche von jedem den Preis. Hätte q des Theurern den Werth a, und q des Wohlfeilern den Werth b: so findet man

1) $q : x = a : \frac{ax}{q}$ den Preis des theurern Theils,

2) $q : q - x = b : \frac{bq - bx}{q}$ den Preis des wohlfeilern Theils.

Beide Preise zusammen müssen dem Werth c gleich seyn; oder $c = \frac{ax + bq - bx}{q}$; also $qc = ax + bq - bx$, oder auch $qc - bq = ax - bx$, Dies giebt $x = \frac{(c - b)q}{a - b}$

Exempel. 1 Anker Wein gilt 12 rthl., ein anderer 8 rthl. Man verlangt einen für 9 rthl. aus der Mischung beider Sorten. Hier ist $q = 1$ Anker, $a = 12$ rthl., $b = 8$ rthl., $c = 9$ rthl., also $x = \frac{(9-8).1}{12-8} = \frac{1}{4}$ Anker, also $q - x$ $= \frac{3}{4}$ Anker.

Man braucht dies auch bey Gold- und Silber-Mischungen. Z. B. Man hat 2 Sorten Silber, 15 und 10löthiges, d. i. von dem ersten enthält die Mark ($= 16$ Loth,) an Silber 15 Loth und 1 Lt. Kupfer; vom andern die Mark

10 Lt.

~~#~~ . 53. 50. 73. 77

. 132. 46. 69

9929	152	9973	46	9931	69	9967	39
9857	60	9949	50	9923	75	9887	75
9833	104	9901	62	9907	45*	9871	49
9817	48	9829	42	9883	51	9839	91
9769	52	9781	50	9859	63	9791	119
9721	92	9749	162	9851	135	9767	89
9697		9733		9811	63	9743	
9689		9677		9803		9719	
9649		9661		9787		9679	
9601		9629		9739		9631	
9756,2		9788,2		9849,4		9789,4	

78,3

$'a$	a	a'	a''
$'b$	b	b'	b''
$'A$	A	A'	A''
$'B$	B	B'	B''

$$A = a+b$$
$$B = a-b$$
$$A' = a = \tfrac{1}{2}('a + 'b)$$
$$B' = \sqrt{(aa-bb)} = \tfrac{1}{2}('a - 'b)$$
$$A'' = \tfrac{1}{4}(''a + ''b)$$
$$B'' = \tfrac{1}{4}(''a - ''b)$$

2

Problema

Designantibus P, Q functiones datas ipsorum x, y ~~in~~ quaeritur quae esse debeat indoles functionis ψ, ut $Q\psi P$ fiat functio ipsius x tantum

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)\psi P + Q\psi' P\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$$

28

Quaeratur itaque quae

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)\frac{1}{Q} \qquad \frac{1}{\left(\frac{dP}{dy}\right)/P}$$

debet igitur esse functio ipsius P. Quae si per $f : P$ indicetur

20. 44
40. 102
60. 166

erit $\dfrac{\psi' :}{\psi :} = f :$

adeoque $\psi = e^{'f :}$

0,3888961	0,025313952
1,70710678	0,29289322
1	0,70710678
0,8535533912	0,8408964152

6,7 1 2

2680

8535533912
8408964152
16944498064
12656976

16944

147
1,707

0,5000000
0,0428932 19
0001 60199
0,543053418

9769 257 10730
3481 67017
13250 9769 3136
10 10730 76850 9769
12905
370 1450
445

10858 44511
109 9769
8 54250
61

9811

1
5.2
25.17

1
1 5.1
2 25 16
3 106 59
4 74
5 29 27
7.6 89 33
122 33

1055 + 4

10233
379 + 44

12150
15 12558
13 546

11685 11193
34 20
285 12

123
28 13113
95 423
10710
630

9749

0. 1
3.1
9.4
27.22
81.49
5. 50. 1
65.64
71. 7
46.39
91.53
10. 41. ~~77~~38
95. 44
102 65
34 31
102. 31
15. 35. 4
93 89
31 27
93 58
47 36
20. 70. 11
63 59
21 17
7 3

5. 1
13. 1
7. 3
13230

$2(5)+(2)\equiv 5$

$(5)+(13)+6\equiv 0$

$(5)+(7)+15\equiv 0$

$(13)-(7)\equiv 9$

$(5)+(2)-(7)\equiv 20$

$(5)\equiv -38$

$(2)\equiv 81$

$(13)\equiv 32$

$(7)\equiv 23$

$(17)\equiv 68$

$(19)\equiv 135$

$(23)\equiv 73$

30260
1780

10100

9811

1
1 5 2
2 25 17
3 79 8
4 44 1
5 53 43
6 52 11
7 71 22
8 29 7
9 68 61
10 89 54
12 89 ~~104~~ ~~89~~35

4875 404
2
7364 1849
9811 9811
17380 11660 18460
1420
13780
9820 10295 260
4 316
145
11036 55180
89
39665 620
244

10 Lt. Silber und 6 Lt. Kupfer. Nun will man aus beiden 13löthiges machen; wie viel nimt man von jedem? $q = 1$ Mark, $a = 15$, $b = 10$, $c = 13$; also vom ersten $\frac{(13-10)1}{15-10} = \frac{3}{5}$ Mark, und also vom zweyten $\frac{2}{5}$ Mark. Daß dies 13löthiges gebe, erhellet so:

$$1 \text{ Mark} : \tfrac{3}{5} \text{ Mark} = 15 \text{ Lt} : \frac{15 \cdot 3}{5} = 9 \text{ Lt.}$$

$$1 \text{ Mark} : \tfrac{2}{5} \text{ Mark} = 10 \text{ Lt} : \frac{10 \cdot 2}{5} = 4 \text{ Lt.}$$

Beides giebt also 13 Loth Silber auf die Mark.

β) Sind mehrere, z. B. 3 Sorten: so mische man 2 davon nach Belieben und suche (nach 4) den Preis des Gemischten. Diesen setze man $= b$, und verfahre alsdann wie vorher. Eben so verfahre man bey mehrern Sorten, so daß man die zu mischenden Dinge immer auf zwey Sorten bringet.

§. 134. **Lehrsatz. Ganze Proportionen werden zusammen gesetzt, indem man die unter einander stehenden Glieder multiplicirt.**

Auflösung. Es sey

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ m : n = p : q \\ \hline \text{so ist } am : bn = cp : dq. \end{array}$$

Denn $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ und $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$, folgl. $\frac{b}{a} \cdot \frac{n}{m} = \frac{d}{c} \cdot \frac{q}{p}$ (§. 17. 2. und §. 30. 2.) daher $am : bn = cp : dq$.

§. 135. Zusatz. Ist $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$: so hat man $\frac{b^2}{a^2} = \frac{dq}{cp}$; und ist auch $\frac{d}{c} = \frac{q}{p}$; so ist $\frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2}$; oder $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, folglich auch $\sqrt{a^2} : \sqrt{b^2} : \sqrt{c^2} : \sqrt{d^2}$.

Man sieht leicht, daß dies auch für höhere Potenzen gilt: also wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a^m : b^m = c^m : d^m$; oder wenn $A : B = C : D$ diese Potenzen ausdrückt: so ist $\sqrt[m]{A} : \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{C} : \sqrt[m]{D}$.

§. 136. Ist $a : b = c : d$;
und $m : n = d : e$,

so ist $am : bn = c : e$. Denn $d = \frac{bc}{a}$

also $e = \frac{nd}{m} = \frac{nbc}{ma}$

Eben so bey mehreren

$a : b = c : d$
$m : n = d : e$
$p : q = e : f$
$r : s = f : h$

$ampr : bnqs = c : h$, welches auch, kürzer, so erhellet:

$$\frac{bnqs}{ampr} = \frac{defh}{cdef} = \frac{h}{c}$$

§. 137. Man nennt dieses die Ketten-Regel (Regula multiplex), wobey es hauptsächlich darauf ankommt, daß das letzte Glied des vorhergehenden Verhältnisses, das erste des folgenden darunter stehenden wird. In den neuern Zeiten pflegt man sich ~~Graumanns und Reeses~~ Thonier de Clairemonde Methode zu bedienen, und, indem man die Ursach der Wirkung gleich setzt, aus den Proportionen Gleichungen zu machen, in welchen man, linker Hand, mit der Fragezahl x, d. i., mit der Zahl, die man durch Rechnung suchen soll, anfängt, und ihren gleichen Werth rechter Hand setzt. Mit diesem fängt man die folgende Gleichung wieder an, und fährt so lange fort, bis man rechter Hand wieder auf eine Größe kömmt, die mit x von einerley Art ist. Kommen Brüche in der Angabe vor: so reducirt man sie erst auf ganze Zahlen.

1) Was kostet die Leipziger Elle, wenn die Brabanter 3 holl. Gulden, und $5\frac{1}{4}$ fl. holl. = 2 rthl. 20 ggr. Convent. Geld, also 63 fl. = 34 rthl Conv. Geld betragen?

x rthl. = dem Werth von 1 Lpz. Elle
6 l. E. = 5 brab. Ellen, (§. 128)
1 br. E. = dem Werth von 3 fl.
63 fl. = 34 rthl.

$6 . 63\ x = 5 . 3 . 34$

$x = \frac{5 . 3 . 34}{6 . 63}$ rthl. $= \frac{5 . 17}{63}$ rthl.

Setzt

- 9721   3. 10250   44690   46585   38885

0. 1   17290   1090   80

5.2   24765   605   1+4.9721

25.2   1165   632   26

82.23   385   15803

109 31   4725   27   23104

5. 29 20   1   32825

77 98   12025   325

101 51   925

65 43   7   3969

13 4   13690

10 65 17

87 11

74

$$1.\quad \frac{a.a-1.a-1.a-2}{2}$$

$$1 - x + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{36} + \&c = \varphi$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \&c = \psi$$

$$\varphi' = x - \psi : x$$

$$\psi' = \varphi$$

$$\varphi(n+x) = \varphi - \frac{\psi}{n}$$

$$\varphi\ \frac{A}{n^a} + \frac{B}{n^{a+1}} + \frac{C}{n^{a+2}} + \&c$$

$$+\psi\ \frac{A'}{n^a} + \frac{B'}{n^{a+1}}$$

$$\varphi\ \frac{A'}{n^a} + \frac{B'-aA}{n^{a+1}} + \frac{C'-b.B}{n^{a+2}}$$

$$+\psi\ \frac{-aA'-A}{n^{a+1}} + \frac{-bB'-B}{n^{a+2}} + \&c$$

$$\varphi' = -\frac{\psi}{n}$$

$$\varphi'' = \frac{-\varphi}{n} + \frac{\psi}{nn}$$

$$\varphi''' = \frac{+\psi}{nn} + \frac{2\varphi}{nn} - \frac{2\psi}{n^3}$$

$$\varphi^{IV} = \frac{+\varphi}{nn} - \frac{4\psi}{n^3} - \frac{6\varphi}{n^3} + \frac{6\psi}{n^4}$$

+2
+1 − 2
+1 − 6
−4 + 6
−6 + 24
−1 + 18 − 24
−1 + 36 − 120
+ 9 − 96 + 120
+12 − 240 + 720
+1 − 72 + 600 − 720
+1 − 120 + 1800 − 5040
− 16 + 600 − 4320 + 5040

$[n] \quad \frac{n-1}{n}[n]$

$\pm[n] \mp n-1\,[n-1]$

$[2n+1] \; ; 2n[2n]$

3	6	6	24	
4	36	30	54	30
5	120	84	96	42
6	300	180	150	54
7	630	330		

$(a) + \overline{a-1}^2.a$
$+ \overline{a-1}.a^2$

$(a+1) - a-1.2a-1.a$

2	1
9	3
24	6
50	10
90	15

(29)

ist $A = 1 + \frac{\mu.\mu+1}{2.2} g^2 + \frac{\mu.\mu+1.\mu+2.\mu+3}{2.\ 2.\ 4.\ 4} g^4 + \&c$

$B = \frac{\mu g}{2} + \frac{\mu.\mu+1.\mu+2}{2.2.4} g^3 + \frac{\mu \ldots \mu^4}{2.2.4.4.6} g^5 + \&c.$

und $R = \frac{1}{2}\pi$ so ist

I. $A = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}(1-g\sin\frac{1}{2}R)^{-\mu} \\ +\frac{1}{2}(1-g\sin\frac{1}{2}R)^{-\mu} \end{array} \right\}$ $\frac{1}{2}B = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}R(1-g\sin\frac{1}{2}R)^{-\mu} \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}R(1+g\sin\frac{1}{2}R)^{-\mu} \end{array} \right\}$

II. $A = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{4}(1-g\sin\frac{1}{4}R)^{-\mu} + \frac{1}{4}(1-g\sin\frac{3}{4}R)^{-\mu} \\ +\frac{1}{4}(1+g\sin\frac{1}{4}R)^{-\mu} + \frac{1}{4}(1+g\sin\frac{3}{4}R)^{-\mu} \end{array} \right\}$

$\frac{1}{2}B = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{4}(1-g\sin\frac{1}{4}R)^{-\mu}\sin\frac{1}{4}R + \frac{1}{4}\sin\frac{3}{4}R(1-g\sin\frac{3}{4}R)^{-\mu} \\ -\frac{1}{4}(1-g\sin\frac{1}{4}R)^{-\mu}\sin\frac{1}{4}R - \frac{1}{4}\sin\frac{3}{4}R(1+g\sin\frac{3}{4}R)^{-\mu} \end{array} \right\}$

&c. semper propius.

$g = \frac{1}{2.2}g^2 + \frac{1.2.3}{2.2.4.4}g^4 + \frac{1.2.3.4.5}{2.2.4.4.6.6}g^6 \ \&c.$

$\frac{dg}{dg} = \frac{1}{2}g + \frac{1.2.3}{2.2.4}g^3 + \frac{1.2.3.4.5}{2.2.4.4.6}g^5 \ldots =$

$\frac{1}{2}g + \frac{1.3}{2.4}g^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}g^5 \ldots = e^{a\sqrt{-1}}$

$\frac{(1-g^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{g}$

$\frac{1}{2a} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}.x \sin\frac{R}{\pi}}$

$\int \frac{dg}{g\sqrt{(1-gg)}} - \frac{dg}{g}$ cosin $\frac{1}{2}x$

sit $g = \frac{1}{x}$

$\int. \frac{dx}{x} - \frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$

$= lx - l(x - \sqrt{(xx-1)})$

$= l\frac{1}{1-\sqrt{(1-gg)}}$

Setzt man eben dieses in Proportion

so ist $6 : 5 = 3$ fl. : y fl.

$63 : 34 = y : x$

$6 . 63 : 5 . 34 = 3$ fl. : x rthl.

$x = \frac{5 . 34 . 3}{6 . 63}$ rthl.

2) Wie viel sind 723 Dukaten in Hamburger Banco-Thalern, wenn der Dukaten 7 mk. 2 schill. Cour. $= 7\frac{1}{8}$ mk., also 8 Dukaten $= 57$ mk. C. und die Lagio von Banco gegen Cour. $18\frac{3}{4}$ p. C., also $118\frac{3}{4}$ mk. Cour. $= 100$ mk. B. oder 475 mk. Cour. $= 400$ mk. Banco, betragen?

x rthl. B. $= 723$ Duk.

8 Duk. $= 57$ mk. Cour.

475 mk. C. $= 400$ mk. Bco.

3 mk. B. $= 1$ rthl. Bco.

$x = \frac{723 . 57 . 400}{8 . 475 . 3}$ rthl. Bco.

In Proportionen stehen die Glieder folgendergestalt:

8 Dukaten : 723 Duk. $= 57$ mk. C. : z mk. Cour.

475 mk. C. : 400 mk. Bco. $= z$ mk. C. y mk. Bco.

3 mk. : 1 rthl. $= y$ mk. : x rthl. Bco.

$x = \frac{723 . 400 . 57}{8 . 475 . 3} = 723 . 2 . = 1446$ rthl. Bco.

3) Wenn die Dukaten in Hamburg a 2 rthl. Banco gerechnet, $\frac{1}{4}$ p. C. besser als Banco, also 50 Duk. $= 100\frac{1}{4}$ rthl. Banco, oder 200 Duk. $= 401$ rthl. Banco sind, und der Louisd'or $= 10$ mk. $13\frac{1}{2}$ schill. $= 173\frac{1}{2}$ sch., also 2 Lsd'or $= 347$ sch. Banco; wie viel p. C. differiren die Duk. zu $2\frac{3}{4}$ rthl. leicht Geld gerechnet von den Lsd'or zu 5 rthl. leicht Geld? Man suche den Werth von 100 rthl., den Dukaten zu $2\frac{3}{4}$ rthl. gerechnet, in Lsd'or-Geld: so findet sich die Differenz von selbst; also

x rthl.

x rthl. in Ld'or	=	100 rthl. in Dukaten,
11 rthl. in Duk.	=	4 Duk.
200 Duk.	=	401 rthl. Banco,
1 rthl. Banco	=	48 schl. Banco,
347 sch. Banco	=	2 Ld'or.
1 Ld'or	=	5 rthl. leicht Geld.

381700 x = 38496000 rthl. in Ld'or.

$x = \frac{384960}{3817}$ rthl. Ld'or = 100,854 rthl. in Ld'or.

also auf 100 rthl. 20 ggr. oder beynahe 41 sch. Unterschied.

Die Proportionen sind:

11 rthl. : 4 Dukaten	=	100 rthl. : z Duk.
200 Duk. : 401 rthl. Bco.	=	z Duk. : u rthl. Bco.
1 rthl. B. : 48 sch. Bco.	=	u rthl. Bco. : r sch. Bco.
347 sch. Bco. : 2 Ld'or	=	r sch. Bco. : s Ld'or.
1 Ld'or : 5 rthl.	=	s Ld'or : x rthl.

11.200.347 : 4.401.48.2.5 = 100 rthl. Duk.=Geld : x rthl. Ld'or=Geld und $x = \frac{4.401.48.5.}{11.347}$ rthl.

Man nennt solche Rechnungen Gewinn- und Verlust-Rechnung, auch Wechsel-Abitragen, wobey der Ansatz durch die verschiedenen Geld-Sorten und Wechsel-Course der Städte, auch durch die Spesen oder Unkosten zwar weitläuftiger, aber an sich nicht schwerer gemacht wird, so daß jeder, der dieses versteht, sich aus den Anweisungen practischer Schriftsteller leicht weiter unterrichten kann. Eben das gilt von den übrigen Handelsrechnungen, Thara- Fusti- Zins- Zeit-Rechnung u. s. w., die jeder sogleich verstehen wird, der die hier vorgetragene Theorie gefaßt hat und jene Rechenbücher-Sprache versteht. Folgende Grundsätze aber müssen in vielen Geschäften des Lebens, selbst in der angewandten Mathematik und Naturlehre, gewußt werden.

§. 138. 1) Wenn einerley Ursach C gleichförmig fort wirkt: so verhalten sich ihre Wirkungen E und w wie die Zeiten; oder E : w = T : t

2) Wenn 2 Ursachen C und c gleichförmig und gleich lange Zeit t wirken: so verhalten sich ihre Wirkungen w und e wie die Ursachen w : e = C : c

3) Beyde Proportionen zusammen gesetzt geben E : e = CT : ct; oder die Wirkungen verhalten sich wie die Produkte aus ihren Ursachen und der Zeit der Wirkung.

Also

$$\frac{l(1+x)}{1+x} - \frac{l(1+2x)}{1+2x} + \frac{l(1+3x)}{1+3x} \ldots =$$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$

$x - \frac{3}{2}xx -$

~~gibt nach Wolfs Methode den Nenner $\frac{1}{4}x$ welches wohl...~~

~~...falsch ist~~

$1 - 4 + 9 - 16 + 25$

$+3 - 12 + 27 - 48$

$+3 - 12 + 27$

$+1 - 4$

$\frac{x}{1+x} - \frac{2x}{1+2x} + \ldots = \xi$

$\int \xi dx = x - l(1+x) \quad \frac{xx}{1+x} - \frac{4xx}{1+4x}$

$-2x \ldots$

$= \frac{1}{4}x -$

$\frac{l(1+x)}{1} - \frac{l(1+2x)}{2} + \&c \ldots$

$= x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

$- x + \frac{1}{2}.2xx - \frac{1}{3}.4x^3.$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{24}$

$l\frac{x+1}{x-1} - l\frac{2x+1}{2x-1} \quad \&c$

$1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{}$

$1 - 8 + 27 - 64$

$+4 - 32 + 108$

$+6 - 48$

$+4$

$1 - 4 + 1$

30

$\psi \frac{1}{2} =$

0,5
0031250
867
29
1

0,5032087
1,006417

0,3043478 2
261126
2240
19

4666

1.3.5.7
2.4.6.8 17
4

17

298 0222387695
2086 6256713865
1227154412

0.5
003125
81380208333333
29343882512092
1227154451
55879354
2699

0,503209443 169
1,006418886 13

503209443183

0.30434782608 6
261126
9333
2

0.30460988
1.006418888636

1.3110287 7
503209443
08078193

116415
34924
23283
2619

Also $Ect = eCT$, und $C : c = Et : eT$, und wenn $E = e$ also $CT = ct$, so ist $C : c = t : T$.

§. 139. 1) Bey gleichförmiger Bewegung, wo in gleichen Zeiten gleiche Räume zurückgelegt werden, wo also die Geschwindigkeit eines Körpers C ungeändert bleibt, verhalten sich die zurückgelegten Räume S und r wie die Zeiten T und t oder $S : r = T : t$.

2) Wenn 2 Körper mit verschiedener sonst gleichförmigen Geschwindigkeit C und c sich in der Zeit t durch die Räume r und s fort bewegen: so ist $r : s = C : c$.

3) Beyde Proportionen zusammen geben $S : s = CT : ct$; oder bey gleichförmigen Bewegungen verhalten sich die Räume, wie die Producte aus den Geschwindigkeiten. Auch ist $C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$.

§. 140. 1) Eine große Masse in Bewegung zu setzen, erfordert mehr Kraft, als eine kleine; und wenn beyden gleiche Geschwindigkeit C gegeben wird: so ist das Verhältniß der bewegenden Kräfte $V : K$ aus dem Verhältniß der Massen $M : m$ zu erkennen; oder $V : K = M : m$.

2) Wenn aber 2 Körper von einerley Masse m von verschiedenen Kräften K und v in Bewegung gesetzt werden, so erkennt man das Verhältniß $K : v$ aus dem Verhältniß der Geschwindigkeiten $C : c$, welche sie diesen Körpern ertheilen, also $K : v = C : c$.

3) Wenn daher Masse und Geschwindigkeit verschieden sind, so ist $V : v = MC : mc$, und $Vmc = vMc$.

§. 141. Zusatz. Eine leichte Anwendung davon ist die Bestimmung des Fuhrlohns, wenn sonst die Wege gleich gut sind, nach Verhältniß der Lasten und Länge des Weges. Wenn nämlich L und l die verschiedenen Lasten, S und s die verschiedenen Wege und P, ρ, und p die verschiedenen Preise des Fuhrlohns bedeuten, so ist

1) bey einerley Weg $P : \rho = L : l$,

2) für einerley Last l ist $\rho : p = S : s$;

folglich $P : p = LS : ls$, und $Pls = pLS$.

3) Sind

3) Sind die Wege nicht gleich gut, so verhalten sich die Preise wie die Güte der Wege. Je schlimmer die Wege, desto theurer das Fuhrlohn; also wenn W den schlimmern und w den bessern Weg bedeutet, so verhält sich bey einerley Last l, und Länge des Weges s

$$p : q = W : w.$$

Daraus folgt 4) $P : q = LSW : lsw$. Je größer die Last ist, je weiter und schlechter der Weg, desto größer ist das Fuhrlohn. Insgemein bestimmt die Anzahl der Pferde das Verhältniß der guten oder schlechten Wege $W : w$.

§ 142. Anmerkung. So wie §. 130, lassen sich häufig die Fälle für §. 138 bis 141 erklären, wie man schon §. 139 bemerkt hat. Z. B. 1) §. 141, bey gleich gutem Wege verlangt ein Fuhrmann 6 rthl. um 9 Centner 20 Meilen weit zu fahren, wie viel Cntn. wird er 15 Meilen weit für 8 rthl. fahren? Man suche nämlich zuerst, was in beyden Fällen das Fuhrlohn einer Meile kostet, und schließe alsdann: bey gleicher Weite und bey gleich gutem Wege verhält sich das Fuhrlohn wie die Lasten, also $\frac{6.1}{20} : \frac{8.1}{15} = 9$ Ct. : x Ct. Bringt man also $\frac{6}{20}$ und $\frac{8}{15}$ unter einerley Benennung: so kommt doch die Formel (§. 141. 2.) $Ps : pS = L : l$ heraus, nämlich $P = 6$ rthl., $S = 20$ Meilen, $L = 9$ Cntn. $p = 8$ rthl., $s = 15$ Meilen, $l = x$ Ct. $= \frac{20.8.9}{6.15} = 16$ Ct.

2) Die vorige Last, welche bey gutem Wege mit 3 Pferden fortgebracht werden konnte, erfordert bey schlechterem Wege 4 Pferde, wie viel kostet das Fuhrlohn? Die Formel $LSW : lsw = P : q$ in Werthen ausgedruckt, giebt $9.20.3 : 16.15.4 = 6 : q$;

$$\text{also } q = \frac{16.15.4.6}{9.20.3} = \frac{16.2}{3} = 10\tfrac{2}{3} \text{ rthl.}$$

3) Verlangt man eine große Geschwindigkeit, oder den Transport der Sache in kürzerer Zeit: so dient dazu §. 140, 3. $Vmc = vMC$, wobey jedoch zu merken, daß die Geschwindigkeit der Menschen und Thiere ihre bestimmten Grenzen habe. Ein Mensch, wenn er nichts trägt oder zieht, kann höchstens in einer Secunde sich durch 6

Fuß

Sinum $n.\,x =$

$$x\left(1+\frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}\pi^4}\right)\left(1+\frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}\cdot 16\pi^4}\right)\left(1+\frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}\cdot 81\pi^4}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\pi^4}\right)\cdots$$

$$\times \text{Prod. ex}\left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(mm+nn)^4\cancel{+(4mn)^4}}\left(\frac{x}{\pi}\right)^4+\frac{x^8:\pi^8}{(mm+n)^4\cancel{+(4mn)^4}}\right)$$

Sumtis pro m, n omnibus numeris integris inaequalibus.

$$:\ \cancel{\left(1+\frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\ \&c}\ \left(1+\frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\cdots$$

$$\left(1+\frac{4x^4}{\pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{81\pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{625\pi^4}\right)\cdots$$

$$\times \text{Pr. ex}\left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(mm+nn)^4}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^4+\frac{1}{(mm+nn)^4}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^8\right)$$

Sumtis pro m, n omnibus numeris imparibus inaequalibus

[similerum?]

$$\sin x = x\,\frac{1 - \frac{1}{60}x^4 - \frac{1}{10080}x^8 + \frac{1}{10080.11700}x^{12}}{1 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10080}x^8 + \frac{1}{1296000}x^{12}}$$

a
5a

Posito ~~denominatore~~ numeratore $= y$ erit

2 3.4.5 :2
~~6.7.8.2~~
6.7.8.9 :36

$$x = y + \frac{1}{60}y^5 + \frac{1}{10080}$$
$$- \frac{1}{720}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{10080}}{1 + \frac{1}{12} + p}$$

1.2.3.4. :2
5.6.7.8. :2

$$\frac{1 - \frac{1}{60} - \frac{1}{10080} + p}{1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{10080} + q} \qquad y + \frac{1}{60}y^5 - \frac{13}{10080}y^9$$

$$\frac{1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{120}}{1 + \frac{1}{12} + q}$$
$- \frac{1}{40} - \frac{1}{120}$
$+ \frac{1}{120}$

168
840

$\frac{1}{3600} - \frac{1}{5040}$

4
~~1440~~
3600 5040.

$+ \frac{1}{100800}$
$+ \frac{1}{1440}$ } $\frac{1}{-93600}$ } $- \frac{1}{14.13.12.600}$
$- \frac{11}{15600}$

$\frac{1}{3600} - 2p = z$
$\frac{1}{144} - 2p = 15z$
$\frac{1}{240} - 30p = 15z$

98 4
240.144.28
7

$\frac{1}{12600}$ 4596 5184 1
$\frac{1}{144} - \frac{1}{5040}$
$\frac{1}{2100}$ 2100 13125

31500, 4 5 227125

15840

132
1872
136

5
540
10080

$$\frac{73}{10080.12} + \frac{1}{432000}$$

3.3485482
4185685 9.84

$A = P = \frac{1}{12}$
$Q = \frac{1}{140}$

$$\frac{7328}{432000.28} \quad \frac{229}{27000.14}$$

$$\Sigma 3 = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{140} + \frac{1}{10080}\frac{1}{12} + 3q \quad 63$$
$$= -\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{2100} - \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{10080} + 3p$$

378
756
7938 28814000
229

$$(6 + \tfrac{1}{12} + 3Q)\,63 + 63\left(\frac{8}{100} + \frac{1}{60} + 3P\right) = 0$$

104
9
39
4914

10080 p } P
600 q } Q

$6 + \frac{1}{12}$
3600 3900 $+ \frac{3}{1800}Q$
+ 3024
+ 630 − 189 P
+ 3 P
$- \frac{1800}{13}$

$\frac{128}{13} = \frac{1}{192}P$

$P =$
$P = \frac{2}{3}$ 13 10080 600

1000.9.144

3768323
3598355
5,0,169968
4180830

2548
433

3198

$\frac{1}{13.1000.9.10080}$

50305697
68395
50237302
4186442

3904052
3398355
50305697
4192141

Fuß bewegen, und ein Pferd noch mal so weit. Soll aber die Kraft auf das vortheilhafteste angewandt werden: so darf man nur $\frac{4}{9}$ der Geschwindigkeit annehmen. Uebrigens sieht man leicht, wie die Formeln §. 138. 141. auch bey dem Ansatz nach Reeses Regel gebraucht werden können. Z. B. im vorigen Exempel ist $q = lsw$,

und $LSW = P$,

$$q = \frac{lswP}{LSW}. \quad q = \frac{16.15.4.6}{9.20.3}.$$

4) Ein Fuhrmann soll 36 Ctn. Waaren 30 Meilen weit fahren, 3 Centner um $7\frac{1}{2}$ Rthlr. Als er 8 Meilen gefahren, nöthigen ihn gewisse Umstände, 12 Ctn. abzuladen. Er fährt mit den übrigen 24 Ctn. 9 Meilen, worauf er wieder 8 Ctn. um den vorher bestimmten Lohn aufladet, und fährt damit an den bestimmten Ort. Wie viel hat er nun verdient?

Hätte er sämmtliche 36 Ctn. an Ort und Stelle gebracht, so bekäme er 90 Rthlr.; da er nur 8 Meilen weit sie bringt, nur $\frac{8.90}{30}$ rthl. $=$ 24 rthl. Für die andern 24 Ct. 9 Meilen weit, ist $LS : ls = P : p$ oder $36.30 : 24.9 = 90$ rthl. : 18 rthl. Für die letzten 32 Ctn. 13 Meilen weit, ist nach eben der Proportion $36.30 : 32.13 = 90 : 34$ rtl. 16 ggr. also sein ganzer Verdienst ist $24 + 18 + 34 + \frac{2}{3}$ rtl. $= 76\frac{2}{3}$ rthl., wenn das Abladen der Waare ihm allein zur Last fällt.

5) An einem Bau müssen 20 Arbeiter täglich 6 Stunden 15 Wochen lang arbeiten; wie viel Wochen brauchen dazu 36 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten. Es sey (§. 138.) $C = 20$; $c = 36$, $T = 15.6.6$ Stunden $t = x.6.8$ Stunden, nämlich x Wochen, jede zu 6 Tage und jeden Tag zu 8 Stunden gerechnet. Da $E = e$: so bleibt nur $CT = ct$ oder $20.15.6.6 = 36.x.6.8$; also $x = \frac{20.15.6.6}{36.6.8} = \frac{5.5}{4} = 6\frac{1}{4}$ Wochen.

6) A hat Geld nöthig, B leihet ihm 1000 rthl. auf $7\frac{1}{2}$ Monat, begehrt aber statt der Zinse, daß ihm A dem-

nächst

nächst 1500 rthl. auf so lange Zeit vorstrecke, daß er auch keine Zinsen dafür entrichtet. Wie lange kann B diese 1500 rthl. behalten? Die Capitale sind hier $C = 1000$, und $c = 1500$; $T = \frac{15}{2}$; t wird gesucht. Da $E = e$, so ist $\frac{CT}{c} = t$; oder $\frac{1000.15}{1500.2} = 5$ Monat.

7) 6000 rthl. haben in 6 Jahren 1440 rthl. Interesse gebracht, wie groß ist das Capital, das nach eben dem Zinsfuß in 1 Jahre 1000 rthl. Interesse giebt, und zu wie viel pro Cent stehen diese Capitale?
Hier ist $C = 6000$, $T = 6$ Jahr, E 1400; c unbekannt, $t = 1$ Jahr, $e = 1000$ rthl., also $\frac{eCT}{Et} = c = \frac{1000.6000.6}{1440.1} = 25000$ rthl., ferner sey $T = t$; $C = 25000$ und $E = 1000$, $c = 100$, e unbekannt, also $\frac{Ec}{C} = e = \frac{1000.100}{25000} = 4.$, oder das Capital steht zu 4 pro Cent.

8) Ein Bote geht täglich 4 Meilen, und hat 2 Tage voraus; ein anderer, der täglich 6 Meilen geht, soll ihn einhohlen, wenn wird das geschehen? Hier ist §. 139. 3. $S = s$, also $CT = ct$. Man setze $C = 6$, $T = x$ Tage, so ist $t = (x + 2)$ Tage, $c = 4$, folgl. $4.(x+2) = 6.x$. oder $4x + 8 = 6x$, oder $8 = 2x$, und $x = 4$ Tage.

Reihen oder Progressionen.

§. 143. Erklärung. Wenn in einer Proportion die beyden mittlern Glieder gleich sind, so heißt sie stätig (continua), daher ist $a - a + d = a + d - a + 2d$ eine stätige arithmetische und $a : ae = ae : ae^2$ eine stätige geometrische Proportion.

§. 144. Das mittlere Glied ist in einer stätigen arithmetischen Proportion $= \frac{2a + 2d}{2} = a + d$, und in einer stätigen geometrischen $= \sqrt{a^2 e^2} = ae$.

Anmerkung. Diese Formeln gebraucht man, um Glieder zwischen einem Verhältnisse zu suchen, welches man interpoliren nennt. Eben diese Formeln bestätigen auch den Satz §. 107., daß, wenn d sehr klein ist, das arithmetische Verhältniß

Rechnung nach dieser formel für ~~30~~ $22^0\frac{1}{2}$

$1,311028777 = \pi$ $l\frac{\pi}{4} = 0,5155522 - 1$

0,327757194286 0,5777610 − 3 9782343

− 6303905 0,6399698 − 5 0,003782

− 4 433

~~0,32782022900~~ 0,3276941509 06 43648

232

304

1,00000000000 0,0622088 − 2

+ 96167333 0,1244176 − 4

− 1 123 0,01154008

9

1,00096167210 0,13317

$\frac{0,3276941509}{1,00096167 21}$ 3782343

756468

1512936

3873119

0,32737932 288 50163 288

259651467 7

~~54846677 67~~

314466 7767 1846 4128

6941509 1107 7477

3796841 2954 1605

64179

30013

34166

π 1,311028777 + 0,24618 0,1176122

π^4 2,954160 − 87 7056732 5.077

π^5 3,873119 1,24531 9408976 8,7276

π^8 8,72 1,0585098

π^9 11,43 1,311028 176122

− 64552

− 1132

1,245342 34858

7746 10457

3485

147 1,2453

11

1437 3,9

3,933

331 − 5,228

66,2 − 2,614

26.48 7,842

2317 3,933

95 23

2

4

1,2461884376

86 58392

1,24532 25984

2 1961

1,24534 4 356

2578379 8727659545

18048 66385512

43832 584934

21916 83927

$1+\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10080}x^8 - \frac{1}{1296000}x^{12} \ldots - \zeta$

$1+\frac{1}{12}x^4 -$

1 1

$+\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^8$ 3 $\frac{1}{12}s^4$

3 1260 108000

$\frac{3}{4}$ 35 4300

1,024628
86
21
1,0236

$\zeta^4 = 1 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2520}x^8$

$4 \qquad + \frac{1}{24}x^8$

$1+\frac{1}{3}x^4$ 13

0 1
1 1,0236

$1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{10080}$ $\frac{x\,dz}{dx} = \int$

0.437009 592
796 938

$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{144} + 35$

$- \frac{1}{5040} - 1$

6455202 17
7172446
796938

$z = 1 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4.9} \ldots$

$x\frac{dz}{dx} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4.3} + \frac{x^4}{4.9.4}$ &c.

m

$x\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} + z = 0$ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2m+1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{mm:xx\ y}{+1:x\ y}$

$z.x^m = yx^m$ $m = -\frac{1}{2}$ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\frac{1}{4}:x^2 y}{+1:x.y}$

$\frac{dz}{dx} = mx^{m-1}y + x^m\frac{dy}{dx}$

$\left.\begin{matrix} m.m-1. \\ +m \end{matrix}\right| x^{m-1}y \quad \left.\begin{matrix} +2m. \\ +1 \end{matrix}\right| x^m\frac{dy}{dx} + x^{m+1}\frac{d^2y}{dx^2}$

yx^m

hältniß von dem geometrischen sehr wenig abweicht, und daß dieser Unterschied verschwindet, wenn d verschwindet. Es sey zu dem Ende in dem letzten Gliede $2d = \frac{1}{n}$ ein sehr kleiner Bruch: so ist $a + \frac{1}{2n}$ das mittlere arithmetische Glied; und eben dasselbe kann man auch für das mittlere geometrische halten. Denn $a : a + \frac{1}{2n} = a + \frac{1}{2n} : a + \frac{1}{n} + \frac{1}{4an^2}$. Aber $\frac{1}{4an^2}$ ist eine verschwindende Größe, wenn $\frac{1}{n}$ sehr klein ist. Also verliert man nichts, wenn man für das letzte Glied $= a + \frac{1}{n}$ in der geometrischen Proportion annimt, und eben so groß war auch das vierte Glied in der arithmetischen: $a - a + \frac{1}{2n} = a + \frac{1}{2n} - a + \frac{1}{n}$.

§. 145. Erklärung. Eine fortgesetzte stetige Proportion, wo das erste Glied sich zum zweyten verhält, wie das zweyte zum dritten, und wie das dritte zum vierten u. s. w., heißt eine Reihe oder Progression. Wenn daher

1) in einer arithmetischen Progression a das erste Glied und d die Differenz bedeutet: so ist $a - a + d = a + d - a + 2d = a + 2d - a + 3d = a + 3d - a + 4d$ u. s. w.

also die Reihe $a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d,\ a + 5d,\ a + 6d$
u. d. Zahl d. Gl. 1 2 3 4 5 6 7

2) In einer geometrischen sey a das erste Glied und e der Exponent, oder nach §. 42. die Grundzahl der geometrischen Reihe: so ist $a : ae = ae : ae^2 = ae^2 : ae^3 = ae^3 : ae^4 = ae^4 : ae^5$ u. s. w.

also die Reihe $a,\ ae,\ ae^2,\ ae^3,\ ae^4,\ ae^5,\ ae^6$
u. die Zahl d. Glied. 1 2 3 4 5 6 7

Beide Reihen heißen steigend, wenn die folgenden Glieder größer werden, fallend aber, wenn sie abnehmen.

§. 146. Zusatz. Setzt man $a = 0$, und $d = 1$: so bekommt man aus §. 145. 1. die natürliche Folge unserer gemeinen Zahlen von Null an, die daher eine arithmetische Reihe ausmachen. Eben dies geschieht, wenn $a = 1$ gesetzt wird. Jene Reihe aber, wo jedes Glied um 1 kleiner ist als das so vielte in der zweyten, die mit 1 anfängt, und die Zahl der Glieder anzeigt, ist einerley mit der Reihe der Exponenten der geometrischen Reihe §. 145. 2. z. E. das 4te Glied $ae^3 = ae^{4-1}$. Auch druckt eben diese Reihe die Zahlen aus, womit d in dem um 1 größern Gliede der arithmetischen Reihe multiplicirt ist. z. B. im 4ten Gliede der arithmetischen Reihe $= a + 3d$ ist $3 = 4 - 1$ der Factor von d. Man sieht leicht, daß im nten Gliede der geometrischen Reihe die Grundzahl e die Potenz $n - 1$, und d in dem nten Gliede der arithmetischen eben diesen Factor haben werde. Das $n - 1$te Glied der arithmetischen ist also $a + (n - 2)d$, und das $(n - 1)$te der geometrischen $= ae^{n-2}$. Das $(n - 2)$te der arithmetischen ist $= a + (n - 3)d$, und das $(n - 2)$te der geometrischen $= ae^{n-3}$. Dem zu Folge sind

die Zahlen der Glieder	1	2	3	4	$n-2$	$n-1$	n
die Glieder der arithmet. Reihe	a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$	$a+(n-3)d$,	$a+(n-2)d$,	$a+(n-1)d$.
die Glieder der geomet. Reihe	a,	ae,	ae^2,	ae^3	ae^{n-3}.	ae^{n-2},	ae^{n-1}.

§. 147. Anmerkung. I) Setzt man in der geometrischen Reihe §. 145. 2. oder §. 146. $a = 1$: so behält man blos $e^0, e^1, e^2, e^3, e^4 \ldots\ldots e^{n-2}, e^{n-1}$, eine Reihe von Potenzen der Grundzahl e (§. 42.); deren Logarithmen daher eine arithmetische, so wie die Zahlen selbst, welche die Potenzen wirklich ausdrucken, eine geometrische Reihe ausmachen.

II) Die Differenzen der Glieder einer geometrischen Reihe geben ebenfalls eine geometrische Reihe von eben dem Exponenten, so wie diese und alle folgende Differenz-Reihen; auch die ersten Glieder dieser Differenz-Reihen machen eine geometrische Reihe aus, deren Exponent $= e - 1$ ist. Denn 1) von $a, ae, ae^2, ae^3, ae^4 \ldots\ldots$ ist die Differenz-Reihe $= ae - a, ae^2 - ae, ae^3 - ae^2, ae^4 - ae^3 \ldots$ das ist $a(e - 1), a(e - 1)e, a(e - 1)e^2, a(e - 1)e^3$

2) $a(e-1)e - a(e-1), a(e-1)e^2 - a(e-1)e$
$a(e-1)^3 - a(e-1)e^2 \ldots$

oder $a(e-1)^2, a(e-1)^2 e, a(e-1)^2 e^2 \ldots$

3) a

Zähler bei $\sin 90^0$

.5886610
7781512
8099098

588061
1176122
1176122
0585098
0034605
0550493

1,31102878
− 6455202
− 113514
1,24534162
+ 300
1,24534462

1176122
3528366
~~4566~~
1,5289586
1,3617278
2,8906864
8,4140
4766 −6

0,47044889
9408978
0034605
9374373

Numer 1,24647676

1176122
4704488
0791812
3912676

54113
33

0550493
1176122
9374371

1.2461884
− 86583
1.24532267
2196
+ 1,24534453

389
24534
98136
1864

3912676
20412
1871476

1176122
0,9408976
1,2304489
2,1713465
7,30012
0,87122 −6
47045

4
13
6 f

17
660

$1+\frac{1}{12}-\frac{1}{1000}$
$-\frac{1}{2520}$
$+\frac{1}{24}$

$1-\frac{2SS}{1-S^4}$

$\dfrac{1-\left(S\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^2}{1+\left(S\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^2}$ 34167

$1+\frac{2SS}{1-S^4}N^2$

$1+\frac{1}{3}+\frac{13}{315}$
$+\frac{1}{15}$
$1+\frac{4}{3}-\frac{8}{315}$

$$\left(N\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^2-\left(M\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^2=m$$

pq^2

$$+ \qquad\qquad = n$$

$$\left(N\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^4-\left(M\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^4= N(1+\sqrt{-1})$$

hinc $N^4 + M^4 = N2$

9929 132
9941 134
9923 75
9931 69
9949 50
9973 46
9967 39

fit 1,24 ... $= a$

$N.\pi = 2a^4$

$N \frac{3}{2}\pi =$

~~$N 2\pi = 4a^8$~~
~~$N 4\pi = 16 a^{16}$~~
~~$N 8\pi = 256 a^{32}$~~
~~$N 2^\mu \pi = 2^\mu \ldots$~~ $2^{\mu} a^{4\mu}$

$$\frac{M2}{N2} = \frac{2M\sqrt{1-\frac{M^4}{N^4}}}{\cancel{N}\ 1+\frac{M^4}{N^4}} \quad N^3$$

Λ

$4 = pp + qq$ 2)
$1 = pq$

$pp + \frac{2}{pp} = 4$

$p^4 - 4pp + 4 = 2$

$p^2 = 2 \pm \sqrt{2}$

$N 2\pi \quad (2a^4)^4$
$N 4\pi \quad (2a^4)^{16}$
$N 8\pi \quad (2a^4)^{64}$
80

$N\lambda\pi = (2a^4)^{\lambda\lambda}$

$$M2 = 2MN\sqrt{(N^4 - M^4)} = 2MN^3 c \quad 1 + SS$$

$a = 2 \quad x^4 + y^4$ $\qquad = 2MN^3 +$

$\frac{x}{y} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$ $\qquad = 2MN\,(MM + NN) \cdot \frac{\mu}{\nu}$

$x^4 = y^4 .\ 3 - 2\sqrt{2}$ $\qquad$ chorda arc. 45° cf. p. 20

$a = (4 - 2\sqrt{2})\,x^4$

3) $a(e-1)^2 e - a(e-1)^2$, $a(e-1)^2 e^2 - a(e-1)e \ldots$ oder $a(e-1)^3$, $a(e-1)^3 e \ldots$
lauter geometrische Reihen, deren Exponent oder Grundzahl $= e$ ist, die ersten Glieder derselben aber sind
a, $a(e-1)$, $a(e-1)^2$, $a(e-1)^3 \ldots$

§. 148. Lehrsatz. **In jeder Progression lassen sich die beiden äußersten und von den äußersten gleich weit abstehenden Glieder in eine Proportion setzen.**

Beweis. Die der arithmetischen Reihe haben alsdann gleiche Differenzen, und die der geometrischen gleiche Exponenten. So ist
in der arithmet. $a - a + d = a + (n-2)d - a + (n-1)d$
die Differenz beider Verhältnisse $= d$, also beide machen eine Proportion aus;
eben so $a - a + 2d = a + (n-3)d - a + (n-1)d$.
die Differenz ist hier in beiden Verhältnissen $= 2d$.
in d. geometr. Reihe $a : ae = ae^{n-2} : ae^{n-1}$ der Exponent $= e$
und $a : ae^2 = ae^{n-3} : ae^{n-1}$ der Expon. $= e^2$

§. 149. Zusatz. **Die Summe einer arithmetischen Reihe findet man, wenn die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt wird.** Denn so viel gleich große Paare finden sich nach §. 148. in der Reihe. Jedes Paar ist $= a + a + (n-1)d$ $= a + d + a + (n-2)d = a + 2d + a + (n-3)d$ $= 2a + (n-1)d$. Solcher Summen, wie $2a + (n-1)d$, sind daher $\frac{n}{2}$ in der Reihe; also $S = \frac{(2a + (n-1)d)n}{2}$, und ist $a = 1$; so ist $S = \frac{(2 + (n-1)d)n}{2}$.

§. 150. Nennt man das letzte Glied $a + (n-1)d$ allgemein z: so ist $S = \frac{(a+z)n}{2}$, folgl. $\frac{2S}{n} = a + z$, und $\frac{2S}{n} - a = z$, oder $\frac{2S}{n} - z = a$, auch $\frac{2S}{a+z} = n$.
Es sey $S = 21$, $n = 6$, und $a = 1$; so ist $z = \frac{42}{6} - 1 = 6$.
Da ferner $z = a + (n-1)d$, folglich $\frac{z-a}{n-1} = d$; so ist

für $z=6$, $a=1$ und $n=6$, die Differenz $d=\frac{6-1}{6-1}=1$, und die Reihe ist $1+2+3+4+5+6=21$.

§. 151. Zusatz. 1) $a=1$, und $d=1$, giebt die natürliche Reihe von Zahlen, deren Summe $=\frac{(2+n-1)n}{2}$ $=\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$.

Wäre $n=100$: so ist die Summe aller Zahlen von 1 bis $100 = 101 . 50 = 5050$.

2) $a=1$, und $d=2$ giebt $S=\frac{(2+(n-1)2)n}{2}=n^2$

3) $a=1$, und $d=3$ giebt $S=\frac{(2+(n-1)3)n}{2}$ $=\frac{(3n-1)n}{2}$ u. s. w.

Diese Summen nennt man **Polygonal-Zahlen**, weil die Einheiten derselben allemal in eine regulaire Figur gestellt werden können, und zwar 1) $\frac{(n+1)n}{2}$ eine Trigonal-Zahl. 2) n^2 eine Quadrat-Zahl. 3) $\frac{(3n-1)n}{2}$ eine Pentagonal-Zahl u. s. w.

n druckt immer die Einheiten in jeder Seite des Polygons aus, so wie $d+2$ die Zahl der Seiten. Setzt man daher $d+2=a$, also $d=a-2$: so ist die letzte Formel §. 149. $S=\frac{(2+(n-1)(a-2))n}{2}=\frac{(a-2)n^2-(a-4)n}{2}$ der allgemeine Ausdruck für jede Polygonal-Zahl von a Seiten, deren jede n Einheiten hat.

§. 152. Die Summe von einer mit 1 anfangenden Reihe Polygonal-Zahlen heißt eine Pyramidal-Zahl; so sind von den Trigonal-Zahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45
die Pyramidal-Zahlen 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165
von den Quadrat Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 87
die Pyramidal-Zahlen 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285
Da nun jede Polygonal-Zahl selbst die Summe einer arithmetischen Reihe ist: so kann man die Pyramidal-Zahlen summiren, wenn man von jedem Theile dieser Summe wieder die Summe sucht, welches um des folgenden willen wohl zu merken ist.

Die Reihen der Polygonalzahlen lassen sich auch rückwärts fortsetzen und dadurch kommt man bei allen, die Trigonalzahlen und Quadrate ausgenommen, auf Zahlen welche von den übrigen ganz verschieden sind.

Pentag. Z. ~~1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285~~

100, 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 …

Hexagonalz. 105, 78, 55, 36, 21, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 28, 45, 66

Jede Zahl besteht aus drei Trigonalzahlen

Jede Z. der Form. $8n+1$ drei □ i, pp, pp; i, pi, pi —
$8n+3$ drei □ i, i, i —
$8n+5$ drei □ i, pp, pi —
$8n+7$ vier □ i, i, i, pi —

Aus zweien Trigonalz. wo $4x+1$ f. z. der folgenden Form hat

Zahlen Zähler x ; ~~$3n+2$~~ ; $7n+5$; $11n+8$; $19n+14$; $31n+23$ … $(4k+3)n+(3k+2)$

9767 9773 1077 9763
1 9936 368 123 132 32404 72
3.1 83 44 9767
9.4 99 23 12792 3 42 14884 9839 42891
27.13 33 23 13992 9767 1479
81.67 11 1 10296 1272 151 24651 339+16k 51
41 14 33 1 792 46 9936 18792 2 19+8k
104 49 99 67 11448 21 18 14256 19+4k
39 ~~29~~ 87 5+4k
13 3 48 5 12267 423 144 346
39 16 16 5 11703 23 3481 115600 356 122336
10. 88 23 48 37 33 4 5 2 13248 276 9767 125367 126736 9767
53 12 30. 4323 136503
72 41 576+10k 4707 17
24 17 64.59 17767
8 1 51.5 1041 15376
24 1 17.5 25143
72 49 36 51.22 1479 81
87 8
29 8
87 37
20 47 ~~43~~

Die Theilung der Lemniscate in sieben Theile gibt die Gleichung:

$$16\,\frac{1-ss}{1+ss}\left(\cancel{\frac{1+2-7-12+7+2-1}{1+8-12+8-38-8-12-8+1}}\right)^2 = \left(\frac{3*-6*-1}{1*+6*-3}\right)^2$$

14 28 16
18 36 16

$$16\,(1-x^4)\left(\frac{1-5-5+1}{1+20-26+20+1}\right)^2 =$$

4 24 16
32 16

1 + 40 + 348 − 1000 + 1478 − 1000
3 + 120 + 1044 − 3000 + 4434 − 3000 + 1044 + 120 + 3
− 6 − 240 − 2088 + 6000 − 8868 + 6000
− 1 − 40 − 348 + 1000

3 + 114 + 803 − 5128
~~+18 + 684 + 4818~~
~~9 − 342 − 2409 − 15384~~
~~9 + 3~~

9 + 342 + 2409 − 15384
+ 18 + 684 − 2418
+ 3 + 114

9 + 324 + ~~3096~~ − 17688
1722 − 17916

1 + 40 + 348
1 − 18 − 3 1 + 12 + 30
− 18 + 36
− 3 1 + 40 + 348
12 480
30
1 + 52 + 858
+ 144 − 2160
1 + 196 − 1302
2984

2346

1 − 5 − 5 + 1
+ 6 − 30 − 30 + 6
− 3 + 15 + 15 − 3

~~3 − 9 − 48 − 12 + 21 − 3~~
1 + 1 − 38 − 14 + 21 − 3
1 + 2 − 75 − 104
1 + 1 − 77 − 39
16 + 16 − 1232 − 612
9 + 324 + 1722 − 17916

7 − 308 − 2454 − ~~24628~~ 17304
1 − 240 − 47920
1 − 44 − 422 8624
− 196 − 47498
8624
1 − 196

1 − 10
9 − 36
9 − 126
9 − 135
144 − 2160

9 − 36 + 30
1 − 3 − 5
+ 6 − 30
+ 3
1 + 1 − 38
1 +

1 + 40 + 348
− 36
9 + 360 + 3132
− 36 − 1440
+ 320
9 + 324 + 1960

§. 153. Aufgabe. Den allgemeinen Ausdruck für jede Pyramidal-Zahl zu suchen.

Auflösung. Da die Formel für Polygonal-Zahlen Quadrate enthält; so muß

I. eine Formel gesucht werden, nach welcher man die Summe von Quadraten angeben kann, deren Wurzeln in einer natürlichen Ordnung von Zahlen fortgehen. Es sey also

1) S das allgemeine Zeichen jeder Summe und n die **letzte Zahl** jeder von 1 anfangenden arithmetischen Reihe, die zugleich die Zahl der Einheiten jeder Polygon-Seite ist. So ist für $d = 0$, $Sn^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots = n$ nämlich $n^0 = 1$. (§. 50.)

für $d = 1$, $Sn^1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots = \frac{(n+1)n}{2}$

für $d = 2$, $Sn^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \ldots$

woraus $Sn^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 \ldots$ leicht zu machen ist.

2) Nun gehe man in jeder dieser Reihen noch um ein Glied weiter: so ist

$S(n+1)^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots = n + 1$

$S(n+1)^1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \ldots = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$S(n+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36, \ldots$ die Sume d. Quadr.

$S(n+1)^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 \ldots$ d. Sume d. Würf.

3) Zieht man die Reihen in 1 von den Reihen in 2 ab: so bleibt offenbar blos das letzte Glied von den Reihen in 2 übrig. Also $S(n+1)^0 - Sn^0 = 1$; $S(n+1)^1 - Sn^1 = n + 1$; $S(n+1)^2 - Sn^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$; $S(n+1)^3 - Sn^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

4) Da jeder dieser Theile aus einer Summe besteht (§. 152) so ist $S(n+1)^2 = Sn^2 + 2Sn + S1$. Hier kann nur das letzte Glied $S1$ oder die Summe der Einer zweifelhaft seyn. Denn es kann die Summe der Einer aus 1 oder aus 2 bedeuten, weil $n^0 = 1$ und $(n+1)^0$ auch $= 1$. Weil indeß hier von der Summirung der Reihen, die mit $(n+1)$ bezeichnet sind, die Rede ist: so ist wol ohnstreitig für $S1$ der Werth $S(n+1)^0 = n + 1$ zu setzen. Dies voraus gesetzt

verwandle man die Gleichung $S(n+1)^2 = Sn^2 + 2Sn + S1$ in eine solche, wo $2Sn$ auf einer Seite, und die übrigen Glieder mit entgegengesetzten Zeichen auf der andern Seite stehen, also $S(n+1)^2 - Sn^2 - S(n+1)^0 = 2Sn^1$, das ist, wenn man die in 3 gefundenen Werthe substituirt, $n^2 + 2n + 1 - (n+1) = 2Sn$. Also $Sn^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ $= (n+1)n$, gerade so wie vorhin dieser Werth gefunden ist. Eben so wird aus $S(n+1)^3 = Sn^3 + 3Sn^2 + 3Sn^1 + S(n+1)^0$ folgende Gleichung: $S(n+1)^3 - Sn^3 - 3Sn^1 - S(n+1)^0$ $= 3Sn^2$, oder wenn man die Werthe wieder substituirt

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{3}{2}n - (n+1) = 3Sn^2$$

folgl. $\frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} = Sn^2$ oder wenn man alles gehörig gegen einander aufhebt: so ist

$$\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n = Sn^2$$

II. Nunmehr ist es leicht, eine allgemeine Formel für die Pyramidal-Zahlen anzugeben. Man darf nämlich nur die Polygonal-Zahl (§. 151.) $= \frac{(a-2)n^2 - (a-4)n}{2}$ summiren. Also da a oder die Zahl der Seiten eine beständige Größe ist, die sich nicht durch das Summiren verändert: so ist die Polygonal-Zahl $= \frac{(a-2)Sn^2 - (a-4)Sn^1}{2}$ $= \frac{1}{2}(a-2)(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) - \frac{1}{2}(a-4)(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n)$, und wenn man alles zusammengehörige multiplicirt, addirt und subtrahirt, $= \frac{1}{6}an^3 - \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{6}an + \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{6}n$

$$= \tfrac{1}{6}an^3 - \tfrac{2}{6}n^3 - \tfrac{1}{6}an + \tfrac{3}{6}n^2 + \tfrac{5}{6}n$$

$$= \frac{(a-2)n^3 - (a-5)n + 3n^2}{6} = \frac{(a-2)n^3 + (3n-a+5)n}{6}$$

Ist nun die Grundfläche der Pyramide ein Dreyeck, also eine Trigonalzahl, wo $a = 3$ ist: so bleibt $\frac{n^3 + (3n+2)n}{6}$ $= \frac{(n^2+3n+2)n}{6}$. Z. B. $n = 7$, oder jede Seite der Pyramide bestehe aus 7 Einheiten, so ist ihr Inhalt $= \frac{(49+21+2)7}{6} = 84$.

Ist die Grundfläche ein Viereck, also $a = 4$: so bleibt $\frac{(2n^2+3n+1)n}{6}$.

$$\frac{MM + NN = 1 + 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} + \frac{17}{2520} \ldots}{{}^{1}\ v^{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{240} + \frac{17}{40320}}$$

$1 + \frac{1}{2}$ $\sqrt{\frac{\mu\mu NN - vvMM}{NNvv - MM\mu\mu}}$ $M^4N^4 + \mu^4 v^4$

$N2 = M^4 + N^4$

$M2 = 2MN\mu v$ $\quad a^{0}\ a^{0}\ b$

$-bba$

$\mu v = N(1+\sqrt{-1})$

$\cancel{\mu v} = M_{1+\sqrt{-1}}{}^{4} + N_{1+\sqrt{-1}}{}^{4}$ $\quad \mu\mu = \frac{NN - MM}{NN + MM} vv$

$\mu 2 v 2 =$

[E-4]

$\frac{\mu^2}{v2} = M^4N^4 + \mu^4 v^4 =$ $\quad \frac{NN\frac{NN-MM}{NN+MM} - MM}{NN - MM\frac{NN-MM}{NN+MM}}$

$= \frac{\frac{\mu\mu}{vv} - \frac{MM}{NN}}{2 - \frac{\mu\mu}{vv} - \frac{MM}{NN}} = \frac{NN\mu\mu - MMvv}{2vvNN -}$ (35)

$\frac{N^4 - 2MMNN - M^4}{M^4 + 2MMNN - M^4}$

$\cancel{\mu 2 \cdot \mu 2 =}$

$\sqrt{}$ $\frac{\cancel{4MMNN\mu\mu vv - (M^4 + N^4)^2}}{+}$ $\quad 2 \quad 1$

$\mu 2 \cdot \mu 2 = M^4N^4 + \mu^4 v^4$

$1 = \frac{MM}{NN} + \frac{\mu\mu}{vv} + \frac{M^4\mu^4}{N^4v^4}$ $\quad \frac{\mu 2 \cdot \cancel{\mu\mu}}{v2} = \frac{\mu\mu NN - vvMM}{NNvv - MM\mu\mu}$

$\mu 2 v 2 = M^4N^4 + \mu^4 v^4$

$M^4N^4 + \mu\mu vvN^4 + MMNNv^4 = N^4v^4$ $\quad \cancel{\mu\mu}\ vvNN$

$\left(1 + \frac{MM}{NN}\right)\left(1 + \frac{\mu\mu}{vv}\right) = 2$

$N = 0$

$1 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{11}{2016}$

$1 - \frac{1}{1+}$

$1 - \frac{1}{1+1\sqrt{-1}}$

$x^4 - \frac{1}{15}x^8 +$

$1 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{180}x^8$

$N4 = \cancel{M^8 + 2M^4N^4 + N^8}$

$M^{16} + 4M^{12}N^4 + 6M^8N^8 + 4M^4N^{12} + N^{16}$

$\cancel{+6M^4N^4}$

$16(N^8\nu^8 - N^8\nu^6\mu^2 - \nu^8 N^6 M^2)$

Lem: 45°

Zähler des Sinus | Nenner des Sinus

0,65551439	1,01538678	409
2017225	− 338	280 346 188 244 6846
~~+~~ 221	1,01538340	409 127
0,65349493	0,0066301	28 1 14

$= 9,8152422$

0066301 8086121 0,66~~8~~42~~5~~45 der ersten Rechnung

2609688 18237647 64359425

0265204 1,0629 6846

1,2452411 1,06153 13

34493 welches mithin die ersten Rechnung oben bestätigt

$\Pi = 1.2453447$

$2\Pi^4$ 150515

$l\Pi$ 0,0952896

0,3811584

2458046

0952896
1505130
2458046

2,4052400

4,81048 $= N\pi$

347
1396
1396
2443
156003

log. hyp. dieser Zahl $= 1,5708 = \frac{1}{2}\pi$ circuli ?

Ist nun n wieder $= 7$: so ist $\frac{(98+21+1).7}{6} = 140$.
Da nach beiden Formeln die Kanonen- und Bombenkugeln über einander geschichtet werden können: so sieht man leicht, wie nützlich diese Formeln sind.

§. 154. Aufgabe Einen frey stehenden Kugelhaufen zu berechnen, wenn dessen Grundfläche ein länglichtes Rechteck ist.

Auflösung. 1) Die Kugeln werden so geschichtet, daß jedesmal die untere Schicht sowohl in der Länge als Breite eine Kugel mehr hat als die obere Gesetzt, sie wäre oben nicht ganz voll geschichtet, so daß die oberste Schicht in der Breite a und in der Länge b Kugeln, also die ganze Schicht ab Kugeln enthielte: so würden in der 2ten Schicht von oben herunter gezählt $(a+1)(b+1) = ab+(a+b)+1$
in der 3ten $(a+2)(b+2) = ab+2(a+b)+4$
in der 4ten $(a+3)(b+3) = ab+3(a+b)+9$
in der $(m+1)$ten Schicht $(a+m)(b+m) = ab+m(a+b)+m^2$
Kugeln liegen.

2 Man hat also 1) eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied $= ab$, Exponent $= (a+b)$, und Zahl der Glieder $m+1$ ist, deren Summen daher $= \frac{(2ab+m(a+b))(m+1)}{2}$ und 2) eine Reihe von Quadraten, deren Wurzeln nach einer arithmetischen Reihe von 1 bis m steigen. Ihre Summe ist also $= \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m = \frac{2m^3+3m^2+m}{6}$.

3) Weil m um 1 weniger beträgt als die Zahl der Schichten, die wir n nennen wollen, also $m+1 = n$, oder $m = n-1$: so ist $m^2 = n^2 - 2n + 1$, und $m^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$, folgl.

$$\begin{aligned} 2m^3 &= 2n^3 - 6n^2 + 6n - 2 \\ 3m^2 &= + 3n^2 - 6n + 3 \\ m &= + n - 1 \\ \hline \frac{2m^3+3m^2+m}{6} &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \end{aligned}$$

4) Setzt man $a = 1$. wie das gewöhnlich der Fall ist, so ist die Summe der arithmetischen Reihe
$= \frac{(2b+(n-1)(b+1))n}{2} = \frac{1}{2}b(n^2+n) + \frac{3}{6}n^2 - \frac{3}{6}n$.

 5) Ab-

5) Addirt man diesen Werth zu $\frac{2}{6}n^3 - \frac{3}{6}n^2 + \frac{1}{6}n$: so bekommt man $\frac{1}{2}b(n^2+n) + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{2}bn(n+1) + \frac{1}{3}(n^2-1)n$.

In dieser Formel bedeutet b den Rücken oder die oberste Schlußreihe der Kugeln, n aber die Zahl der Schichten, oder auch die Eckseite des Kugelhaufens.

Exempel. $b = 30$ und $n = 10$ giebt $150, 11 + 330 = 1980$.

Anmerkung. Vega hat in seinen logarithmischen trigonometrischen Tafeln S. 372 bis 375 diese Formel für n von 1 bis 40 und für b, welches er m nennet, von 1 bis 44; auch die Formeln §. 153. für 4eckigte und 3eckigte Pyramiden berechnet.

§. 155. Aufgabe. **Die Summe einer geometrischen Reihe zu finden.**

Auflösung. Es sey

$$a + ae + ae^2 + ae^3 \ldots ae^{n-2} + ae^{n-1} = S$$

folgl. wenn alles mit e

multiplicirt wird $ae + ae^2 + ae^3 \ldots ae^{n-1} + ae^n = eS$

so ist, wenn die oberste Reihe von der untern abgezogen wird

$eS - S = ae^n - a$; d. i. $(e-1)S = (e^n - 1)a$ und $S = \frac{(e^n-1)a}{e-1}$.

Anmerkung. Eben dieser Werth ward schon §. 88. gefunden, nur war $a = 1$, und statt des dortigen a ist hier e gesetzt. Denn $\frac{e^n - 1}{e-1} = \frac{-(1-e^n)}{-(1-e)} = \frac{1-e^n}{1-e}$ (§. 39. b.)

§. 156. Das letzte Glied sey $V = ae^{n-1}$, so ist $Ve = ae^n$, also $S = \frac{Ve - a}{e-1}$ und $Se - S = Ve - a$; folgl. auch $Se - Ve = S - a$, d. i. $(S-V)e = S - a$ und $S - a : S - V = e : 1 = ae : a$; das heißt: die Summe weniger dem ersten Gliede verhält sich zur Summe weniger dem letzten Gliede, wie das zweyte Glied zum ersten.

§. 157. $l.V = l.a + n\,l.e - l.e$. Folgl. $\frac{l.V + l.e - l.a}{l\,e} = n$, oder weil $\frac{(e-1)S}{a} = e^n - 1$, folgl. $\frac{(e-1)S + a}{a} = e^n$,

$$\log.\ \text{Denom.} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10080}x^8 + \frac{17}{19958400}x^{12} \ldots\ldots$$

$$- \frac{1}{288}x^8 + \frac{1}{120960}$$

$$+ \frac{1}{5184}$$

1844
2592

$10^2.11.7.81.32$

$10.7.27.64$

81.64

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{280}x^8 + \frac{1}{4950}x^{12} - \frac{1}{78000}x^{16}$$

$$+ \frac{1}{144} - \frac{1}{3360}$$

34
330
7700
8064
7.9.128
$10^2.11.9$

$\frac{1}{12} \Big| \frac{1}{140} \Big| \frac{1}{1650} \Big| \frac{1}{19800} \Big|\ \frac{1}{230432} + \frac{1}{120960}$

$$\log.\ \text{Numeratoris} = \log. x -$$

$\frac{1494}{4950}$ 83 -3456

4 4
40 20
450 150
5200

4
8
50
400

274839
80618
1.4113039
0.4500
0.1176086
1176122
7056732
8817952
40824
2900352
1761220
2.3522440
3.0103
5.3625440
230432
60
2100
497

$$- \frac{1}{60}x^4 - \frac{1}{10080}x^8 -$$

$$- \frac{1}{7200}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{13}{3360} -$$

$$- \frac{1}{60}x^4 - \frac{1}{42200}x^8 - \frac{1}{3217500}x^{12} - \frac{1}{1989000}x^{16}$$

$\frac{1}{12}$
5
15

889
1016
990

$\frac{\sqrt{Q^4 - P^4}}{Q^4} = Q^4 P$

17
60
5773584

6.8215135
7.2986348
5.4185399
1,8800949
117

36

$$d \log. \sin = \frac{\sqrt{(1 - \sin^4)}\ d\,\text{arc}}{\sin}$$

41990000
189468

230432

2081725
8450980
3690745
0103
3527745
1176387

$$\frac{\cos.\ 1+ss}{\sin} = sc + \frac{c}{s}$$

18 $\frac{7}{1615000}$

230432
921728
691296
1908576
12597

920432
230

921728
230432
964771

$\varphi =$

$s = \dfrac{\varphi}{1 + \frac{1}{10}s^4 \dots}$

$\dfrac{7 \cdot 9}{10 \cdot 128 \cdot 21}$

$\psi s =$

$s = \varphi - \left(\frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{24}s^9 \dots\right.$ 120

$l.s = l\varphi - \frac{1}{10} - \frac{1}{24} - \frac{5}{208} - \frac{7}{2176} - \frac{3}{1280} \dots$

$+ \frac{9}{200} + \frac{13}{280}$

$- \frac{91}{3000}$

136000 3750
8450 4732
8482

6821884

6821884
0757987

$= l\varphi - \frac{1}{10} + \frac{1}{300} - \frac{1}{4875}$

$\frac{1}{12}$ $\frac{1}{280}$ $\frac{1}{4950}$

Nummer von Sin 90°

1,8593977
− 12309
1,73620
+ 2116
1,75736
+ 37
1,761

$5 \cdot 2^8$

17.256
13.128
9
9.640.221
576
1152
1152
1272960 …
25
7
1304 … …
736
45
145 …
67
142
132
630
966p …
133
3
15
138

$qq - pp = 2pp$

$\dfrac{1 - \frac{pp}{qq}}{1 + \frac{pp}{qq}} = \dfrac{pp}{QQ}$

9 2pp

$= e^n$, so ist $l.((e-1)S+a) - l.a = n.l.e$, und
$$n = \frac{l((e-1)S+a)-l.a}{l.e}.$$

§. 158. Ueberhaupt wenn von S, V, a, e, n, 3 Größen gegeben sind: so lassen sich aus denselben die übrigen finden. So ist $a = \frac{(e-1)S}{e^{n-1}}$ oder $a = \frac{V}{e^{n-1}} = \frac{Ve}{e^n}$, $e = \frac{S-a}{S-V}$ u. s. w.

§. 159. Aufgabe. Wie hoch verkauft der sein Pferd, der nach einer geometrischen Progression sich die 32 Hufnagel bezahlen läßt, so, daß der erste Nagel 1 pf., der 2te 2 pf., und jeder folgende nochmal so viel gilt, als der vorige? Hier ist $a = 1$ pf., $e = 2$, $n = 32$; also $S = \frac{(2^{32}-1)}{2-1}$ 1 pf. $= \frac{(2^{32}-1)}{12.24}$ rthl.

Da 32 l. 2 = 9,6329600 auf eine Zahl hinweiset, die nach Vegas Tafeln zwischen 4294960000 und zwischen 4294970000 fällt: so ist die 1, welche von 2^{32} zu subtrahiren ist, in keine Betrachtung zu ziehen, und man kann l. 12 + l. 24 = 2,4593924 von dem gefundenen Logar. = 9,6329600 subtrahiren, um sogleich den Logar. für die Zahl der Thaler zu bekommen. Dieses ist demnach
= 7,1735676 = l. 14913000, beynahe l. 14913100.
Die logarithmische Differenz, nämlich für 100, ist in den Tafeln 29; die Differenz zwischen dem gefundenen und dem nächst kleinern in der Tafel, ist aber nur 26; also 29 : 26 = 100 : 80 (§. 107.): folglich ist der genauere Werth = 14913080 rthlr.

Ein noch merkwürdigeres Exempel ist die Belohnung, welche der Indianer Sessa, der Erfinder des Schachspiels, von seinem Könige Shehram foderte. Er wollte so viel Weitzenkörner haben, als die Summe von $\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}$ beträgt.
64 l. 2 = 19,2659200 giebt die Zahl
18446740000000000000 an.

Rechnet man 3150 Weitzenkörner auf 8 rheinländische Cubic Zoll, und 1 rheinl. Cubic Fuß auf einen braunschw. Himpten: so giebt dies doch über 27 Billionen Himpten. Europa enthält ohngefähr 150000 Quadrat-Meilen, wäre davon $\frac{1}{3}$ Korn-Land, so bekäme man, jede Q. Meile zu 18288 braunschw. Morgen, und der Ertrag von jedem bestellten Morgen 24 Himpten gerechnet, also bey der höchsten Cultur und Fruchtbarkeit, noch keine 22000 Millionen Himpten; und wenn man für die ganze Welt noch 17mal so viel rechnete, doch noch keine halbe Billion.

§. 160. Aufgabe. **Die Summe einer fallenden geometrischen Reihe zu finden.**

Auflösung. Der Exponent ist hier ein ächter Bruch. Er sey $\frac{b}{c}$. Wenn also a das erste Glied wieder bedeutet: so ist

$$a + a\frac{b}{c} + \frac{a\,b^2}{c^2} + a\frac{b^3}{c^3} \ldots\ldots a\frac{b^{n-1}}{c^{n-1}} = S$$

$$\text{und } a\frac{b}{c} + a\frac{b^2}{c^2} + a\frac{b^3}{c^3} \ldots\ldots a\frac{b^n}{c^n} = \frac{b}{c}S$$

folgl. wenn man die untere Reihe von der obern subtrahirt

$$a = S - \frac{b}{c}S = \left(1 - \frac{b}{c}\right)S = \left(\frac{c-b}{c}\right)S, \text{ und}$$

$$\text{daher } \frac{ac}{c-b} = \frac{a}{1-\frac{b}{c}} = S.$$

§. 161. Ist $a - a\frac{b}{c} + a\frac{b^2}{c^2} - a\frac{b^3}{c^3} + a\frac{b^4}{c^4} \ldots\ldots = S$

$$\text{und } + a\frac{b}{c} - a\frac{b^2}{c^2} + a\frac{b^3}{c^3} - a\frac{b^4}{c^4} \ldots\ldots = \frac{b}{c}S$$

so ist $a = \left(1 + \frac{b}{c}\right) S.$

Anmerkung. Beide Reihen findet man schon §. 89., wenn man für das dortige a den hier gebrauchten Exponent $\frac{b}{c}$ setzt, und jene Reihe mit a multiplicirt. Ist $\frac{b}{c}$ ein kleiner Bruch, so nähert man sich, durch wenige Glieder der Reihe, dem Werthe S sehr bald; sonst nicht. In allen Fällen ist indeß jeder Ausdruck für eine unendliche Reihe als eine Näherung des Werths S anzusehen.

	P	Q	p	q	lP	lQ	lp	lq
0	0, 0000000							
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								

37

Fiat

$$\alpha X + \alpha' X' = p^a A$$

$$\beta X + \beta' X' + \beta'' X'' = p^b B$$

$$\gamma X + \gamma' X' + \gamma'' X'' + \gamma''' X''' = p^c C$$

&c.

$$a > b > c > \&c.$$

$$X = \xi^2 + pU$$

$$\xi - \nu p$$

$$\nu^2 p^2$$

$$\xi^2 + p\eta\xi + pp U$$

$$\cancel{\nu\nu p} + \eta\nu + U$$

$$X = (\xi + \mu p)(\xi + \nu p) + \cancel{p U \xi + \mu p - \nu p^2 \xi} +$$

$$\cancel{+ p U \xi + pp\, \upsilon}$$

$$+ pp\eta\xi + p^3 U$$

ξ et ξ' sec: p congr: sec. pp inc.

$$X = \xi\xi' + pp\eta\xi + p^2\upsilon \qquad \lambda'\left(\frac{\xi - \xi'}{p}\right) + \eta\frac{\xi - \xi'}{p} + \upsilon$$

$$\xi + \lambda pp$$

$$\xi + \frac{\upsilon}{\left[\frac{\xi' - \xi}{p}\right]}$$

$$\lambda\left(\frac{\xi' - \xi}{p}\right) + \upsilon \qquad \xi' - \frac{\upsilon}{\frac{\xi' - \xi}{p}} - \eta$$

$$X = \xi\xi' + p^3\xi + \upsilon p^4$$

§. 162. Zusatz. Es sey $\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} \dots = S$ so ist $a = \frac{6}{10}$, und $\frac{b}{c} = \frac{1}{10}$, also $\frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{6}{10} : \frac{9}{10} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = S$.

Allgemein, es sey 1) $0,aaaaa.. = S$, so ist $a,aaaa.. = 10\,S$, also $9\,S = a$, und $S = \frac{a}{9}$. 2) $0,ab\,ab\,ab.. = S$, also $100\,S = ab,abab..$; so ist $99\,S = ab$, und $S = \frac{ab}{99}$, 3) $0,abc\,abc\,abc.. = S$, also $1000\,S = abc,abc\,abc$, so ist $999\,S = abc$, und $S = \frac{abc}{999}$.

Es sey $0,11111 = S$, also $1,1111 = 10\,S$, und $S = \frac{1}{9}$.

$0,18\,18\,18 = S$, also $18,18\,18 = 100\,S$, und $S = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$.

$0,296\,296\,296.. = S$, also $296,296\,296 = 1000\,S$, und $S = \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$.

§. 163. Aufgabe. Die Größe eines Capitals a nach n Jahren zu suchen, wenn die jährigen Zinsen dazu geschlagen werden.

Auflösung. Es sey b die jährige Zinse vom Capital c. Nach demselben Zinsfuß ist das Capital a ausgethan. Also ist die Zinse davon $= \frac{a.b}{c}$, und man hat nach Verlauf des ersten Jahrs $a + \frac{ab}{c} = (1 + \frac{b}{c})a = (\frac{c+b}{c})a = A$.

Dieses Capital A giebt $\frac{Ab}{c}$ Zinse. Also hat man nach dem 2ten Jahre $A + \frac{Ab}{c} = (1 + \frac{b}{c})A = (\frac{c+b}{c})A = (\frac{c+b}{c})^2 a = B$.

Aus gleichem Grunde ist das Capital nach dem 3ten Jahre $(\frac{c+b}{c})B = (\frac{c+b}{c})^3 a$, und nach dem nten Jahre $= (\frac{c+b}{c})^n a$, dessen Logarithmus $= n\,l.(\frac{c+b}{c}) + l.\,a$ ist.

Es sey $a = 5000$ rthl., $\frac{b}{c} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$, und $n = 10$: so ist $\frac{c+b}{c} = \frac{26}{25}$, und $l.(\frac{c+b}{c}) = l.\,26 - l.\,25 = 0,0170333$.

Also

Also $10\,l.\,\frac{26}{25} = 0,0170333$
dazu $l.\,5000 = 3,6989700$

giebt $10\,l.\,\frac{26}{25} + l.\,5000 = 3,8693030 = l.\,7401,21$ rthl.
Der Bruch $\frac{21}{100}$ rthl beträgt beynahe 9 ggr.

Anmerkung. Man nennt dies die Interusurien-Rechnung.

§. 164. Zusatz. Hätte jemand nach 10 Jahren 7401,21 rthl. zu bezahlen, und man verlangte jetzt gleich die Bezahlung: so hätte er nicht mehr als 5000 rthl. nöthig zu bezahlen. Man nennt dies die Rabat- oder Disconto-Rechnung, und zwar die zusammengesetzte, weil hier Zins auf Zins gerechnet ist. Der Bruch $\frac{c+b}{c}$ ist hier blos umgekehrt anzusehen Nämlich $c+b : c = a : \frac{ac}{c+b}$ ist der Werth des 1 Jahr vor der Zeit bezahlten Capitals $= M$. Also $\frac{Mc}{c+b} = a.\left(\frac{c}{c+b}\right)^2 = N$ der Werth des 2 Jahr vor der Zeit bezahlten Capitals, und $a.\left(\frac{c}{c+b}\right)^n$ der Werth des n Jahr vor der Zeit bezahlten Capitals.

§. 165. Die Größe eines Capitals nach n Jahren zu finden, wenn außer den Zinsen jährlich noch die Summe d dazu gelegt wird.

Auflösung. Nach dem ersten Jahre ist es (§. 163) $\left(\frac{c+b}{c}\right) a + d = A$; nach dem 2ten Jahre $\left(\frac{c+b}{c}\right) A + d$ $= \frac{c+b}{c}\left(\left(\frac{c+b}{a}\right) a + d\right) + d = \left(\frac{c+b}{c}\right)^2 a + \left(\frac{c+b}{c}\right) d + d = B$.

Eben so findet man nach dem 3ten Jahre $\left(\frac{c+b}{c}\right) B + d$ $= \left(\frac{c+b}{c}\right)^3 a + \left(\frac{c+b}{c}\right)^2 d + \left(\frac{c+b}{c}\right) d + d$, und nach dem nten Jahre $\left(\frac{c+b}{c}\right)^n a + \left(\frac{c+b}{c}\right)^{n-1} d + \left(\frac{c+b}{c}\right)^{n-2} d \ldots\ldots$ $+ \left(\frac{c+b}{e}\right) d + d$.

Also

Lemniscata

Arc.	Rad. v				
0	0	21,4	28,8		$36\frac{1}{8}$
1	0145670	21,6	29,		$36\frac{2}{8}$
2	0291340	21,8	29,2		36^{3}
3	0437009	22	29,4		36^{4}
4	0582679	22,2	29,6		36^{5}
5	0728347	22,4	29,8		36^{6}
6	0874014	22,6	30,0	4354205	36^{7}
7	1019678	22,8	30,2		37
8	1165337	23.	30,4		37^{1}
9	1310990	23,2	30,6		37^{2}
10	1456633	23,4	30,8		37^{3}
10,5	1529450	23,6	31		37^{4}
11	1602263	23,8	31,2		37^{5}
11,5	1675072	24	31,4		37^{6}
12	1747875	24,2	31,6		37^{7}
12,5	1820673	24,4	31,8		38
13	1893465	24,6	32		38^{1}
13,5	1966249	24,8	32,2		38^{2}
14	2039025	25	32,4		38^{3}
14,5	2111793	25,2	32,6		38^{4}
15	2184550	25,4	32,8		38^{5}
15,5	2257296	25,6	33		38^{6}
16		25,8	33,2		38^{7}
16,5		26	33,4		39
17		26,2	33,6		39^{1}
17,5		26,4	33,8		39^{2}
18		26,6	34		39^{3}
18,5		26,8	34,2		39^{4}
19		27	34,4		39^{5}
19,5		27,2	34,6		39^{6}
20		27,4	34,8		39^{7}
20,2		27,6	35		40
20,4		27,8	35,2		40^{1}
20,6		28	35,4		40^{2}
20,8		28,2	35,6		40^{3}
21		28,4	35,8		40^{4}
21,2		28,6	36.		$40\frac{5}{8}$

38

40 6/8
40 7
41.0
1
2
3
4
5
6
7
42 0
1
2
3
4
5
6
7
43 0
1
2
3
4
5
6
7
44 0
1
2
3
4
5
6
7
45,0
1
2
3
4
5
6
7
8
45,1 9
46,0
1
2
3

Also muß noch zu $\left(\frac{c+b}{c}\right)^n a$ die Summe einer geometrischen Reihe addirt werden, davon d, $\frac{c+b}{c}$ und n bekannt sind. Diese ist (§. 155.) $= \frac{\left(\left(\frac{c+b}{c}\right)^n - 1\right) d}{\frac{c+b}{c} - 1}$

$= \frac{\left(\left(\frac{c+b}{c}\right)^n c - c\right) d}{b}$

daher ist die ganze Summe $= \left(\frac{c+b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{ab+cd}{b}\right) - \frac{cd}{b}$.

Es sey d = 100, der Werth der übrigen Größen aber wie §. 163.,

so ist $n\, l. \left(\frac{c+b}{c}\right) = 10\, l. \frac{26}{25} = 0{,}170333$

$l.\ (ab+cd) = l.\ 7500 = 3{,}8750613$

dies giebt $4{,}0453943 = l.\ 11101,\ 8$ rtl. davon cd = 2500 rthl. abgezogen werden muß. Also die Größe des Capitals mit Zinsen und Zulage ist 8601, 8 rthl.

§. 166. Zusatz. Würde d alle Jahr davon genommen: so müßte die Summe der geometrischen Reihe von d subtrahirt werden, und der ganze Werth des Capitals nach n Jahren wäre $\frac{\left(\frac{c+b}{c}\right)^n (ab - cd) + cd}{b}$.

§. 167. Der jährliche Verlust d ist so groß, daß nach n Jahren das Capital nebst Zinsen ganz verzehrt ist. Man suche n aus der Formel §. 166.

Auflösung. Nach dieser Voraussetzung ist $cd > ab$, weil sonst $\left(\frac{c+b}{c}\right)^n (ab - cd)$ nicht $= 0$ werden könnte; also $ab - cd$ negativ, weshalb man dafür $-(cd - ab)$ setzen kann. Also

$-\left(\frac{c+b}{c}\right)^n (cd - ab) + cd = 0$, u. $\left(\frac{c+b}{c}\right)^n (cd - ab) = cd$,

folglich $\left(\frac{c+b}{c}\right)^n = \frac{cd}{cd - ab}$ und $n\, l. \left(\frac{c+b}{c}\right) = l. \frac{cd}{cd - ab}$;

daher $n = l. \frac{cd}{cd - ab} : l. \left(\frac{c+b}{c}\right)$.

Exem-

Exempel. $d = 500$ rthl., wozu also außer den Zinsen noch ein Theil des Capitals aufgenommen werden muß. Alles übrige sey, wie §. 163 und §. 165 angenommen ist. Also $cd = 12500$, und $ab - cd = -(cd - ab) = -7500$. also $-(\frac{26}{25})^n . 7500 + 12500 = 0$, daher $(\frac{26}{25})^n . 7500 = 12500$ u. $(\frac{26}{25})^n = \frac{12500}{7500} = \frac{5}{3}$, dies giebt $n\,l.\,(\frac{26}{25}) = 0{,}0170333 . n$ $= l.\,\frac{5}{3} = 0{,}2218487$. Also ist $n = \frac{2218487}{170333} = 13$ Jahr und 1 Woche, dafür man 13 Jahr setzen kann.

§. 168. Wenn umgekehrt a, $\frac{b}{c}$ und n gegeben ist, und d gesucht werden soll, so ist, weil $(\frac{c+b}{c})^n (ab - cd)$ $+ cd = 0$, $(\frac{c+b}{c^n})^n . ab = (\frac{c+b}{c^n})^n . cd - cd$; oder, wenn mit c^n alles multiplicirt, und mit $(c+b)^n$ alles dividirt wird, $ab = cd - \frac{c^n}{(c+b)^n} . cd = (c - \frac{c^{n+1}}{(c+b)^n})\, d$, folglich

$$\frac{ab}{c - \frac{c^{n+1}}{(c+b)^n}} = d.$$

Man suche hier erst durch Logarithmen den Werth des Divisors,

nämlich $(n+1)\,l.\,c = 14 . l.\,25 = 19{,}5711600$
$n\,l.\,(c+b) = 13 . l.\,26 = 18{,}3946529$
$1{,}1765071 = l.\,15{,}014$

dieses von $c = 25000$ abgezogen, giebt 9,986, dafür man 10 setzen kann. Also $d = \frac{5000}{10} = 500$.

Anmerkung. Die Aufgaben §. 163 – 168. hat man hauptsächlich bey Zeit- auch Leibrenten und Wittwen-Pensionen nöthig. Es kommt aber hier noch auf die Bestimmung der wahrscheinlichen Lebensdauer, wornach die Renten berechnet werden, an. Die Rechnungen selbst, hauptsächlich die letztern, sind, besonders für nicht gar alten Personen, viel zu weitläuftig, als daß sie hier weiter erklärt werden könnten. Man sehe darüber die Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst von Hrn. von Florencourt. Altenburg, 1781, und Einleitung zur Rechnung der Leibrenten rc. von Hrn. Prof. Tetens. Leipzig 1785.

§. 169.

9973	46	3
67	39	1
49	50	1
41	134	3
31	69	1
29	152	1
23	75	1
9907	* 45	3
9901	62	3
9887	75	1

9930,8 74,7

$\left\{\begin{matrix} 6.1 \\ 4.3 \end{matrix}\right\}$

		7
9883	51	1
71	49	15
59	63	1
57	60	1
51	135	1
39	91	1
33	104	
29	42	
17		
98.11		

9845

9803	
9791	
87	
81	
69	
67	
49	
43	
39	
9733	

9766,2

9847,3

$$\varphi = \varphi$$

$$\psi = \varphi' = \sqrt{(1-\varphi^4)}$$

$$\varphi'' = -2\varphi^3$$

$$\varphi''' = -6\varphi^2\varphi' = -6\varphi^2\psi$$

$$\varphi^{IV} = -12\varphi\varphi'\varphi' + 12\varphi^5 = -12\varphi\psi^2 + 12\varphi^5$$

$$\varphi^{V} = -12\psi^3 + 84\psi\varphi^4$$

$$\varphi = \varphi$$

$$\varphi'' = -2\varphi^3$$

$$\varphi^{IV} =$$

$$d\,1$$

$$\frac{QdP - PdQ}{QQ} = \sqrt{\left(1 - \frac{P^4}{Q^4}\right)}$$

$$Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx} = pq$$

$$q\frac{dp}{dx} - p\frac{dq}{dx} = PQ$$

$$Q^2\frac{d^2P}{dx^2} - 2PQ\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dQ}{dx} + P^2\frac{d^2Q}{dx^2} = Q^4 - P^4$$ (39)

$$Q^2\frac{\partial P^1}{dx^2} \qquad Q^2P'P' - 2PQP'Q' + PPQ'Q' = Q^4 - P^4$$

$$\begin{array}{l|l|l} 2Q^2P'P'' & \cancel{+2PP'Q'Q'} & +2PPQ'Q'' \\ -2PQQ'P'' & \cancel{-2P'P'QQ'} & -2PQP'Q'' \end{array}$$

$$(QP'' - PQ'')(QP' - PQ') = 2Q^3Q' - P^3P' = 4Q^3Q' - 4P^3P'$$

1) $Q^2P'' - PQQ'' = -2P^3$

$PPQ'' - PQP'' = 2Q^3$

$P(P+Q)Q'' - Q(P+Q)P'' = 2(Q^3 + P^3)$

I .... $PQ'' - QP'' = 2QQ - 2QP + 2PP$

II .... $QP'' - PQ'' = 2QQ + 2QP + 2PP$

$158568 2973 . 10037 = 15\ 915900\ 000001 = a$

81) 19576333

49) 399517

17) 23501

71) 331

~~79577 =~~

$31831 = 139 . 229$

$\frac{2}{31831} = \frac{a}{139} + \frac{b}{229}$

$a = \frac{2}{-9} M\ 139 = \frac{47}{-3} = 77 \qquad \frac{2}{90} = \frac{28}{9} = \frac{34}{1}$

$b = \frac{2}{9} M\ 229 = \frac{91}{3} = 120 \qquad \frac{2}{-90} = \frac{46}{-9} = \frac{61}{3} = \frac{-56}{1}$

~~5539568345~~
~~4460966542~~
~~53486~~

24460431654 6762589928 0575539568 3453237410 07194
75545851528 3842794759 8253275109 1703056768 65895
6283183 0605384687 8828814677 5156294178 63089

$l\, a : a-1 = 0,$ 6283183 0605384687 8828814677 5156294178 631
19
0605382 ....
+ 8

l 139 = 7. 237059026124 737441206776 373559907990 043698148984
l 1145 = 7. 043159915988 340023041994 937158795956 764071297264
$l\, 10^7$ = 16. 118095650958 319788125940 182790549453 207710420401
l p = 0. 62831830605 382
C.l.2317 = ~~746028524432 376205889969 583019~~
251971475567 623794110030 416980
C.l.1207 = 904106778902 468498421010 849613
C.l.567 = 659640696272 247929313666 308866
214033543813 800306050024
4 4 8

§. 169. Aufgabe. Wenn eine Größe a jährlich um $\frac{b}{c}$ vermehrt und $\frac{m}{c}$ vermindert wird, ihren Werth nach n Jahren zu bestimmen.

Auflösung. Nach dem ersten Jahre ist sie $a + \frac{ba}{c} - \frac{ma}{c}$ $= (1 + \frac{b-m}{c})a = (\frac{c+b-m}{c})a = A$. Nach dem 2ten Jahre, aus eben den Gründen $(\frac{c+b-m}{c})A = (\frac{c+b-m}{c})^2 a$ und nach dem nten Jahre $(\frac{c+b-m}{c})^n a$.

Exempel. Es sey die Volksmenge eines Landes $= 100000$. Das Verhältniß der Lebenden zu den Gebornen, nach einem Durchschnitt von 50 Jahren $175:8 = c:b$, und das Verhältniß der Lebenden zu den Gestorbenen in eben dieser Zeit $175:5 = c:m$. Man sucht, wie viel die Bevölkerung des Landes, während dieser 50 Jahre, zugenommen?

Die ganze Volksmenge ist $= (\frac{178}{175})^{50} . 100000$; $50 l. (\frac{178}{175}) + l. 100000 = 5{,}369100 = l. 233937$.

Vierter Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen.

Allgemeine Begriffe.

§. 170. Die Analysis lehrt unbekannte Größen aus dem Verhältniß, darin sie mit bekannten stehen, durch Gleichungen finden, und heißt auch Algebra, wenn die Zahlen, wodurch sie den Werth der unbekannten Größe ausdruckt, endliche Größen sind. Gleichungen sind Bezeichnungen gleich großer Werthe durch Ziffern oder Buchstaben, davon die letzten des Alphabets die unbekannten Größen, die ersten aber die bekannten anzeigen. Bey dem ersten Ansatz der Gleichung nimmt man eigentlich alles als bekannt an, und druckt nur die angegebenen Umstände und Verhältnisse in Buchstaben und Ziffern zweckmäßig aus, so daß man

man daraus sehen kann, wie eine Größe von der andern abhängt, oder dadurch bestimmt wird. Die beyden gleichen Werthe, welche man auf solche Weise erhält, heißen die **Fundamental-Gleichung**. Aus dieser werden alsdann nach den Grundsätzen der Arithmetik, besonders §. 8. §. 17. §. 55. andere hergeleitet, vermittelst welcher man auf die **Endgleichung** kommt, in welcher die unbekannte Größe von allen bekannten abgesondert, auf der einen Seite der Gleichung allein, und ihr Werth durch lauter bekannte Größen ausgedruckt auf der andern Seite steht. Man sagt alsdann, die Gleichung sey **aufgelöset**.

Anmerkung. Von dieser Methode, unbekannte Größen aus bekannten durch Gleichungen zu finden, sind in allen vorhergehenden Abschnitten der Arithmetik Beyspiele genug vorgekommen. Sie wurden aber jedesmal nur für einzelne Fälle, den schon bekannten Grundsätzen gemäß, aufgelöset, ohne irgendwo allgemeine Betrachtungen über die Natur der Gleichungen und ihre verschiedene Auflösungsart anzustellen. Dies ist das eigentliche Geschäfte der Analysis, die man in die gemeine und höhere eintheilt. Erste begreift solche Gleichungen, wo für die unbekannte Größe ein beständiger endlicher Werth, entweder wirklich angegeben ist, oder doch für gewisse Fälle angegeben werden kann, der, wenn alles geordnet ist, nicht über die 2te Potenz steigt. Letztere, oder die höhere Analysis, begreift alle Arten von Gleichungen, theils bestimmte von höheren Graden, theils unbestimmte, sowohl vom beständigen als veränderlichen Werthe, und letztere nicht nur von bestimmten sondern auch von unbestimmten Graden. Veränderliche Größen von bestimmten Graden oder Potenzen nennt man Algebraische, die von unbestimmten Graden aber transscendentische, und wenn die Exponenten selbst solche veränderliche Größen sind, Exponential-Größen, die Werthe aber der veränderlichen Größen überhaupt Functionen. Hier kommen bisweilen so verwickelte und schwere Untersuchungen vor, daß am Ende des vorigen Jahrhunderts Isaac Newton (vermuthlich durch seinen Lehrer Isaac Barrow zuerst auf die Spur gebracht) und mit ihm zugleich Gottfried Wilhelm Leibnitz zur grösten Erleichterung, auch der schwersten Rechnungen die Verhältnisse verschwindender Größen aufgesucht haben, um sich durch diese dem Werthe der unbekannten Größen zu nähern; und daraus ist die, in unserm Jahrhundert durch die Bernoullis, de l'Hopital, Euler, und andere große Mathematiker neuerer Zeit so sehr erweiterte und vervollkommnete Differential- und Integral-Rechnung entstanden.

§. 171. Eine Gleichung ist **bestimmt**, wenn ihr Werth durch bekannte oder für bekannt angenommene Größen angegeben werden kann; **unbestimmt**, wenn dies nicht ist.

$$\left(x^m + (1)x^{m+\delta} + (2)\,x^{m+2\delta} + (3)\,x^{m+3\delta} \dots\dots\right)^t$$

$$= x^{mt} \times \Sigma\, x^{s\delta}\, \frac{t.t-1\dots t-n+1}{1\dots(\mathrm{I}).1\dots(\mathrm{II}).(1\dots \mathrm{III})\dots}\,(1)^{(\mathrm{I})}(2)^{(\mathrm{II})}(3)^{(\mathrm{III})}\dots$$

si $(\mathrm{I}) + 2(\mathrm{II}) + 3(\mathrm{III}) \dots = s$

$(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) \dots = n$

$$x = t + UX$$

$$\varphi x = \varphi x + u A' + \frac{uu}{1.2} A'' + \frac{u^3}{1.2.3} A''' \dots\dots$$

$$A' = \frac{dU}{du} . X \frac{d\varphi x}{dt}$$

$$A'' = \frac{d^2 U}{2.du^2} X \frac{\partial \varphi x}{dt} + \frac{d^2 U^2}{2du^2} \frac{\partial\, XX \frac{d\varphi x}{dt}}{dt}$$

$$A''' = \frac{d^3 U}{1.2.3\, du^3} X \frac{d\varphi x}{dt} + \frac{d^3 UU}{2.du^3} \frac{\partial\, XX \frac{\partial\varphi x}{\partial t}}{\partial t} + \frac{d^3 U^3}{2.3 du^3} \frac{\partial^2 X^3 \frac{\partial \varphi x}{\partial t}}{\partial t^2}$$ 40

folglich

$$\varphi x = \varphi x + UX \frac{d\varphi x}{dt} + \frac{UU}{1.2} \frac{\partial .\, XX \frac{\partial \varphi x}{\partial t}}{\partial t} + \frac{U^3}{1.2.3} \frac{\partial\partial X^3 \frac{\partial \varphi x}{dt}}{dt^2}$$

Die gewöhnliche Form des Lehrsatzes

Wenn $x = t + e\xi$ so ist

$$\varphi x = \varphi x + \cancel{t\varphi'(t+e\xi)\frac{\xi}{1}\,\frac{e\varphi''(t+e\xi)}{e\varphi'(t+e\xi)}\,\xi'}$$

+

1. 1
1. 3. 2.
1. 6. 11. 6
1. 10. 35. 50. 24
1. 15. 85. 225. 274. 120
1. 21. 175. 735. 1624. 1764. 720.
1. 28. 322. 1960. 6769. 13132. 13068. 5040.
1. 36. 546. 4536. 22449.

Bestimmung der Coefficienten für 7 Glieder α ,, ,, η p. 13.

<u>Coefficient von α u. η.</u>

$$\left[\frac{6^7}{7} - \frac{21.6^6}{6} + \frac{175.6^5}{5} - \frac{735.6^4}{4} + \frac{1624.6^3}{3} - \frac{1764.6^2}{2} + 720.\boxed{6}\right] : 720$$

$36 \times (\ldots + 1110\frac{6}{7} \ldots - \cancel{4536}$

$\cancel{3248}$

$\cancel{120}$

$\cancel{6615}$

$\cancel{882}$

$\cancel{8607\frac{6}{7}}$

$+$
$1110\frac{6}{7}$
7560
3248
120
$12038\frac{6}{7}$

$-$
4536
6615
882
12033

$+\frac{41}{7}$ also d. C. $= \frac{36.41}{720.7}$

$= \frac{41}{140}$

$4x+6=20$ ist eine bestimmte Gleichung. Denn $x=\frac{20-6}{4}$; $ax+b=c$ ist bestimmt. Es wird nämlich angenommen, daß man den Werth von a, b und c wisse, also $x=\frac{c-b}{a}$.

$x+y=20$ ist eine unbestimmte Gleichung, so lange kein Werth für y angegeben ist. Wüßte man aber, daß $x:y=4:1$, also $x=4y$; so wäre auch $x+y=4y+y$ (§. 8. 4.) $=5y=20$ bestimmt. Man findet nämlich daraus $y=\frac{20}{5}=4$, also $x=20-y=16$.

Oder wäre $y=(a-x)m=am-mx$, und $x+y=c$, also $y=c-x$, so wüßte man auch (nach §. 8. 5.) daß $am-mx=c-x$, und wenn man (nach §. 8. 6.) $+mx-c$ auf beiden Seiten addirte: so fände man $am-c=mx-x$ $=(m-1)x$; also $x=\frac{am-c}{m-1}$.

Es hätte der Werth von y noch viel anders ausgedruckt werden können, z. B. $y=a^2$, oder $y=\surd a$, oder $y=l.a$, wobey a selbst wieder eine sehr zusammengesetzte Größe seyn könnte. In allen Fällen wüßte man doch alsdann den Werth von $x=c-y$.

§. 172. Zusatz. So viel unbekannte Größen in einer Gleichung vorkommen, so viel besondere Gleichungen muß man haben, um ihr Verhältniß gegen einander, oder, welches einerley ist, ihren Werth zu bestimmen. Mehrere Werthe, als hiezu nöthig sind, machten die Gleichung **mehr als bestimmt.**

§. 173. Eine bekannte Größe, sie sey eine einfache oder zusammengesetzte, ganze oder gebrochene, positive oder negative, rational oder irrational Zahl, mit einer unbekannten multiplicirt, heißt ein **Coefficient** der unbekannten Größe, wie schon §. 92. erinnert ist. Das Produkt aus beiden, imgleichen auch jede durch + oder — damit verbundene bekannte Größe, macht ein Glied der Gleichung aus.

§. 174. Erklärung. **Einfach** nennt man die Gleichung, wo die unbekannte Größe in einem oder mehrern Gliedern nur in der ersten Potenz befindlich ist; zusammenmengesetzt aber, wenn sie in einer höhern **Potenz**, oder als **Divisor**, oder als **Factor** einer andern **unbekannten** Größe, oder unter einem **Wurzelzeichen** vorkommt. So sind alle Exempel des vorigen §. einfache Gleichungen.

Nimt man aber die Gleichung $x + y = 20$, und $y^2 = x$, oder $y = \sqrt{x}$, also in beiden Fällen $y^2 + y = 20$, oder $\frac{64}{y} = x$, also $\frac{64}{y} + y = 20$; folglich, wenn man alles mit y multiplicirt, $64 + y^2 = 20y$, oder $xy = 64$, und $x = 20 - y$, folgl. $(20 - y)y = 64$, oder $l.y = \frac{1}{2} l.x$, also $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ für eben diese Gleichung: so wäre in allen diesen Fällen die Gleichung eine zusammengesetzte, und zwar eine **quadratische**, weil y darin bis zur 2ten Potenz steigt. Man benennt nämlich jedesmal die Gleichung nach dem höchsten **Grad** oder der höchsten Potenz der unbekannten Größe. Alle diese Gleichungen geben übrigens einerley Werth für x und y, und zeigen, wie verschieden der Ansatz seyn könne, der doch am Ende einerley Resultat giebt.

§. 175. Eine zusammengesetzte Gleichung heißt **rein**, wenn die Potenz der unbekannten Größe in allen Gliedern der Gleichung, wo sie vorkommt, **einerley** ist. Man kann sie allemal unter die Form $x^m = A$ bringen. **Unrein** heißt sie, wenn die unbekannte Größe in verschiedenen Potenzen vorkommt. Im letzten Fall ist sie entweder **vollständig**, wenn alle Potenzen von der höchsten an, davon die Gleichung den Namen führt, bis zur niedrigsten darin vorkommen, oder **unvollständig**, wenn eine und die andere Potenz der niedern Ordnung fehlt.

§. 176. Eine zusammengesetzte Gleichung ordnen, heißt 1) alle Glieder, die einerley Potenz der unbekannten Größe enthalten, durch Zusammenstellung ihrer Coefficienten auf ein Glied bringen, welches auch reduciren genannt wird, und sie alsdann 2) auf einer Seite der Gleichung so stellen, daß die höchste Potenz mit dem + Zeichen den ersten Platz, die nächst niedrigere aber den zweyten Platz, und so

Coefficient von β u. ζ.

$$-\left(\frac{6^7}{7}-\frac{20.6^6}{6}+\frac{155.6^5}{5}-\frac{580.6^4}{4}+\frac{\overset{1044}{\cancel{889}}.6^3}{3}-\frac{720.6^2}{2}\right):120$$

$$6^4\left(\begin{array}{ll} 30\frac{6}{7} & 120 \\ 186 & 145 \\ \underline{58} & \underline{10} \\ 274\frac{6}{7} & 275 \end{array}\right. \qquad \frac{1296}{7.120} = \frac{54}{35} = \frac{216}{140}$$

Coefficient von γ u. ε

$$\left(\frac{6^7}{7}-\frac{19.6^6}{6}+\cancel{\frac{156.6^5}{5}-\frac{579\,6^4}{4}+}\right.$$
$$\left.\frac{137.6^5}{5}-\frac{461.6^4}{4}+\frac{702.6^3}{3}-\frac{360}{2}6^2\right):48$$

$$=6^4\left(\begin{array}{ll} 30\frac{6}{7} & 114 \\ 164\frac{2}{5} & 115\frac{1}{4} \\ \underline{39} & \underline{5} \\ 234\frac{9}{35} & 234\frac{1}{4} \end{array}\right. \qquad \frac{1}{140}\,\frac{1296}{48} = \frac{27}{140}$$

41

Coefficient von δ

$$-\left(\frac{6^7}{7}-\frac{18.6^6}{6}+\frac{121.6^5}{5}-\frac{372.6^4}{4}+\frac{508}{3}6^3-\frac{246}{2}6^2\right):36$$

$$=\cancel{6^3\left(\begin{array}{ll} 5\frac{1}{7} & 18 \\ 24\frac{1}{3} & 15\frac{1}{2} \\ 4\frac{12}{54} & \end{array}\right.} \quad 4356 \qquad 6\left(\begin{array}{ll} 185\frac{1}{7} & 648 \\ 871\frac{1}{5} & 558 \\ 169\frac{1}{3} & \underline{20} \\ 1225\frac{71}{105} & 1226 \end{array}\right.$$

$$\frac{204}{105} = \frac{272}{140}$$

Est autem

$$\begin{array}{r} 82 \\ +432 \\ +54 \\ +272 \\ \hline 840 \end{array} = 6.140 \text{ wie gehörig}$$

Bestimmung der Coefficienten für 8 Glieder

$$\left(\frac{7^8}{8} - \frac{28.7^7}{7} + \frac{322.7^6}{6} - \frac{1960.7^5}{5} + \frac{6769.7^4}{4} - \frac{13132.7^3}{3} + \frac{13068.7^2}{2} - 5040.7\right) : 5040.$$

$\frac{7}{8} \Big| -3\frac{1}{8}\,7^7 \Big| 31\frac{19}{24}\,7^6 \Big| 169\frac{11}{24}\,7^5 \Big| 506\frac{1}{24}\,7^4 \Big| 835\frac{1}{24}\,7^3 \Big| 688\frac{17}{24}\,7^2 \Big| 31\frac{7}{24}\,7^2$

$54\frac{2}{3}$ 21 7 222^{13} 392 $1186\frac{5}{}$ $169-\frac{1}{4}$ 3542 $4377\frac{1}{3}$ 5845 6534 $= \frac{49.751}{5040.24} = \frac{5257}{17280}$

5257 21028 735980 708480 275 00 69120 1728

$$k\alpha\theta = \frac{5257}{17280}$$

$$\left(\frac{7^8}{8} - \frac{27.7^7}{7} + \frac{295.7^6}{6} - \frac{1665.7^5}{5} + \frac{5104.7^4}{4} - \frac{8028.7^3}{3} + \frac{5040}{2}7^2\right) : 5040$$

$+7^6.\ 29\frac{1}{8}$ $\quad 28\frac{7}{24}$ $\quad 198\frac{1}{24}$

$-7^5.\ 134\frac{23}{24}$ $\quad 944\frac{17}{24}$

$+7^4.\ 331\frac{7}{24}$ $\quad 2319\frac{1}{24}$

$-7^3\ 356\frac{23}{24}$

$+\frac{7^3.\ 73}{24.5040}$

$$L\frac{2v^{\frac{1}{2}}}{1+v} = \frac{1+v}{2} v\mathcal{L}v + \frac{1+v}{2} kv \qquad \frac{L}{k} = M$$

$$M\frac{2v^{\frac{1}{2}}}{1+v} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v\,Mv$$

25039

$$\kappa\, 6\eta = \frac{3473}{17280} = 3577.7$$

1) $\frac{2}{1+v}\left(k\frac{2v}{1+v}^{\frac{1}{2}} - \mathcal{L}\frac{2v}{1+v}^{\frac{1}{2}}\right) = kv - v\mathcal{L}v$ (Verif)

2) $k\frac{2v}{1+v}^{\frac{1}{2}} = (1+v)kv$

$1 + v - 2vv +$

$+^9$

$1 + v + \frac{1}{4}vv + \frac{1}{4}v^3$

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}$

$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$

$-\frac{15}{8} + \frac{15}{2}$

$1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{16}$

$-\frac{175}{32}$

$\frac{3}{16}$ $\quad \frac{15}{128}$

$\frac{3.5}{4.6}$ $\quad \frac{5.7}{6.8}$ $\quad \frac{35}{48}\ 4$ $\quad \frac{15}{8}$

8 72 240 175 247

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{240}.$

so alle folgenden ihren Platz, die reducirte bekannte Größe aber die andere Seite der Gleichung, wofern sie nicht auf Null gebracht ist, bekommt. Man nennet eine solche Zusammenstellung der Glieder die allgemeine Form der Gleichung; nach den Graden oder Abmessungen der höchsten Potenz aber, Gleichungen vom 1sten, 2ten, 3ten, 4ten .... mten Grade. So ist folgendes die allgemeine Form vollständiger auf Null gebrachter bestimmter Gleichungen.

$ax + b = 0$ vom 1sten Grade,
$ax^2 + bx + c = 0$ - - 2ten - -
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ - - 3ten - -
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ - - 4ten - -
$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots + kx + l = 0$ - - mten - -

Die Coefficienten b, c, d u. s. f. können übrigens positive oder negative, einfache oder zusammengesetzte, ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

Auflösung einfacher bestimmter Gleichungen.

§. 177. Zur Auflösung einer einfachen bestimmten Gleichung wird weiter nichts erfordert, als daß man die unbekannte Größe auf eine Seite, und die bekannte, von allen unbekannten abgesondert, auf die andere Seite bringt. Diese Absonderung des Bekannten von dem Unbekannten geschieht, wie man schon aus §. 171 und vielen vorhergehenden Exempeln weiß, durch eine arithmetische Operation, die derjenigen völlig entgegen gesetzt ist, wodurch die Theile der Gleichung ihre erste Verbindung bekamen. Einzelne mit + bezeichnete Glieder werden mit —, die mit — bezeichneten mit + auf die andere Seite gebracht. $4x + 6 = 20$ gab $4x = 20 - 6$, $ax - b = c$ gab $ax = c + b$ (§. 8. 6.). Coefficienten schafft man weg durch die Division aller Glieder der Gleichung mit derselben Zahl; $\frac{4x}{4} = \frac{20-6}{4} = x$, $\frac{ax}{a} = \frac{c+b}{a} = x$ (§. 17. 2.) Divisores werden durch die Multiplication aller Glieder mit derselben Zahl gehoben, und auf diese Art die Brüche aus der Gleichung weg-

 geschafft

geschafft (§. 17. 2.). Zusammengesetzte Factores, besonders wenn sie die unbekannte Größe enthalten, wirklich multiplicirt, auch alle Glieder möglichst reducirt und gegen einander aufgehoben.

Sind mehrere unbekannte Größen, also auch mehrere Gleichungen da, so wird jede nach dieser Art behandelt, und der Werth der einen durch die andere bestimmt, wie aus folgenden Exempeln, die zugleich eine Uebung im richtigen Ansatz der Fundamental-Gleichung verschaffen sollen, weiter erhellen wird.

§. 178. Auflösung solcher Gleichungen, worin nur eine unbekannte Größe vorkommt.

1) Alexander sprach zu seinen Generalen: ich bin 2 Jahr älter als Hephästion; Clytus sagte: ich bin 4 Jahr älter als ihr beyde zusammen; Callisthenes setzte hinzu: mein Vater war 96 Jahr alt, und so alt als alle drey. Wie alt war jeder?

Hephästions Alter sey $= x$, also Alexanders $= x + 2$, und des Clytus $= 2x + 6$. Demnach ist das Alter von allen dreyen $= 4x + 8 = 96$ die Fundamental-Gleichung;

folgl. $x = \frac{96 - 8}{4} = \frac{88}{4} = 22$.

2) Eine Griechin ging in den Tempel des Jupiters und bat: er möchte das Geld, welches sie bey sich trug, verdoppeln. Er that es, und sie opferte zur Dankbarkeit 2 fl. Mit dem Ueberrest ging sie in den Tempel des Apollo, und bat und erhielt ein Gleiches, weshalb sie wieder 2 fl. opferte. Nun zählte sie ihr Geld, und hatte noch 1 fl. Wie viel hatte sie anfangs bey sich? Antwort x fl. Wie sie nach Apolls Tempel ging, hatte sie $2x - 2$, welche auch verdoppelt wurden; und sie behielt $4x - 6 = 1$ fl. also $x = \frac{7}{4}$ fl.

3) Ein Fleischer verdingt 20 Ochsen 12 Monat lang in die Fütterung. Nach 2 Monaten schickt er noch 5 dazu, und nachdem diese zusammen $6\frac{6}{10}$ Monate gezehrt haben, noch 10. Wie lange werden sie zusammen für das bedungene Geld gefüttert werden.

Der Effect ist die Fütterung $E = e$ (§. 138.) $= CT = 20 . 12$ Die Zeit für alle Ochsen wird aber um so viel kürzer, jemehr

dazu

Archangel	64.34.0	56.35.0
Abo	60.27.0	39.35.30
Petersburg	59.56.0	47.59.30
Upsala	59.51.50.	35.17.30
Stockholm	59.20.30.	35 42.30.
Uranienburg	55.54.15.	30.32.30
Moscau	55.45.20	55.36.15
Copenhagen	55.40.45.	30.6.4
Königsberg	54.43.0	39.17.30.
Danzig	54.22.23.	36.11.0
Kiel	54.21.0	28.53.0
Greifswalde	54.14.40.	33.10.30
Lübeck	53.50.22.	28.34.0
Stade	53.36.5.	27.2.0
Hamburg	53.36.0	28.2.30.
Bremen	53.2.0.	26.26.0
Berlin	52.32.30.	31.6.15.
Amsterdam	52.22.45.	22.39.0
Hanover	52.22.18.	27.24.45
Osnabruck	52.16.14.	25.27.30
Warschau	52.14.0.	38.45.0
Dublin	52.12.0	10.49.45
Wolfenbüttel	52.10.0	28.20.0
Leiden	52.8.40.	44.18.45
Oxford	51.44.57.	16.25.0
Halle	51.34.0	29.21.15
Göttingen	51.31.54.	27.34.0
London	51.31.0	17.34.45
Greenwich	51.28.50.	17.41.0
Leipzig	51.19.41.	30.0.0.
Antwerpen	51.13.15.	22.4.15
Dresden	51.6.0	31.20.0

Tobolsk	58.12 30.	86 5 0
Edinburg	55.58.0.	14.34.45

42

Erfurt	51.6.0.	27.55.0
Breslau	51.3.0	34.49.0
Jena	51.2.0.	29.34.15
Colln	50.55.0	24.45.0
Prag	50.4.30.	32.25.0
Frankfurt a. Main	50.6.0.	26.15.0

$$\int \frac{x^{m} dx}{(1+x^n)^{p:n}} \qquad x=0 \quad x=\infty$$

sit $(1+x^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{y}$

$$\int y^p x^m dx \qquad \cancel{n} x^{n-1} dx = -\frac{\cancel{n} dy}{\cancel{n} y^{n+1}}$$

$$= \cancel{\tfrac{n}{n}} \int \frac{y^{p-n-1} dy}{x^{n-m-1}}$$

$$= \int y^{p-n-1} dy \left(\frac{1}{y^n} - 1\right)^{\frac{m+1-n}{n}}$$

$$= \int (1-y^n)^{\frac{m+1-n}{n}} y^{p-m-2} dy$$

hinc

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{(1+x^n)^{p:n}} = \int \frac{y^{p-m-1} dy}{(1-y^n)^{(n-m):n}} \quad \text{i.e}$$

$$[m,p] = (\overline{p-m}, \overline{n-m})$$

$$[n-t \quad u-t+n]$$

$$\left[\cancel{t+u+n}\right] \left[\cancel{t-n}, \cancel{t+n+u}\right] = (t,u)$$

dazu gekommen sind. Sie sey für die ersten 20 allgemein x Monat, so ist sie für die folgenden 5 nur x — 2 Monat, und für die letztern 10 noch x — 8, 6 Monat. Also

$20.x+5(x-2)+10.(x-8,6)=20.12$ die Fundamental-Gleichung.

Oder $20x+5x-10+10x-86=20.12$.

also $35x-96=20.12$; und $x=\frac{20.12+96}{35}=\frac{336}{35}$ $=9\frac{3}{5}$ Monat. Also bleiben die letzten 10 Ochsen nur 1 Monat in der Fütterung.

4) Zwey Brüder sollen sich in 4800 rthl. theilen, mit dem Beding, daß, so oft der eine 5 rthl. hinnimt, der andere nur 4 rthl. nehmen darf, doch soll der letzte noch 300 rthl. besonders haben. Hier ist unbekannt, wie oft jeder zugreifen kann?

Es sey x mal: so ist der Bedingung zufolge $5x+4x+300=4800$ die Fundamental-Gleichung. Also $9x=4500$, und $x=500$. Daher der erste 2500 und der andere 2300 rthlr. bekommt.

Anmerkung. Von eben der Gattung ist folgendes Exempel: Wenn der Fuchs so große Sprünge macht als der ihn verfolgende Hund, und 60 Sprünge voraus hat, aber nur 4 Sprünge thut während der Hund 6 macht: so ist die Frage, in wie viel Sprüngen der Hund ihn einholt?

x ist 30, und in 6.30 Sprüngen hat ihn der Hund eingeholt.

5) Pythagoras gab auf die Frage: wie viel Schüler er hätte, zur Antwort: Wenn ich sagte: die Hälfte studirt Philosophie, ein Drittel die Mathematik, und der vierte Theil übt sich noch im Stillschweigen, so würde die Zahl um 3 größer seyn, als ich wirklich habe.

Er hatte x Schüler und $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})x=\frac{13}{12}x=x+3$, also $13x=12x+36$, und $x=36$; oder $\frac{13}{12}(x-3)=x$, woraus man sieht, daß der Ansatz verschiedentlich gemacht werden kann.

6) Ein Vater hinterläßt 3 Söhne und verordnet, daß von seinem Vermögen der erste 1000 rthl. weniger als die Hälfte der Verlassenschaft, der 2te 800 rthl. weniger als den 3ten Theil der Verlassenschaft, und der 3te 600 rthl. weniger als den 4ten Theil der Verlassenschaft haben soll. Wie groß war die Verlassenschaft, und was bekam jeder?

Die

Die Verlassenschaft sey $= x$, so bekommt der erste $\frac{1}{2}x - 1000$, der 2te $\frac{1}{3}x - 300$ und der 3te $\frac{1}{4}x - 600$, und $\frac{1}{2}x - 1000 + \frac{1}{3}x - 800 + \frac{1}{4}x - 600 = x$; folglich $\frac{13}{12}x - 2400 = x$; also $x = 28800$, davon der erste 13400, der 2te 8800 und der 3te 6600 bekam. Also ein Exempel wie 5.

7) Man sucht eine Zahl, die, 5 mal genommen, so viel unter 40 ist, als sie selbst unter 12 ist. Die Zahl ist x,

$$12 - x = 40 - 5x, \text{ also } 28 = 4x, \text{ und } x = 7.$$

8) 3 Stuck Muskaten-Nüsse kosten eben so viel über 4 pf. als 4 Stück mehr kosten als 10 pf.; oder deutlicher: wenn 4 pf. zu einer gewissen Summe und 10 pf. zu eben dieser Summe gelegt werden: so verhalten sich diese Summen, wie die Zahl der Nüsse. Wie theuer waren sie?

Die 3 sollen $x + 4$ pf. kosten, also $3 : 4 = x + 4 : \frac{4x + 16}{3}$ Preis der 4 Nüsse und $\frac{4x + 16}{3} = x + 10$, folgl. $x = 14$ pf., und 1 Stück kostet 6 pf.

9) Einer giebt dem nächsten Bettler $\frac{1}{6}$ seines Geldes und 1 ggr. darüber, dem andern $\frac{1}{6}$ des Restes und 2 ggr., dem 3ten wieder $\frac{1}{6}$ des Restes und 3 ggr. u. s. w. bis er kein Geld mehr hat. Ein Bettler bekam so viel als der andere. Wie viel Bettler bekamen etwas, und wie viel Geld hatte er?

Sein Geld sey $= x$: so bekam der erste $\frac{1}{6}x + 1$ ggr., und er behält $x - \frac{1}{6}x - 1$ ggr $= \frac{5}{6}x - 1$ ggr. Also der 2te bekam $\frac{5}{36}x - \frac{1}{6}$ ggr. $+ 2$ ggr., und er behielt $\frac{5}{6}x - 1$ ggr. $- \frac{5}{36}x + \frac{1}{6}$ ggr. $- 2$ ggr. $= \frac{25}{36}x - 3$ ggr. $+ \frac{1}{6}$ ggr., wovon der 3te wieder $\frac{1}{6}$ bekam und noch 4 ggr. Weil aber alle gleich viel bekommen: so ist es nicht einmal nöthig dies zu berechnen. Es ist genug, daß man weiß, $\frac{1}{6}x + 1$ ggr. $= \frac{5}{36}x + 2$ ggr. $- \frac{1}{6}$ ggr. oder wenn man alles mit 36 multiplicirt

$$6x + 36 \text{ ggr.} = 5x + 72 \text{ ggr.} - 6 \text{ ggr.} = 5x + 66 \text{ ggr.}$$

$$x = 66 - 36 = 30 \text{ ggr.}$$

Dividirt man dieses Geld mit dem was ein Bettler bekam $= (\frac{30}{6} + 1) = 6$, so ist die Zahl der Bettler $\frac{30}{6} = 5$.

Anmerkung. In allen diesen Exempeln, woraus der Ansatz in sehr vielen andern Fällen beurtheilt werden kann, liegt die §. 176. angegebene allgemeine Form $ax - b = 0$, oder $ax = b$,

zum

$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{120} - \frac{11}{15600} + \frac{211}{3536000} -$ &c

$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} + \frac{7}{40} - \frac{61}{600}$

$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{7}{40}$

[sinlemn]

$\sin\ t + u\sqrt{-1}$

$= \frac{\sin t \cos u\sqrt{-1} + \sin u\sqrt{-1}.\cos t}{1 - \sin u\sqrt{-1}\cos\sqrt{-1}.\cos u \sin u}$ t t

$\frac{1+\frac{x^4}{16}}{1-\frac{x^6}{64}} = \frac{\sqrt{-1}\cos u \frac{\sin t}{\cancel{\cos t}} + \sin.u\frac{\cos t}{\sin u}.\cancel{\sqrt{-1}}}{1 - \frac{\sin t \cos t \cos \sin u}{\cos u}\sqrt{-1}}$ $\frac{\sin t}{\cos u} + \cos t.\sin t\sqrt{-1}$

$\frac{\cos t + \cancel{\sin t \cos u \sin u\sqrt{-1}}}{\sin u - \cancel{\cos u}\cos t \sin t \sqrt{-1}}$ $\frac{\sin t + \cos t \sin t \cos u \sqrt{-1}}{\cos u = \cos t \sin u \sin t \sqrt{-1}}$

$t = \cancel{(2k+1)}R \quad -2kR$
$u = \cancel{(2k+1)}R \quad -2kR$

$1 - 2 + 2 - \frac{8}{5} + \frac{6}{5} - \frac{64}{75}$ | $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{10}$
$+1 - \frac{8}{5} + \frac{6}{5}$
$+1 - 1 + \frac{1}{4}$
$-\frac{3}{5} + \frac{19}{20} - \frac{64}{75}$
$-\frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10}$
$\frac{7}{20} - \frac{83}{150}$ 166
$\frac{7}{20} - \frac{7}{10}$ 105

43

0 R
$\frac{1}{5}$ R
R
R

0
$\frac{2kR}{5} + \frac{2lR\sqrt{-1}}{5}$

$1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{75} -$ &c

$1 - 1 + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{2}{75}$
$1 + 1 + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \frac{2}{75}$
$-2 \quad 0 + \frac{2}{5} \quad 0 - \frac{4}{75}$
$-2 + 2 \quad 0 + \frac{2}{5} \quad 0$
$1 - 2$
$+2 \quad 2 \quad \frac{2}{5} - \frac{2}{5} - \frac{4}{75}$
$-\frac{8}{5} \quad 2 + 2 \quad 0 - \frac{2}{5}$
$+\frac{6}{5} - \frac{64}{75} \quad -\frac{8}{5} - \frac{2}{5} + \frac{26}{75}$
$-\frac{8}{5} - \frac{8}{5} \quad 0$
$+\frac{6}{5} + \frac{26}{75}$

Sit sin ½kR = (k) tum habebuntur aequationes radices

$$\begin{array}{ll} (0) & (0) \\ \pm & (4) \\ \pm & (2) \\ \hline & -(3) \end{array}$$

$$\frac{(4) + (1)(4)(1)\sqrt{-1}}{(1) - (1)(4)(4)\sqrt{-1}} \qquad \frac{(0) + (5)(4)(1)\sqrt{-1}}{(4) - (0)(5)\dots}$$

$$\frac{(4) + (1)(4)(1)\sqrt{-1}}{(4) - (4)(4)(1)\sqrt{-1}}$$

$$\frac{4 - (1)(2)(3)\sqrt{-1}}{(2) + (1)(3)(4)\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{(4) - (1)(2)(3)\sqrt{-1}}{(2) + (1)(3)(4)\sqrt{-1}} \qquad +\frac{(2) - (3)(4)(1)\sqrt{-1}}{(4) + (2)(3)(4)\sqrt{-1}}$$

$$\pm 1, \sqrt{-1} \left[\begin{array}{l} 0 \\ (2) \\ (4) \end{array}\right| \quad \frac{(4)}{(1)} \cdot \frac{1 + (1)(1)\sqrt{-1}}{1 - (4)(4)\sqrt{-1}} \qquad \frac{(2)}{(3)} \cdot \frac{1 + (3)(3)\sqrt{-1}}{1 - (2)(2)\sqrt{-1}}$$

$$(a+b) = \frac{(a)(5-b) + (b)(5-a)}{1 - (a)(5-a)(5-b)b} \qquad \frac{(4)^4 \cdot (1+(4)(4))^2}{(1-(4)(4))^2}$$

$(2)^4$; $(4)^4$

$$\begin{array}{l|l} 0 & 2\ 4 \\ 2 & 2\ 4 \\ 4 & 2 \cdot 4 \end{array}$$

$$\frac{A + aBb\sqrt{-1}}{b - aBA\sqrt{-1}}$$

$$A^4 + B^4 \left(\frac{1-A^2}{1+A^2}\right)^2 \left(\frac{1-BB}{1+BB}\right)^2$$

$$(0,2) + (0,4) + (2)(2) + (2)(4) + (4)(2) + (4)(4)$$

-6

$$\begin{array}{l} 1 + x - y \\ -2xy \\ +xyy \\ -xxy \\ +xxyy \end{array}$$

$$\frac{A^2 + 2abAB\sqrt{-1} - aaBBbb}{bb - 2abAB\sqrt{-1} - aaBBAA}$$

$$\frac{1-BB}{1+BB} - \frac{1-AA}{1+AA} BBAA$$

$$1 + AA - BB - AABB - AABB + AAB^4 - A^4B^2 + A^4B^4$$

zum Grunde. Nur sind a und b verschiedentlich zusammengesetzt. So war zum Beyspiel in 5) und 6) $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, dafür noch allgemeiner $\frac{n}{m} + \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{nqs + pms + rmq}{mqs}$ $= a$ oder wenn n, p, und $r = 1$, $\frac{qs + ms + mq}{mqs}$ hätte gesetzt werden können; welches für $m = 2$, $q = 3$, u. $s = 4$, $\frac{26}{24} = \frac{13}{12}$ gibt, also $ax = \left(\frac{qs + ms + mq}{mqs}\right) x = x + b$ ist die allgemeine Formel für 5 und 6. Auf solche allgemeine Art nun hätte das Exempel 9 auch so ausgedruckt werden können. Eine Größe x zu finden, die in gleiche Theile getheilt ist, und zwar so, daß eine beständige Größe a und der nte Theil des Ganzen so groß ist, als 2a und der nte Theil des ersten Restes, und dieser Theil wieder so groß als 3a und der nte Theil des 2ten Restes u. s. w. Hier ist also die Größe des ersten Theils $= a + \frac{1}{n}x$.

Die Größe des zweiten Theils $= 2a + (x - \frac{1}{n}x - a) : n$ $= \frac{(n-1)}{n^2}x - \frac{a}{n} + 2a$, und $a + \frac{1}{n}x = \frac{(n-1)}{n^2}x - \frac{a}{n} + 2a$, folglich, wenn a auf beyden Seiten abgezogen wird, $\frac{1}{n}x$ $= \frac{(n-1)}{n^2}x - \frac{a}{n} + a$, und wenn alles unter einerley Benennung gebracht und gehörig reducirt wird, $x = n(n-1)a$.

Exempel. Ein Vater hinterläßt einige Kinder, und ein Vermögen, das unter sie vertheilt werden soll. Der erste bekommt aber 100 rthl. und $\frac{1}{10}$ des Vermögens, der 2te 200 rthl. und $\frac{1}{10}$ des Restes u. s. w. Wie groß war das Vermögen, und wie viel Kinder hatte er?

n ist hier $= 10$ und $a = 100$, also das Vermögen $x = 10 . 9 . 100 = 9000$ rthl. Das erste bekommt, wie jedes andere Kind 1000 rthl. also hatte er 9 Kinder.

Um zu zeigen, wie sorgfältig man bey dem Ansatz der Fundamental-Gleichung auf alle Umstände Acht haben müsse, wollen wir dasselbe Exempel wieder vornehmen, mit der einzigen Veränderung, daß jedes Erbtheil aus der vorhin bestimmten beständigen Größe und dem nten Theile des Restes bestehen soll. Also der erste bekommt

$$a + \frac{x-a}{n} = \frac{x}{n} + \frac{(n-1)a}{n} = \frac{nx}{n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2}a.$$

Der 2te bekommt $2a + \left(x - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)a}{n} - 2a\right) : n$

$$= \frac{(n-1)x - (n-1)a + 2n(n-1)a}{n^2}.$$

Also

Also da alles in den letzten Theilen der Gleichung auf einerley Benennung gebracht ist

$nx + n(n-1)a = (n-1)x - (n-1)a + 2n(n-1)a$

und $x = n(n-1)a - 1.(n-1)a = (n-1)(n-1)a = (n-1)^2 a.$

Dies giebt für $n = 10$ u. $a = 100$, $x = 8100$, und das Erbtheil eines jeden $= 100 + 800 = 900$, folglich wieder 9 Kinder

§. 179. **Auflösung solcher einfachen bestimmten Gleichungen, wo mehr als eine unbekannte Größe vorkommt.**

Es kommt alles darauf an, das Verhältniß der unbekannten Größen gegen einander zu bestimmen, damit man die unbekannten Größen bis auf eine wegschaffen oder eliminiren könne. Dies geschieht nun

I. wenn man aus allen Gleichungen den Werth einer unbekannten Größe sucht. Diese verschiedenen Werthe hernach gleich gesetzt, geben Gleichungen, worin schon eine unbekannte Größe fehlt. Aus diesen sucht man wieder den Werth einer andern unbekannten Größe, die dadurch eliminirt wird, und so fährt man fort, bis man endlich nur eine unbekannte Größe in der Gleichung behält, deren Werth in einer der vorhergehenden substituirt, die andere unbekannte, und dieser Werth, in einer vorhergehenden substituirt, die dritte unbekannte Größe u. s. w. giebt. Oft giebt dies sehr weitläuftige und verwickelte Rechnungen. Oft aber hat man auch dabey große Vortheile, die die Rechnungen sehr abkürzen. Dergleichen findet man in folgendem Exempel:

$$x + y - z = a;\ x + z - y = b;\ y + z - x = c.$$

also $x = a + z - y = b + y - z = y + z - c.$

Setzt man nun $a + z - y = y + z - c$

so findet man sogleich $2y = a + c$, oder $y = \frac{a+c}{2}$

ferner $b + y - z = y + z - c$

giebt $b + c = 2z$, also $z = \frac{b+c}{2}$

also $x = a + \left(\frac{b+c}{2}\right) - \left(\frac{a+c}{2}\right) = \frac{a+b}{2}.$

II. Man

$0; \pm \Pi\ ;\ 2\Pi\ ;\ 3\Pi\ ;\ 4\Pi$ &c.

$0 \pm \Pi\sqrt{-1}\ ;\ \pm\Pi \pm \Pi\sqrt{-1}$ &c

$0 \pm 2\Pi\sqrt{-1}\ ;\ \pm\Pi \pm 2\Pi\sqrt{-1}$ &c &c

$$\left(1-\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{81\Pi^4}\right)\cdots$$

$$\cancel{\frac{x}{\Pi}}\ \Big|\ \Pi\ \pm \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \pm & 1 \\ 2 & & 2 \\ 3 & & 3 \\ 4 & & 4 \\ 5 & & 5 \end{vmatrix} \sqrt{-1}$$

$1+k\sqrt{-1}$

$1-k\sqrt{-1}$

$$\frac{1-k\sqrt{-1}}{1+kk}$$

$$\cancel{\left(1-\frac{x^4}{4\Pi^4}\right)}$$

$$\cancel{\left(1-\frac{x^2}{2\Pi^2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{8\Pi^2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{18\Pi^2}\right)}\cdots$$

$$\Sigma\frac{1}{\rho^4} = 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+ \&c.\right)\ \pi^3$$

$$\Sigma\,\frac{m^4 - 6\,mm\,nn + n^4}{(mm+nn)^4}$$

$$\Sigma$$

$$\frac{1-v}{(1+v)\sqrt{1+v}}\qquad 2\frac{1+v}{\sqrt{v}} \qquad 1-v \qquad \frac{2}{1-vv}$$

$$\frac{2\sqrt{v}}{1+v} - \frac{\frac{1+v}{2\sqrt{v}}\,(1-v)^2}{2(1+v)\,v^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{v^{\frac12}}{(1+v)^3}\ \left(\frac{2v^{\frac12}}{1+v}\right) \qquad \frac{2^{\frac12}}{(1+v)}\left(K\frac{2v^{\frac12}}{1+v} - K\frac{2v^{\frac12}}{1+v}\right) =$$

$$\left(Kv - vLv\right)$$

$$1+\tfrac12\cdot\tfrac12 vv + \tfrac12\cdot\tfrac12\cdot\tfrac34\cdot\tfrac34 v^4 + \text{etc.} = K$$

$$\tfrac12 v + \tfrac12\cdot\tfrac12\cdot\tfrac34 v^3 + \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}v^5 + \text{etc.} = L$$

$$\frac{\partial k}{\partial v} = \frac{v\,dL}{dv}$$

$$\frac{v\,\partial v K}{\partial v} = \frac{\partial vL}{\partial v}$$

$$Kv = \frac{1}{M\sqrt{(1-vv)}} = \frac{1}{1+v\ M\frac{1-vv}{1+v}}$$

$k' = vL'$

$vK + vvK' = L + vL'$

$\frac{1+v}{1-v}\qquad \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}}$

$$K + \left(v-\frac{1}{v}\right)K' = L$$

$$(1+v)Kv = K\frac{2\sqrt{v}}{1+v} \qquad \frac{2\sqrt{v}}{1+v} = u$$

$4v$

$$\left.\begin{matrix}(1+v)K'v \\ +Kv\end{matrix}\right| = K'\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\times\frac{1-v}{(1+v)^2 v^{\frac12}}$$

$$\cancel{1+v+\tfrac14 vv}$$

$$1+\tfrac14 vv + \tfrac{9}{64}v^4\ldots = 1$$

$$\frac{1+v}{v^{\frac12}} - 2v^{\frac12}$$

44

[coslemn]

$$\cos.(t+u\sqrt{-1}) = \frac{\frac{\cos t}{\cos u} - \sin t \sin u\sqrt{-1}}{1+\frac{\cos t}{\cos u}\sin t\sin u\sqrt{-1}} = \frac{\cos t - \sin t\cos u\sin u\sqrt{-1}}{\cos u - \sin u\cos t\sin t\sqrt{-1}}$$

Also d. $\cos = 0$ fur $t=(2k+1)R$, $u = 2kR$ | $=\infty$ fur $u=(2k+1)R$, $t = 2kR$

$\pm m \pm n\sqrt{-1}$

$u=0$ | $1\pm\frac{x}{R}$ $\quad 1\pm\frac{x}{3R}$ etc ...

$xx - (mm - nn) \pm \sqrt{-1}$

$x^4 - 2(mm - nn)xx + m^4$ [illegible]

$$\cos u = \frac{\left(1-\frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\cdots}{\left(1+\frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\cdots}$$

$$\times \left(\frac{1-\frac{2(mm-nn)}{(mm+nn)^2}\frac{xx}{\pi\pi}+\frac{x^4}{(mm+nn)^2\pi^4}}{1+\frac{2(mm-nn)}{(mm+nn)^2}\frac{xx}{\pi\pi}+\frac{x^4:\pi^4}{(mm+nn)^2}}\right)$$

Positis pro $\left\{\begin{matrix}m\\ n\end{matrix}\right\}$ omnibus numeris $\left\{\begin{matrix}\text{impari}\\ \text{pari}\end{matrix}\right\}$

$1 - xx + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{10}x^6$

$\frac{16}{\pi^4}(1{,}014678) + \sum \frac{6m^4 - 6mmnn + n^4}{(mm+nn)^4}$

$$\frac{1-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{240}x^6}{1+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{240}x^6}$$

$\frac{4(mm-nn)^2}{(mm+nn)^4} - \frac{2}{(mm+nn)^2} + \sum\left(\frac{41}{625} + \frac{353}{[illegible]17^4} + \text{etc}\right.$

-1

$+\frac{1}{4}$

$-\frac{2}{10}$

$+\left(\frac{313}{13^4}\cdots\right.$

$mm+2n$

$m^4 + 2m^2n^2 + n^4$

$-2m^4 - 4$

$\frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$

81 $\quad$ 0,0656 $\quad$ 21 12 07

216 $\quad$ 4

163 13 $\quad$ 11

$\frac{16}{\pi^4}(1{,}014678)$ $\quad$ 0,08

16. 0,934 $\quad$ $-\frac{4}{1}$ 1,23

π^8 $\quad$ 8,72

8,72

$9+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}$

$\underbrace{}_{-\frac{1}{20}}$

2,954

$9-\frac{1}{120}$

II. Man nimmt aus 2 und 2 Gleichungen die Coefficienten des Gliedes das man eliminiren will, und multiplicirt damit wechselsweise die Gleichung. Zieht man alsdenn die eine Gleichung von der andern ab: so fällt dies Glied weg. Es sey

1) $ax + dy + gz = l$; 2) $bx + ey + hz = m$, und
3) $cx + fy + kz = n$.

Man multiplicire die Gleichung 1 mit b, und die Gleichung 2 mit a,

so bekommt man $abx + bdy + bgz = bl$
und $abx + aey + ahz = am$,
also $(ae - bd)y + (ah - bg)z = am - bl$.

ferner die Gleichung 1 mit c und die Gleichung 3 mit a multiplicirt und 1 von 3 subtrahirt, giebt

$acx + cdy + cgz = cl$
und $acx + afy + akz = an$:
folglich $(af - cd)y + (ak - cg)z = an - cl$.

Hätte man nun statt der Buchstaben Ziffern: so würden die Glieder der Gleichungen sogleich darin ausgedruckt, und wegen des Subtractions-Zeichen auf kleinere Zahlen gebracht werden können; Man kann aber eben diesen Vortheil und zwar noch bequemer durch die Substitution anderer Buchstaben erhalten. Es sey nämlich $ae - bd = \alpha$; $ah - bg = \beta$; $am - bl = \gamma$; $af - cd = \delta$; $ak - cg = \varepsilon$; $an - cl = \zeta$:

so wird I) $\alpha y + \beta z = \gamma$ und II) $\delta y + \varepsilon z = \zeta$,
also $\alpha\delta y + \beta\delta z = \delta\gamma$ und $\alpha\delta y + \alpha\varepsilon\zeta = \alpha\zeta$.

Subtrahirt man nun die zweyte von der ersten: so ist

$(\alpha\varepsilon - \beta\delta)z = \alpha\zeta - \gamma\delta$, also $z = \dfrac{\alpha\zeta - \gamma\delta}{\alpha\varepsilon - \beta\delta}$

$$= \frac{(ae - bd)(an - cl) - (am - bl)(af - cd)}{(ae - bd)(ak - cg) - (ah - bg)\cdot(af - cd)}.$$

Ferner um y aus I) und II) zu bekommen, schaffe man z weg, indem man I) mit ε und II) mit β multiplicirt.

Also $\alpha\varepsilon y + \beta\varepsilon z = \varepsilon\gamma$ und $\beta\delta y + \beta\varepsilon z = \beta\zeta$, woraus die Gleichung $(\alpha\varepsilon - \beta\delta)y = \varepsilon\gamma - \beta\zeta$ gefunden wird.

 Also

Also $y = \frac{\varepsilon\gamma - \beta\zeta}{\alpha\varepsilon - \beta\delta}$

$$= \frac{(\alpha K - cg)(am - bl) - (ah - bg)(an - cl)}{(ae - bd)(aK - cg) - (ah - bg)(af - cd)}.$$

Woraus $x = \frac{l - dy - gz}{a}$ leicht gefunden wird, wenn man die gefundenen Werthe von z und y substituirt. Uebrigens kann die Stellung der Größen, wenn sie etwa bey wirklich gegebenen Zahlen nach der hier gewählten Verbindung negative Werthe geben sollte, leicht anders gemacht werden.

III. Bisweilen kann man sich durch Proportionen helfen. Z. B. Man hat 4 unbekannte Zahlen x, y, z und u, und das gegebene Verhältniß der ersten zur andern $= m:n$, auch der zweyten zur dritten $= p:q$. Außerdem sollen alle 4 in der gegebenen Ordnung eine geometrische Proportion ausmachen, und ihre Summe $= a$ seyn. Aus diesen Angaben weiß man sogleich

$$y = \frac{nx}{m};\ z = \frac{qy}{p} = \frac{qnx}{pm};\ u = \frac{y \cdot z}{x} = \frac{qn^2x}{pm^2}$$

und wenn man alles unter einerley Benennung bringt,

$$x + y + z + u = \left(\frac{pm^2 + pmn + qmn + qn^2}{pm^2}\right)x = a.$$

also $x = \frac{apm^2}{(pm + qn)(m + n)}$.

Es sey $m = 3$, $n = 4$, $p = 5$, $q = 6$, $a = 910$, so ist $x = \frac{40950}{273} = 150$.

Dergleichen Vortheile werden sich in der Anwendung noch mehrere zeigen lassen.

Exempel 1) Einer hat 2 Tabattieren; legt er in die erste 10 rthl., so ist sie noch mal so viel werth als die andere; legt er aber diese 10 rthl. in die andere, so sind beide gleich viel werth. Wie groß ist der Werth einer jeden?

Der Werth der ersten sey $= x$, und der andern $= y$. So ist $x + 10 = 2y$ und $y + 10 = x$,

also $\underline{x - 10 = y.}$ Addirt man beide Gleichungen: so ist

$2x = 3y$. Also $3:2 = x:y$ und $y = \frac{2}{3}x$.

Also

$1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{240}x^6 - \frac{1}{2880}x^8 - \frac{1}{28800}x^{10}$

$+\frac{1}{2} \mid +\frac{1}{3} \mid +\frac{1}{5} \mid \frac{11}{96} \mid$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} \mid$

$\frac{1}{10} + \frac{1}{72} + \frac{1}{480} + 4p = \frac{1}{8,72}$

$-\frac{1}{0,068751818 1}$

$\frac{167}{1440}$ $\frac{11}{96}$ Coni. $= \frac{7}{60}$ $\frac{1169}{10080}$

$-\frac{1}{0,034375909}$
196944
1354
8

$-9 - \frac{1}{2880} - \frac{1}{480} + \frac{3}{240} - \frac{7}{80} + \frac{61}{600} = 1$

0,034377263
196952
0,034574215

$-10 - 60 - 420$ 488

$-\frac{1}{2400}$

8
3
87276 40632222 0,965425785
9697 1,034180311
78579 5666
555
13544074

$\frac{11}{192} + \frac{1}{120} + \mid \frac{1}{720} + \frac{1}{5760} + \frac{1}{5760}$

$\frac{1}{576}$

17043364101..
1442131654 7...
9177201439
36708805756
9177
917
1718795454 1

$\frac{1,7}{250}$

330
10
48

$\frac{388}{5760}$ $\frac{97}{1440}$

1210347
216

$$\frac{x - \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{10080}x^9}{e^{\frac{1}{2}\frac{xx}{\varpi\varpi}\pi}}$$

3

37823343

1. 1,31102877
2. 1,71879545
4 2,95416
5 3,87311
6 5,07777
8 8,72765
9 11,44320
10 15,001

sin 36°

0,524411511
661011
116
0,523750384

1 +

1,006302208
567

524411511
661011
292
523750208

$\frac{0,0256}{12}$ 1,0

$\frac{1}{13}$

387311
774622
154924
39660646
66101

1144320
-3 228
1167
1158

$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{120}$

295416
590832
6203736
98472
6302208

65536
-8
65016
520128
45511
1300
455
39
3

567436

45

36°

$\dfrac{0.523750\cancel{384}^{208}}{1,006301641} : =$

523750208 | 0,5204703904
5031508205
205993875
201260328
4733547
4025207
708340
704411
3929
3019
910
906

$72^\circ = \cos. 18^\circ$

$\dfrac{0,965425785}{1,034180311}$

9654257850 | 0,933518?577
9307622799
346635051
310254093
36380958
31025409
5354549
5170902
183647
103418
80229
72393
7896
7239
597

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x^b)^c} = \frac{-\,x^{a-b}}{b(c-1)\,(1+x^b)^{c-1}} + \frac{a-b}{b(c-1)} \int \frac{x^{a-b-1}dx}{(1+x^b)^{c-1}}$$

$$= \frac{1}{a-bc}\,\frac{x^{a-b}}{(1+x^b)^{c-1}} - \frac{a-b}{a-bc}\int \frac{x^{a-b-1}dx}{(1+x^b)^c}$$

$$= \frac{1}{a\cancel{-b}}\,\frac{x^a}{(1+x^b)^{c-1}} - \frac{a-bc+b}{a\cancel{-b}}\int \frac{x^{a+b-1}dx}{(1+x^b)^{c\cancel{+}}}$$

0145962
0583848

9847189
9388756

8687116
1,1438913
9,0126029

3037581
0027282
3010299
3017165

$= l\, \frac{e}{\,}^{\frac{2}{5}\varpi}$

Also $x - 10 = \frac{2}{3}x$, oder $\frac{1}{3}x - 10 = 0$. Daher $x = 30$, und $y = 20$.

2) Einer kauft 20 Pfund Rosinen und 24 Pfund Pflaumen um $2\frac{1}{4}$ rthl. = 54 ggr. Ein anderer kauft um denselben Preis 24 Pfund Rosinen und 30 Pfund Pflaumen für $2\frac{3}{4}$ rthl. = 66 ggr. Wie viel kostet das Pfund von jeder Gattung?

Das Pf. Rosinen kostet x ggr. und das Pf. Pflaumen y ggr. also $20x + 24y = 54$ ggr. oder $10x + 12y = 27$ ggr. und $24x + 30y = 66$ ggr. oder $4x + 5y = 11$ ggr. Letzte Gleichung giebt $x = \frac{11 - 5y}{4}$. Dieser Werth in die erste Gleichung gesetzt, giebt $\frac{10.(11-5y)}{4} + 12y = 27$, oder $10 . 11 - 10 . 5y + 4 . 12y = 4 . 27$. Daher $y = \frac{4.27 - 10.11}{4.12 - 10.5} = \frac{-2}{-2} = +1$.

Man hätte auch setzen können $10 . 11 - 4 . 27 = (10.5 - 4.12)y$, wodurch die Werthe im Zähler und Nenner positiv geworden wären. Es ist aber nach §. 39. einerley.

Nach der vorhin gegebenen IIten Regel hätte man sogleich y gefunden, wenn die erste Gleichung durch 4, und die zweyte durch 10 wäre multiplicirt worden.

Nemlich $4.10x + 4.12y = 4.27$

und $\underline{10.4x + 10.5y = 10.11}$

$(10.5 - 4.12)y = 10.11 - 4.27$

und $y = \frac{10.11 - 4.27}{10.5 - 4.12}$.

3) Drey Zahlen zu finden, wovon die Summe der ersten und zweyten $= x + y = a$, ferner die Summe der ersten und dritten $= x + z = b$, und die Summe der zweyten und dritten $= y + z = c$ gegeben sind.

Auflösung. 1) $a - b = x + y - x + z = y + z$. 2) $a - b + c = y - z + y + z = 2y$; Also 3) $y = \frac{a - b + c}{2}$; folgl. 4) $x = a - y = a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = \frac{a + b - c}{2}$; 5) $z = c - y = c - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = \frac{c + b - a}{2}$.

Es

Es sey $a = 12$; $b = 16$; $c = 14$: so ist $y = 5$; $x = 7$; $z = 9$.

§. 180. Aufgabe. **Eine reine Gleichung aufzulösen.**

In der Gleichung §. 175. $x^m = A$ ist $x = \sqrt[m]{A}$; oder $l.x = \frac{1}{m}\, l.A$. Hier aber kann

1) A positiv oder negativ seyn. Im ersten Falle ist $\sqrt[m]{A}$ allemal eine mögliche Größe, m mag gerade oder ungerade seyn; und zwar hat x für die gerade Zahl m zwey gleiche aber entgegengesetzte mögliche Werthe oder **Wurzeln** $= \pm \sqrt[m]{A}$; die übrigen Werthe sind unmögliche Größen an der Zahl $m-2$. Ist m ungerade, so giebt $\sqrt[m]{A}$ nur einen möglichen Werth, die übrigen sind unmöglich an der Zahl $m-1$, welches für $m = 2n+1$ die gerade Zahl $2n$ giebt.

2) Ist A negativ, so hat $x = \sqrt[m]{-A}$ für die gerade Zahl m lauter unmögliche Wurzeln, und für $m = 2n+1$ eine mögliche, und $2n$ unmögliche Wurzeln.

Also $\sqrt[2n]{+A} = \pm x = \sqrt[n]{+A^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{}.\sqrt[n]{A}$.
$\sqrt[2n+1]{-A} = -x$. $\sqrt[6]{64} = \sqrt{}.\sqrt[3]{64} = \sqrt{4} = 2$.

§. 181. Zusatz. Es sey $x = z + a$: so ist $x^m = (z+a)^m = A$ auch eine reine Gleichung.

§. 182. **Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.**

Ihre allgemeine Form ist A) $ax^2 + bx + c = 0$ (§. 176.) Es müssen aber allemal solche Formeln, wie §. 176, wenn sie aufgelöset werden sollen, zuerst mit a, dem Coefficienten des höchsten Gliedes, dividirt werden. Dadurch bekommt man aus A die Gleichung $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Man setze dafür B) $x^2 + px + q = 0$, wo p und q ganze oder gebrochene, einfache oder zusammengesetzte, positive oder negative, rationale oder irrationale Zahlen bedeuten können.

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x^b)^c} = \frac{1}{b(c-1)}\frac{x^a}{(1+x^b)^{c-1}} + \frac{bc-a-b}{bc}\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x^b)^{c-1}}$$

$$\int \frac{xx\,dx}{(1+x^4)^{5:4}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)}}$$

$\int$

70710678[illegible]

$$\text{sin. lemn. } a = 0,9550060 \text{ sin. } a$$
$$- 0,0430$$

9550863[illegible]
4490998
9101764[illegible] 9568 66[illegible]
331

54 61
637
73
1
6172

$9101 7972 \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

637125804
6371258
91018
643588080
9120 6172
64359425

46

$$\begin{aligned}
\text{sin. lemn. } a = {} & 0{,}95500599 \text{ sin } a \\
- {} & 0{,}04304950 \text{ sin } 3a \\
+ {} & 0{,}00186048 \text{ sin } 5a \\
- {} & 0{,}00008040 \text{ sin } 7a \\
+ {} & 0{,}00000347 \text{ sin } 9a \\
- {} & 0{,}00000015 \text{ sin } 11a \\
+ {} & 0{,}00000001 \text{ sin. } 13a
\end{aligned}$$

9550 0599
860 9900
18 6048
1
10429 6548
8752
10428 7796
5214 3898

1	1,
$\frac{1}{2}$	0,64359425
	~~0,52143898~~
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,43542054

9550 0599
18 6048
8040
15
1
9569 4703
861 0594
4708 4109

08609900
694

posito $\sin.\,\varphi^{\circ} = s$, atque φ express. in gradibus

arcus. cuius sinus lemnisc. $= s$ erit in gradibus

$$
\begin{aligned}
= {} & \varphi^{\circ} \\
+ {} & 4^{\circ},933559 \sin 2\varphi \quad \left(\frac{90}{\pi} - \frac{90}{\varpi\varpi} \quad 0,0861\right. \\
+ {} & 0,317820 \sin 4\varphi \\
& 0,030313 \sin 6\varphi \\
& 0,003414 \sin 8\varphi \\
& 0,000422 \sin 10\varphi \\
& 0,000055 \sin 12\varphi \\
& 0,000007 \sin 14\varphi \\
& 0,000001 \sin 16\varphi
\end{aligned}
$$

Ex aequatione

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)}} \qquad y = x + a\sin 2x + b\sin 4x + c\sin 6x \,\&c.$$

invenitur

$$
\begin{aligned}
\sin x = {} & \sin y - \qquad\quad \tfrac{1}{2}b\sin 3x - \tfrac{1}{2}c\sin 5x \ldots \\
& -\tfrac{1}{2}a \quad - \\
& +\tfrac{1}{4}aa \quad - \tfrac{1}{12}aa \\
& +\tfrac{1}{4}bb \\
& +\tfrac{1}{4}cc \\
& -\tfrac{1}{4}ab \\
& -\tfrac{1}{4}bc \\
& -\tfrac{1}{4}cd
\end{aligned}
$$

1 2 $\frac{32}{3}$ 34

$\frac{8552}{58}$ 861 $\frac{176}{5}$

$\frac{1}{4}a^3 \sin 2x$ $\quad \frac{1}{8}a^3 \sin x$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2.3.4}$ $\quad \frac{1}{2.3.4.5.6}$

$\frac{1}{\frac{3}{4}}$ $\quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{1}{2}$

$1 \quad \frac{1}{2.9} \quad \frac{1}{2.3.4.5} \quad \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$

$\frac{1224}{7}$ 110 3672 3562

$\frac{aa}{2} \quad \frac{1}{2}\cos(1 - \cos 4x)$

$\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 5x$

$+\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{6}$

$$1 - \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{64}a^4 - \left(\frac{1}{2.4.6}\right)^2 a^6 \ldots$$

$\sin 2x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 3x$

$\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2}a \quad -\frac{1}{4}aa \quad -\frac{1}{48}a^3$

$$-\tfrac{1}{2}a + \frac{1}{2.2.4}a^3 - \frac{1}{2.2.4.4.6}a^5$$

1 $\quad -0,04305$ $\quad +0,00185$

.. 741321

können. Vergleicht man B mit $(z+a)^2$ (§. 181.) $= z^2 2az + a^2$, so ist $p = 2a$, und $\frac{1}{2}p = a$, also $\frac{1}{4}p^2 = a^2$, fehlt an $x^2 + px = -q$, um eine reine Gleichung daraus zu machen. Man setze also

C) $x^2 + px^2 + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$: so ist $(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, folgl. D) $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ und daher

1) $x = \frac{-p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$ u. 2) $x = \frac{-p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$.

Anmerkung. Ist in B q negativ, so sind beide Wurzeln von x allemal möglich. Ist aber q, wie das Zeichen es hier ergiebt, positiv, folglich 4q unter dem Wurzelzeichen negativ: so darf 4q nicht größer als p seyn; weil sonst $p^2 - 4q$ eine negative Größe $= -A$ seyn würde, also $\sqrt{-A}$ eine unmögliche Größe.

§. 183. Hiernach können nun die Gleichungen §. 174. leicht aufgelöset werden. Nämlich 1) $y^2 + y - 20 = 0$, mit B §. 182. verglichen, giebt $p = +1$ und $q = -20$, folglich nach D §. 182. ist $(y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1 + 4.20}{4}$; also a) $y = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2} = 4$, b) $y = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2} = -5$. Ist nun $x + y = 20$: so ist x im ersten Fall $= 16$, und im zweyten $= 25$.

2) Ist $y = \sqrt{x}$ und $x + \sqrt{x} = 20$: so bekommt man $\sqrt{x} = 20 - x$; folglich, wenn man beides quadrirt nach §. 55, $x = 400 - 40x + x^2$, und gehörig geordnet, $x^2 - 41x = -400$. Also $\frac{1}{2}p = -\frac{41}{2}$ und $\frac{1}{4}p^2 = \frac{1681}{4}$. Dies giebt $(x - \frac{41}{2}) = \frac{1681 - 4.400}{4}$; also $x = \frac{41 \pm \sqrt{81}}{2}$ oder $x = 25$ und $x = 16$.

3) Ist $xy = 64$, und $x + y = 20$; also $x = 20 - y$, und daher $xy = (20 - y)y = 64$: so findet man $y^2 - 20y = -64$, und $y = 10 \pm \sqrt{(100 - 64)}$. Also $y = +16$, auch $y = +4$.

§. 184. Zusatz. Man bemerkt also in Ansehung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung folgendes:

1) Jede quadratische Gleichung hat 2 Wurzeln: die reine 2 gleiche entgegengesetzte, die unreine 2 ungleiche, die beide positi-

positiv oder beide negativ, oder eine positiv und die andere negativ seyn können.

2) Die Wurzeln sind in beiden entweder beide möglich, oder beide unmöglich.

§. 185. In Ansehung der Anordnung einer Gleichung vom zweyten oder höhern Grade ist ausser dem, was §. 176. und 177. bereits darüber gesagt ist, nur noch der Fall zu erklären, wenn die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen steht (§. 183. 2.) Man bringt sie auf eine Seite und alles übrige auf die andere, um dieses zu der Potenz zu erheben, welche der Exponent des Wurzel-Zeichens anzeigt. Alsdann fällt dieses weg, und man kann die sämtlichen Glieder der Gleichung nach §. 176. so ordnen, daß die höchste Potenz der unbekannten Größe mit dem positiven Zeichen zuerst steht. Kommen mehrere solche Größen unter Wurzel-Zeichen vor: so ist diese Arbeit öfter zu wiederholen.

Wollte man zum Beyspiel wissen, aus welcher Gleichung $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(f^2-4g)}}{2}}$ entstanden sey: so findet man zuerst $x^2 = \frac{-f \pm \sqrt{(f^2-4g)}}{2}$; also $x^2 + \frac{1}{2}f = \frac{\pm\sqrt{(f^2-4g)}}{2}$ und $(x^2 + \frac{1}{2}f)^2 = x^4 + fx^2 + \frac{1}{4}f^2 = \frac{f^2-4g}{4}$. Also wenn $\frac{1}{4}f^2$ auf beyden Seiten subtrahirt, und die Gleichung auf Null gebracht wird, $x^4 + fx^2 + g = 0$ eine Gleichung vom 4ten Grade, die gleichwohl wie B §. 182 aufgelöset werden konnte.

§. 186. Zusatz. $\frac{-f \pm \sqrt{(f^2-4g)}}{2}$ ist das Quadrat von $\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(f^2-4g)}}{2}}$. Um den letzten Ausdruck aus dem ersten leichter zu bestimmen, setze man den letzten Ausdruck $= p + q$, den ersten aber $= a + \sqrt{b} = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Dies giebt eine bequeme Methode zur Auflösung folgender Wurzel-Gleichung: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(a + \sqrt{b})}$. Setzt man hier $p = \sqrt{x}$ und $q = \sqrt{y}$, also $p^2 = x$; $q^2 = y$; u. $2pq = 2\sqrt{x}.\sqrt{y} = 2\sqrt{xy}$ (§. 44.)

so

974 12.3

0.	0.	.1		0.1	30.14	
1.	0	3	529+441+4	1.1	10	484.441.49
2	0	9		2.1	30.4	
3	0	27	900+49+25	3.1	11	676.289.9
4	0	18		4.1	31	
5	0	6	361+324+289	5.1	26	625.324.25
6	0	2		6.1	15	
				7.1	5	729.196.49
				8.1	15	
				9.1	22	529.324.121.
				10.1	25	
				11.1	13	961.9.4.
				12.1	30	

676.289.9
26.17.3
324 113
529 121 925
23 3 9 4 3
18 2 4 .6 1
11 3 9 .24 3
484 441 49
22 21 7

47

$1.$

$\frac{1}{2}.2$

$\frac{1}{2}.1.1$

$\frac{1}{3}.3$

$\frac{1}{2}.1.2$

$\frac{1}{6}.1.1.1$

$\frac{1}{4}.4$

$\frac{1}{3}\ 1.3$

$\frac{1}{8}\ 2.2$

$\frac{1}{4}.1.1.2$

$\frac{1}{24}\ 1.1.1.1.$

$$3\Sigma 3 = (1)\Sigma' 2 + 2(2)\Sigma'' 1 + 3(3)\Sigma''' 0$$

$$\cancel{3\Sigma 2 = (1)\Sigma' 1 + 2(2)\Sigma'' 0}$$

$$\cancel{\Sigma 1 = (1)\Sigma' 0}$$

$$3\Sigma' 3 = \Sigma' 2 + (1)\Sigma''' 2$$
$$+$$

$$\frac{1}{4}.1.A + \frac{1}{4}(2)B + \frac{1}{4}(3)C + \frac{1}{4}(4)$$

$$\frac{1}{4}.1.B + \frac{1}{4}(2)$$

$$\frac{1}{4}.1.C$$

$$\frac{1}{4}.1$$

$$\frac{1}{4}.1.4 + \frac{1}{2}$$

$$5.(V) = (1)(IV) + (2)(III) + (3)(II) + (4)(I) + (5)$$
$$+(1)(III) + (2)(I)$$
$$+(1)(II)$$
$$+(1)(I)$$
$$+(1)$$

$$5\Sigma 5 = (1)\Sigma' 4 + 2(2)\Sigma'' 3 + 3(3)\Sigma''' 2$$

$x.x+1.x+2.x+3$

$4\ x.x+1.x+2.$

12

$1 + x + \frac{1}{2}.x.x+1 + \frac{1}{6}.x.x+1.x+2$

$$5.V = (1)\,IV +$$
$$(p-1)IV + (p^2-1)III + (p^3-1)II + (p^4-1)I + p^5 - 1$$

$$3\Sigma 3 = (1)\Sigma' 2 + 2(2)\Sigma'' 1$$
$$+3(3)\Sigma''' 0$$

$$p\,IV + p^2 III + p^3 II + p^4 I + p^5 = 5p^5 - 4p^4$$
$$-IV - III - II - I \ldots\ldots \quad -p^4 + 1$$

$$p^4 - p^3$$

$$p\,IV + p^2 III + p^3 II + p^4 I \quad V$$

$A, B B', C$

A'	$A\,A\,A$	$B\,A$	A
B	$A\,A\,A'$	$B'A$	C
B'	$A\,A'A'$	$B\,A$	C
	$A\,B$	$B'A$	C
	$A\,B'$		

so ist $x+y+2\sqrt{xy}=(p+q)^2=a+\sqrt{b}$. Es sey ferner
1) $x+y=a$, so ist $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, also $4xy=b$.
2) $(x+y)^2=a^2=x^2+2xy+y^2$; also $a^2-b=x^2+2xy+y^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$; also $x-y=\sqrt{(a^2-b)}$. Vorher war $x+y=a$, also die Summe von beyden $=2x=a+\sqrt{(a^2-b)}$, und die Differenz von beyden $2y=a-\sqrt{(a^2-b)}$; folglich $x+y=\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}+\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}$. Eine sehr bequeme Formel für solche Wurzel-Gleichungen, wenn anders $\sqrt{(a^2-b)}$ rational, oder a^2-b ein Quadrat ist.

Exempel 1) Man sucht 2 Zahlen, deren Summe $=5$, und deren Product $=2\frac{1}{4}$ ist. Hier ist $x+y=5=a$, und $xy=2\frac{1}{4}$, folgl. $4xy=9=b$; also

$$x=\frac{5+\sqrt{(25-9)}}{2}=\frac{5+4}{2}=4\tfrac{1}{2}$$

$$y=\frac{5-\sqrt{(25-9)}}{2}=\frac{5-4}{2}=\tfrac{1}{2},$$

also $x+y=5$ und $x.y=(4+\frac{1}{2})\frac{1}{2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$.

2) Man sucht 2 Zahlen x und y, deren Produkt $xy=60$, und deren quadrate Summe $=x^2+y^2=136$ ist. Da $2xy=120$; so ist $x^2+2xy+y^2=256=a^2$; also $a=16$ und $4xy=240=b$. Also $\pm\sqrt{(a^2-b)}=\pm\sqrt{(256-240)}=\pm 4$; $x=\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}=\frac{16+4}{2}=10$;
$y=\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}=6$. Diese Auflösung ist weit leichter als wenn man nach der gewöhnlichen Art den Werth von $y=\frac{60}{x}$, also $y^2=\frac{3600}{x^2}$ substituirt hätte. Letzteres gäbe nämlich eine Gleichung vom 4ten Grade $x^4+3600=36x^2$, oder $x^4-136x^2+3600=0$, die folglich nach der hier gelehrten Methode aufgelöset werden kann.

3) Man sucht 2 Zahlen x und y, deren Summe $=6$ und deren Product $=1$ ist, also $x+y=6=a$; und $4xy=4=b$ giebt $x=\frac{6+\sqrt{(36-4)}}{2}=3+2\sqrt{2}$ und $y=3-3\sqrt{2}$, welches der Aufgabe ein Genüge thut.

Man

Man sieht aber leicht, daß x und y zwey zu einer Gleichung gehörige Wurzeln sind, und zwar gehören sie zu der Gleichung $x^2 - 6x + 1 = 0$, die man durch die Substitution des Werths $y = \frac{1}{x}$ sogleich aus der Angabe findet.

§. 187. Wenn in der Gleichung $x^3 = fx + g$, $x = a + b$, also $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ (§. 92.) ferner $a^3 = p$ und $b^3 = q$, also $ab = \sqrt[3]{pq}$, so ist $x^3 = p + q + 3\sqrt[3]{pq}\,x$, und $3\sqrt[3]{pq} = f$, ferner $g = p + q$. Daraus folgt 1) $27pq = f^3$, oder $pq = \frac{1}{27}f^3$, und $4pq = \frac{4}{27}f^3$. 2) $g^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Subtrahirt man davon $4pq = \frac{4}{27}f^3$; so bleibt $p^2 - 2pq + q^2 = g^2 - \frac{4}{27}f^3$, und $\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = p - q$; da aber $p + q = g$, so wird $2p = g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$ und $2q = g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$. Weil nun $x = a + b = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$, so ist $x = \sqrt[3]{\left(\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}$.

Exempel. $x^3 = 6x + 9$. Hier ist $f = 6$, und $g = 9$, also $g^2 = 81$, und $\frac{4}{27}f^3 = 32$, daher $\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = 7$, folglich $x = \sqrt[3]{\left(\frac{9+7}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9-7}{2}\right)} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3$, eine Wurzel dieser Gleichung.

Anmerkung. Man nennet dieses Cardans oder Scipionis Ferrei Regel.

§. 188. **Lehrsatz.** Wenn in einer nach §. 176. geordneten und auf Null gebrachten Gleichung, darin der Coefficient der höchsten Potenz von $x = 1$ ist (§. 182.) für x ein Werth $= a$ gefunden werden kann, wodurch die Gleichung Null wird: so ist dieser Werth eine Wurzel von x, und $x - a = 0$ ein Factor, womit die Gleichung für x von einem um 1 niedrigern Grade multiplicirt ist.

Beweis. Es sey Q die Gleichung für x von einem um 1 niedrigern Grade, so ist $Q.(x - a) = Qx - Qa = 0$. Da nämlich in der auf Null gebrachten Gleichung weder die bekannten Größen, noch die Potenzen der unbekannten Größe x Null sind: so muß wenigstens ein Werth

von

13
1296 3,6055512754639892931119235 Vid. pag. 48

4000
72055
3963025
36975
7210512
144221024
288442048
7384116428
36920582144
54417856
72110475
1802775 61875
540832685625
3345874375
72111025504
288444102016
46143335484
72111025508 6
4326661530516
2876720 17884
72111025509 23 78
2163330765 2769
713389413 5631
64899922 9835
643901839796
576888204074
67013635722
6489992 2958
2113712764
1442220516
671492254
648999230
22493024
21633307
859717
721116
138607
72111
66496
64900
1696
254

$\sqrt{(0,6 \sqrt{0,2}}$

$\sqrt[4]{\frac{36}{500}}$

11	51292	54355	17070	32193	50136
5.	51745	28964	64707	61487	07175
5.	99547	25390	52362	70706	42961
6,	64248	68013	67256	18666	95378
0,	64701	42623	14893	47960	52417

$= \log(0,3 + \sqrt{0,05})$

48

6,	21460	80984	22191	74263	67422
3,	58351	89384	56110	00162	49547
2,	63108	91599	66081	74101	17875
0,	65777	22899	91520	43525	29469
	64701	42623	14893	47960	52417
0,	65239	32761	53206	95742	90943

9242044 ½
4565606
3807650 ½
8469236
5338414
0,34185

52,49095
0,34185
52,8328

0,7594355
0733810047
0,832815729997

$\sqrt{180} - 13 \pm \sqrt{(331 - 148\sqrt{5})}$

$S = \sqrt{720} - 26$

$p = \sqrt{18 - \sqrt{320}}$

$= (\sqrt{10 - 2\sqrt{2}})^2$

$18 - \sqrt{320} = p \; 9\sqrt{5}$

$p^2 + 5qq = 18$

$pq = 4$

114562 $p^4 \; 80 = 18pp$

0,557281 $p^2 \; q = \pm 1$

17,944

$\sqrt{5}$

4164
166
66

3171
40
3,49169

34

0,53384 − 1
1,72008
0,86558 − 2
0,88049 − 1
0,99999

1,74607
2787
2792

8655836
8804909
7460745

$x^4 + 48x^3 + 216x^2 - 392$

$x^2 - 2x + 5$

$x^4 + 52x^3 - 26xx - 12x + 1$

325392 18,0

17,885438

$\sqrt{10} - \frac{4\sqrt{50}}{10}$

$\sqrt{320}$

$\sqrt{10 - 2\sqrt{2}}$

1 + 50 − 125 + 300 − 105 + 62 + 5
1 + 2 + 5
+52 − 130 + 700
+52 − 104 + 260
−26 + 40 − 105
−26 + 52 − 130
−18 + 25 − 62
−12 + 24 − 60
1 − 2 + 5
+48 − 130 + 300
48 + 96 + 240
226 + 60 − 105
452 + 180
−392 − 975 + 62
1625
−392 784

$\sqrt{720 + 676 - 52\sqrt{720}}$
$- 72 + 4\sqrt{320}$

$\sqrt{1324} \pm \frac{32}{624}$

$\sqrt{(331 - 1}$

109561
109520
219081

0.25

$\sqrt{(331 - 148\sqrt{5})}$

709 1033

0,0619 3130495'17
1788854 38

0,24 330938061

661,93806

$x + y = p$
$xy = q$
$xx + yy = P$
$xxyy = Q$

26 832815729997
53 665631459999

$\sqrt{}$ 8208173
1.4104086,5

25,728157 51456314

26,4164078 $12\sqrt{180} - 26 + 2\sqrt{10} - 4\sqrt{2}$

52.

$\phi xy = \phi x + \phi y$

$a\sqrt{5} + b\sqrt{10} + c\sqrt{2}$ $aa + bb + cc$

von x, entgegengesetzt genommen, wie hier a, Producte in der Gleichung geben, die mit denen von x zusammen genommen sich aufheben.

Anmerk. Eine solche einfache auf Null gebrachte Gleichung, wie $x - a = 0$, heißt eine Wurzel-Gleichung, wodurch sich demnach die gegebene Gleichung dividiren lassen muß; der Quotient Q ist auch eine Gleichung, die Null seyn kann.

§. 189. Zusatz. Ist Q auch eine auf Null gebrachte Gleichung: so giebt es auch für sie eine Wurzel $= b$, die mit einem entgegengesetzten Zeichen zu x gesetzt, eine Wurzel-Gleichung wird, wodurch sich die gegebene Gleichung dividiren läßt.

Exempel. Es sey A) $x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = 0$. Setzt man hier $x = +1$, so bekommt man $+1 - 3 - 33 + 35 = 0$; also $x - 1 = 0$ ist eine Wurzel-Gleichung, womit die gegebene Gleichung sich dividiren läßt.

$$\begin{array}{l|l}
x-1)\; x^3 - 3x^2 - 33x + 35 & x^2 - 2x - 35 = Q. \\
\quad\; x^3 - x^2 & \text{Also } Q\,.\,(x-a) \\
\hline
\quad -2x^2 - 33x & = (x^2 - 2x - 35)(x-1) \\
\quad -2x^2 + 2x & = 0. \\
\hline
\qquad -35x + 35 & \\
\qquad -35x + 35 & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

B) Auch die Gleichung $Q = x^2 - 2x - 35 = 0$ giebt zwey Wurzeln für x, nämlich $+7$ und -5, deren jede in A gesetzt diese zu Null macht. Setzt man $x = 7$, so ist $343 - 147 - 231 + 35 = 0$. Setzt man -5, so ist $-125 - 75 + 165 + 35$ auch $= 0$.

$$\begin{array}{l}
x^2 - 2x + 1 = 36 \\
\hline
x - 1 = \pm\sqrt{36} = \pm 6 \\
\hline
x = +1 + 6 = 7 \\
\text{u. } x = +1 - 6 = -5.
\end{array}$$

Also ist die Gleichung A $= x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = (x-1)(x-7)(x+5) = 0$. Jede dieser Wurzel-Gleichungen ist Null, und daher auch das Product derselben $A = 0$.

Eben so $x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24 = 0$ giebt, für $x = -1$; $1 - 6 + 3 + 26 - 24 = 0$; daher die Gleichung mit $x + 1 = 0$ dividirt werden kann. Man bekommt zum

Quotienten $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$. Setzt man hier $x = + 2$: so findet man $8 + 20 - 4 - 24 = 0$. Also $x - 2 = 0$ ist wieder eine Wurzel-Gleichung, woraus erhellet, daß $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0 = (x^2 + 7x + 12)(x - 2)$. Endlich die quadratische Gleichung Null gesetzt giebt nach §. 182. die beiden Wurzeln $- 3$ und $- 4$; also ist $x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24 = (x+1)(x-2)(x+3)(x+4) = 0$.

§. 190. Zusatz. Es ist daher nicht nur möglich, sondern man kann es als einen allgemein erwiesenen Satz ansehen, daß jede auf Null gebrachte höhere Gleichung ein Produkt aus so viel Wurzel-Gleichungen sey, als die höhere Gleichung Grade hat. Denn jede quadratische Gleichung hat 2 Wurzeln (§. 182.), also, wenn sie auf Null gebracht ist, 2 Wurzel-Gleichungen. Multiplicirt man diese wieder mit einer Wurzel-Gleichung: so erhält man eine cubische Gleichung; diese mit noch einer Wurzel-Gleichung multiplicirt, giebt eine vom 4ten Grade u. s. f.

Man behauptet hiemit zugleich, daß jede gehörig geordnete Gleichung x so viel Wurzeln habe, als der Exponent der höchsten Potenz derselben Einheiten hat.

§. 191. Zusatz. Setzt man allgemein $x = \pm a$, und $x = \pm b$ für eine quadratische Gleichung, so ist

1. $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = 0$;
   2 Abwechselungen + mit — und — mit + für 2 positive Wurzeln.
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = 0$;
   2 Folgen von + für 2 negative Wurzeln.
3. $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$;
   eine Folge vdn + und + und eine Abwechselung für eine negative und eine positive Wurzel.

§. 192. Zusatz. Multiplicirt man 1) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ mit $x - c = 0$, so bekommt man
$x^2 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$;
3 Abwechselungen von + und — für 3 positive Wurzeln.
2) $(x^2 + (a + b)x + ab)(x + c) = 0$ giebt für die 3 negativen Wurzeln 3 Folgen von +.

3) x

0.343 686
2058
212

94
79 30,4510
34
19

5
21,266
162842

12,353145
12,1060821
1,73016
237278

26.26762842

26 426665
267628

— 0,159037

---

1 — 50 + 2625 — 132800 + 699730 367029188

131250
1250
3

50 | 52.5 | 50,6 | 5,062

5312 664 0000
10624 67925
15000
105
6722630

32

336131500

6640000
337625
15000
105
6942730

349636500
166
787500
5250
367029250

5647006
8446468
7200938
2799462

— 50

1562500000

1562500000
781250000
37500000

1 — 50 + 2625 — 137800 + 7233230 — 379679188

131250
6250
700

6840000
328125
14000
105
7233230

361661500
17225000
787500
5250
379679250

5794168
8593323
7200845
2799155

52,4909555

0,0190509

16.52,4909555. $\frac{53,49095^2}{51,4909555^4}$

839855288..

(49)

Fuer dritte Wurzel $= -4t\frac{(1+\sqrt{t})^2}{1-t}$

$l\,4t = 0,2676436$ $\qquad l\,4t = 0,2676436$

$l(1+t) = 0,0307538$ $\qquad 6338218$

$l(1-t) = 0,0615078$ $\qquad 615078$

$0.3599050-1$ $\qquad 0,9629732$

$\qquad 918275$

2,29036666 $\quad$ 0,229036666

2,903843 $\quad$ 918275

5,1942 $\quad$ $-$ 0,320864

Zu substituiren $5+u$

$-\frac{3,04}{0,24}(1,87)^2$

5

$-310 - 62u$

$-2625 - 210u - 105u$

$+37500 + 22500u + 4500u^2 + 300u^3$

$-78125 - 62500 - 18750 - 2500 - 125$

$+156250 + 187500$

$156250 + 93750 + 18750 + 1250 + 50$

1024 $\quad$ 512 $\quad$ 1075 $\quad$ $2^{25}.50$ $\quad$ 1005 $\quad$ 2^{24} $\quad$ 1009 $\quad$ 3,5 $\quad$ 1064 $\quad$ 44

$-0,32$

5 $\quad$ 10,752

19,84 $\quad$ 9,8304

1,31072 $\quad$ 16777216

10737

26,1517937 $\quad$ 20,7501726

24.8410737 $\quad$ 22,0608926

+2,7801

5 $\quad$ 16,80

24,841 $\quad$ 19,2

29,841 $\quad$ 3,2

89,712 $\quad$ 512

$-0,33$

5 $\quad$ 11,4345

20.46129 $\quad$ 10.7811

1.4824

25.46129 $\quad$ 195677

23.89367

1.5676 $\quad$ 23.893677

5 $\quad$ 31 $\quad$ 26.25 $\quad$ 37.5

.3445

114345

0 $\quad$ +5

$-0,32$ $\quad$ +2,78

$-0,4$ $\quad$ $-9,87$

$-1,0$ $\quad$ $-521,6$

0,5

0.32 + 2,7801

0,33 + 1,5676

0,34 +

0,35 $-$

3) $(x^2 + (a - b)x - ab)(x - c) = o = x^3 - (b + c - a)x^2 - (ab + ac - bc)x + abc$; 2 Abwechselungen von + mit — und — mit + und eine Folge von — für 2 positive und negative Wurzeln.

Man wird eben dieses Gesetz bey noch höhern Gleichungen bemerken. Jede hat so viele Abwechselungen der Zeichen, als sie positive Wurzeln hat, und so viele Folgen derselben, als negative Wurzeln.

§. 193. Vergleicht man irgend eine Gleichung von höherm Grade, z. E. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = o$ mit einer aus den Wurzel-Gleichungen $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + bc + ad + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd = o$, so ist eine der andern völlig gleich, wenn (nach §. 190.) **das letzte Glied s = dem Produkt aller Wurzeln $abcd$, und das zweyte p = der Summe aller Wurzeln ꝛc. sämtlich mit entgegengesetzten Zeichen genommen, gleich gesetzt wird.**

In beiden sind alle Wurzeln wegen der steten Folge negativ, oder $x = -a$; $x = -b$; $x = -c$; $x = -d$. Hätte man die Gleichungen $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ mit einander multiplicirt, oder alle Wurzeln positiv genommen: so hätte man $x^4 - (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + bc + ad + bd + cd)x^2 - (abc + abd + acd + bcd)x + abcd = o$; 4 Abwechselungen zwischen + mit — für 4 positive Wurzeln, wie schon §. 191. bemerkt ist.

§. 194. Aufgabe. **Eine höhere auf Null gebrachte Gleichung, deren Wurzeln ganze Zahlen sind, aufzulösen.**

1) Man zerlege nach §. 193. das letzte Glied in so viele Factores, als die Gleichung Grade oder Abmessungen hat, den Factor 1 nicht ausgeschlossen.

2) Man wähle solche Factores, deren Summe den Coefficienten des 2ten Glieds giebt, wenn solche mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden.

3) Man bestimme aus der Zahl der Abwechselungen und Folgen, wie viel, und nach 2, welche darunter positiv oder negativ zu nehmen sind. Dies sind die Wurzeln von x.

So ist §. 189. A $35 = 1 \cdot 5 \cdot 7$, darunter müssen 2 Factores positiv und einer negativ seyn. Da nun der Coefficient des 2ten Gliedes, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, $+3$ ist, und $+1+7-5=+3$: so ist $x=+1$; $x=+7$; $x=-5$.

§. 195. Aufgabe. **In einer reinen Gleichung die unmöglichen Wurzeln zu finden.**

Auflösung. Man suche 1) die möglichen nach §. 180. und mache aus ihnen eine Wurzel-Gleichung, womit die gegebene dividirt wird.

2) Durch die wirkliche Division erhält man im Quotienten das Product aller unmöglichen Wurzeln paarweise genommen.

Ein Exempel davon giebt §. 91. $x^3-8=0$, durch $x-2$ dividirt, gab die beiden unmöglichen Wurzeln $\pm\sqrt{-3}$.

Von $x^6-64=0$ enthält x^2-4 die beiden möglichen Wurzeln; der Quotient $x^4+4x^2+16=0$ die 4 unmöglichen $x=\pm\sqrt{(-2\pm2\sqrt{-3})}$.

Veränderung der Gleichungen.

§. 196. **Die Verwandlung einer Gleichung in eine andere geschieht durch Substitution eines Werths für die unbekannte Größe, der zum Theil bekannt ist, nach den 4 Rechnungsarten.**

1) Durch Multiplication. $x = cy$.

Es sey $x^3+px^2+qx+r=0$, und $x=cy$, so ist auch $c^3y^3+pc^2y^2+qcy+r=0$, oder wenn man alles mit c^3 dividirt, $\frac{y^3}{1}+\frac{p}{c}y^2+\frac{q}{c^2}y+\frac{r}{c^3}=0$.

Also darf man nur eine geometrische Reihe vom Factor c, die mit 1 anfängt, unter der Gleichung schreiben, und die dazu gehörigen Glieder damit dividiren.

Auflösung der Gleichung

$$5 - 62x - 105xx + 300x^3 - 125x^4 + 50x^5 + x^6$$

	0,072	0,073			0,072	0,073
5	5,	5	10039	$62x$	4,464	4,526
300	0,1119744..	0.1167051	2781	$105x^2$	0,54432	55945
$50x^5$	~~7~~96746	103654	12820	$125x^4$	..3359232	3549780
x^6	139	151	217 8258			
	5.112071285	5.116808905	0,072783		5 011679232	5,088999780
					112071285	5.116 808905
			0,073217		+0,100392053	+0,027809125
	0,0727	0,0728			0,0727	0,0728
	5.1152721749	5.11574850~~5~~6			4.5074	4.5136
	1015411	1022415			55495545	5564832
	1476	1488			34917863	351103775
		5.1158508959			4.0658472363	4.07359423775

732 | 733

5.1176669504 | 5.1181498511
1050813 | 1058010
1538 | 1551
5.1177721855 | 5.1182558072
0.46040420 | 1123619309
0131681435 | 0058938963

4.5384
5626152
35888420
5.1046040420

4.5446
56415345
36084809
5.1123619309

(50)

+ 131681435
+ 58938963
− 13822729

72742472
72761692

19220

734
5.1186340712
1065248
1564
5.1187407524

4.5508
5656938
36282253
5.1201230253
1187407524
0013822729

~~72742472~~ . x − 9610 : x . x − 1
72761692 − 9610 . x . x − 1
72771302 − 9610 x

6545

~~58938963~~ . 19

18254

13822729
72771302 − 9610 x

72769476

18995227

938
1405 ~~5938~~
8619493
2786445
98272
26136

0307339
1230156
4

96690123
8338025
324

92661

Also mein Wurzel = 0,07338100477

Und folglich Cos. 36° = 0,52047024

Hieraus aber folgt eine zweite

Wurzel $= 16\,\dfrac{(1-t)^2\,t}{(1+t)^4}$

$l.16 = 1,2041200$

$l.t = 0,8655836-2$

$l(1-t)^2 \quad 0,9338025-1$

$-l(1+t)^2 \quad 0.8769844-1$

$0,8804905-1$

$= l.$ ~~0,61729183~~ ~~0,7771242857~~ 0,7594348

7338

73384 547

0,856 129

Also $l.\sin 72^\circ = 0,9701226$

u. $\sin 72^\circ = 0,93890702$ 0,9335179

52047

$\dfrac{s}{\sqrt{(cc-\frac{1}{cc})}}$

$\dfrac{cs}{\sqrt{1-c^4}.\sqrt{1+c^2}}$ $\sqrt{1-c^2}$

16.43² 44

45⁴

$\dfrac{css}{1-cc}$

$\dfrac{scc}{1-ss}$

0,777 | 0,778 | 0.777 | 0.778

5. | 5. | 48,174 | 48.236

140.7292299 | 141.2732856 | 63,391545 | 63.55482

~~12.744347586~~ | 14.2517432 | 45,56108818 | 45.796090082

14.1603862 | 314 | 157,1266338 | 157,586910082

159.8896161 | 160.939

251 | 157.587

160,14 | 1912 3.352

157.12

3.373

235

5776

2888

60648

1929

29645

6225

0.76

278

5.

131.6928

12.677627

192700

149,563127

47.12

60.648

41.70272

149.47072

$-$ 0,90759

$+$ 1,76644

0.77

5,

136,9599

13,53392

20842

155,70224

393580

47,74

62,2545

43.94130

153.93580

0,75

5,

126,5625

11,86524

17798

143,60572

46,50

59,0625

39,55078

145,11328

3,60572

1,50756

15944

$-$ 1,50756

$+$ 0,09241

$+$ 1,76644

1,59997

1,67403

$159997x + 7406\,\dfrac{x.x-1}{2} = 1,50756$

$9241 = 159997y$

$x = 1-y$

$+ 3703.y.1-y$

7383

10568

2

9241

1637

56451

579

0,75

Wäre nun c ein Bruch $= \frac{n}{m}$, also $x = \frac{n}{m} y$: so dürfte in der vorigen Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ nur eine Reihe von $\frac{m}{n}$ gemacht und jedes Glied mit dem ihm zukommenden Gliede dieser Reihe multiplicirt werden (§. 31. 1.) $y^3 + \frac{pm}{n} y^2 + \frac{qm^2}{n^2} y + \frac{rm^3}{n^3} = 0$. Dies ist ein vortrefliches Mittel, Brüche, selbst Irrational-Zahlen, aus den Coefficienten wegzuschaffen. So bekam man aus der Gleichung §. 176. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, durch die Division mit a, $x^3 + \frac{b}{a} x^2 + \frac{c}{a} x + \frac{d}{a} = 0$. Setzt man nun $x = \frac{1}{a} y$: also $n = 1$ und $m = a$: so ist, weil 1 nicht dividirt, $y^3 + bay^2 + ca^2 y + da^3 = 0$.

Hätten die Coefficienten verschiedene Nenner: so setzt man ihr Produkt $= m$. So ist in der Gleichung $x^2 + \frac{a}{b} x - \frac{c}{d} = 0$, $m = bd$ und $n = 1$; also $y^2 + ady - cb^2 d = 0$.

Exempel. Es sey $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$ und $x = 2y$. Also $c = 2$ und $y^3 + \frac{5}{2} y^2 - \frac{1}{2} y - 3 = 0$. Man sieht hier leicht, daß für $y = 1$ die Gleichung Null wird. Durch die Division mit $y - 1$ findet man alsdann die andern beiden Wurzeln $y = -\frac{3}{2}$ und $y = -2$. Also $x = +2$; $x = -3$; $x = -4$.

Es sey ferner $x^2 + \frac{2}{3} x - \frac{3}{4} = 0$. Also $m = 3.4$, und $x = \frac{1}{12} y$. Dies giebt $y^2 + 8y - 108 = 0$. Also $y = -4 \pm 2\sqrt{31}$, und $x = -\frac{2 \pm \sqrt{31}}{6}$.

Anmerkung. Bey Untersetzung der Reihe 1, c, c^2, c^3 .... darf kein Glied fehlen. Fehlt eins in der gegebenen Gleichung: so setzt man da ein * oder o hin, mit welchem die dazu gehörige Potenz c multiplicirt wird, welches Produkt also Null wird.

So wird aus $x^3 + qx + r = 0$ die Gleichung
$$\begin{array}{l} y^3 \; * + qx + r \\ 1 + c + c^2 + c^3 \\ \hline y^3 + qc^2 x + rc^3 = 0 \end{array}$$
wo $x = cy$.

2) Durch die Division. $x = \frac{c}{y}$ giebt für $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $\frac{c^3}{y^3} + \frac{pc^2}{y^2} + \frac{qc}{y} + r = 0$, und alles mit y^3 multiplicirt, $c^3 + pc^2 y + qcy^2 + ry^3 = 0$.

 3) Durch

3) Durch Addition oder Subtraction. $x = y + c$, oder $y - c$. Bey dieser Substitution wird die Formel §. 104. für die 2theilige Wurzel gebraucht.

Es sey $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, und $x = y + 2$: so ist

$$\begin{array}{rcll|l|l}
x^3 & = & (y+2)^3 = & y^3 + 6 & y^2 + 12 & y + 8 \\
+5x^2 & = & 5(y+2)^2 = & +5 & +20 & +20 \\
-2x & = & 2(y+2) = & & -2 & -4 \\
-24 & = & & & & -24 \\
\hline
0 & = & & y^3 + 11y^2 & + 30y & + 0
\end{array}$$

Alle zu einer Potenz y gehörigen Coefficienten sind hier unter einander gesetzt, welches auch für die Addition bequem ist.

Das letzte Glied ist hier Null, welches beweiset, daß eine Wurzel von $y = 0$; also $x = 2$ ist. Dieser Fall ist übrigens deshalb zu bemerken, weil in allen solchen Gleichungen, wo in allen Gliedern die unbekannte Größe vorkommt, allemal eine Wurzel der Gleichung Null ist, weshalb man die Gleichung mit derselben dividiren kann.

So ist hier $y^2 + 11y + 30 = 0$.

§. 197. Aufgabe. **Aus der Gleichung**

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + \omega = 0$$

das zweyte Glied wegzuschaffen.

Auflösung. 1) Man setze $x = y + c$: so ist (§. 104.)

$$\begin{array}{rcl}
x^m & = & y^m + mcy^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2}c^2y^{m-2} \ldots + c^m \\
px^{m-1} & = & py^{m-1} + (m-1)pcy^{m-2} \ldots + pc^{m-1} \\
qx^{m-2} & = & + qy^{m-2} \ldots + qc^{m-2} \\
\vdots & & \vdots \\
\omega & = & \omega \\
\hline
\end{array}$$

$$0 = y^m + (mc+p)y^{m-1} + (m(m-1)c^2 + (m-1)pc+q)y^{m-2} \ldots$$

2) Weil hier $mc + p = 0$; also $c = -\frac{p}{m}$: so ist c ein Bruch, dessen Zähler der Coefficient des zweyten Gliedes der gegebenen Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen, und dessen Nenner der Exponent der höchsten Potenz, oder des Grades der Gleichung ist.

Exempel. Aus $x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = 0$ (§. 189.) soll das zweyte Glied weggeschafft werden.

Hier

Die Theilung der Lemniscata in 5 Theile führt auf diese Gleichung

$$\frac{9-36x^4+30x^8+12x^{12}+x^{16}}{1+12x^4+30x^8-36x^{12}+9x^{16}} = \frac{4(1-x^4)}{1+2x^4+x^8}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9-36+30+12+1 \\ +18-72+60+24+2 \\ \quad +9-36+30+12+1 \\ -4-48-120+144-36 \\ +4+48+120-144+36 \\ \hline 5-62-105+300-\cancel{240}+\cancel{90}+1 \\ \qquad\qquad\qquad 125 \end{array}\right\} = 0$$

1,2846
2024
1,3048

$2-\sqrt{5}$

$xx+74$

$4\sqrt{5}-8$

Determin. rad. imag.

6576
1,1423
2,23606
2 0,12445

$$\frac{\Box}{\Box} = \frac{4(1-x^4)}{\Box}$$

x^4+y^4 $\quad 12\sqrt{5}0-26$

x^2y^2 $\quad 2\sqrt{5}-4$

0,2708
0,8715

$\xi\quad\xi\quad\xi\quad\xi\quad\xi\quad\xi\xi$

L

105
300
60
62
240
6
0,13
465

2349
0,2356 $\quad \sqrt{180}-13$

$\xi\xi = \zeta\zeta - \zeta\zeta x^4$

$\zeta\zeta x^4 = \zeta\zeta - \xi\xi$

180
169

$$(3-6y-yy)(1+y) = 2(1+6y-3yy)\sqrt{(1-y)} \qquad 349-156\sqrt{5}$$

$y = 2\xi - \xi\xi$

$-9+4\sqrt{5}$

$\sqrt{340-152\sqrt{5}}$

$$(y+3+\sqrt{12})(y+3-\sqrt{12})(1+y) + 2(1+(3+\sqrt{12})y)($$

178885
1609965

$85-38\sqrt{5}$

17

-2	-1	0	+1	+2
	-152	+5	+444	+

-7225
7220

1444 6

339881
0,118
0,34

Zwei Wurzeln obiger Gleichung sind

$$\left.\begin{array}{l} +0,0733810047 \\ +0,7594355 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = \sqrt{720}-26 \\ p = 9-\sqrt{80} \end{array}$$

$\begin{array}{l}180\\+169\end{array} - 26\sqrt{180}$

$340-152\sqrt{5}$

$340-19\sqrt{320}$

p

$170-76\sqrt{5}$

28900
28880
57780
28890

4936 $\quad$ 4776

51

R

313003 $+3.199$
$-9.58.$

626006 ~~+3.73~~
~~−1330 = −225.6~~ -325 | -25.13
-3485 | $-5.17.41$

939009

-48	-3
-3920	-5
$+7720$	$+1930$
$+15520$	$+970$
-1985	-5.397
-30800	-77
-42409	-2.53

60x

	0	1	2	3	4	5	6
3	25	25	25	7	25	25	25
9		7	11	7	~~11~~	7	
21	7		7	11	11	7	
27	25	25	25	25	7	25	25
33		25	25	25	25	11	25
39		7		11	7		7
51		7		7		7	
57	25		25	25	25	25	11

-3 -13
-5 $+17.41$
-199
$-$

lim 559.

348
694

7 23
1 3 8 10

3 | 7.61 67.163.181.193.223 ‖ 307.463.487.
5 |
13 | 199 199 199 199 199

~~9.33.39.51~~
81 117 ~~159~~ ~~171~~
~~249~~.291 339 369
381

2.29 | −
53 | −
97 | −

15113
169362
294
27378
144
13122

Igitur 313003 est numerus primus
3042
4202

R N
−2 193 7*
* 61*
463*
487*

$313003 = \square + 2\square = xx + 2aa$

a	
F.p.	imp
	2n
3n	
25n ± 8	5n
	7n ± 0,1
	11n ± 1,3

Lim: ~~395~~. ~~197~~.

3	0 2 1 2	7	0 2 1 4 5 3 4 1
5	0 2 3 3 1 0	11	0.2.8.10.6 9 7 1 10 3

25625
29241
58482
1084
2478
189001

$379^2 + 291^2.2$

$555^2 +$

262441
25452

3				
9				
21				
27				
33				
39				
51				
~~45~~	0	1	2	3
57				

Hier ist $c = +\frac{3}{3} = +1$, und $x = y+1$;

$$
\begin{array}{rcl}
\text{also } x^3 & = & y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\
-3x^2 & = & -3y^2 - 6y - 3 \\
-33x & = & -33y - 33 \\
+35 & = & +35 \\
\hline
0 & = & y^3 - 36y
\end{array}
$$

oder wie §. 195. $0 = y^2 - 36$, eine reine Gleichung; folglich $y = \pm\sqrt{36} = +6$ oder $= -6$; und die Wurzeln von x sind die §. 189. angegebenen.

Anmerkung. Solche Vortheile hat man nun zwar selten von dieser Reduction; aber diesen doch immer, daß man weiß, die Factoren des letzten Gliedes bey rationalen Wurzeln müssen so beschaffen seyn, daß für diesen Fall ihre Summe Null ist.

§. 198. Aufgabe. **Die irrationalen Wurzeln einer Gleichung durch Näherung zu finden.**

Auflösung. Wenn man keine vergebliche Versuche machen will: so ist die geometrische Construction durch Parabel und Cirkel immer noch für alle Gleichungen vom 3ten und 4ten Grade das bequemste Mittel, die Wurzeln vermittelst eines Maaßstabes in Hunderteln ja Tausendteln zu finden. Alsdann kann man durch folgende Methode leicht ihrem Werthe sich so viel nähern, als man will. Weil indeß diese Construction hier nicht kann erklärt werden: so müssen wir uns mit Versuchen für die ersten Zehntel und Hunderttel behelfen. Man setzt nämlich, wie schon §. 189. u. f. geschehen, für die unbekannte Größe einen gewissen Werth, von 1 an gerechnet, in die Gleichung, und summirt alle Glieder. Ist diese Summe $= 0$, so hat man eine rationale Wurzel. Da dieser Fall nicht hieher gehört: so setze man die Summe $= A$, und gebe Acht, wenn nach und nach mehrere Werthe für die unbekannte Größe gesetzt werden, wo diese Summe aus dem Positiven in das Negative übergeht. Da dies allemal durch Null geschiehet (§. 37.), so liegt zwischen diesen beiden Werthen gewiß eine Wurzel, die man dann genauer findet, wenn man Decimal-Brüche noch zu der einen oder andern Gränz-Zahl setzt. z. B. in der Gleichung $x^3 - 15x^2 + 78x - 146 = 0$

 findet

findet man A durchgängig negativ, wenn man nach einander für x die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 setzt. Für $x = 6$ ist $A = -2$. Setzt man aber $x = 7$: so bekommt man $A = +8$. Also die Wurzel fällt zwischen 6 und 7. Man setze daher $x = 6 + f$, so ist

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 & = & 216 + 108f + 18f^2 + f^3 \\
-15x^2 & = & -540 - 180f - 15f^2 \\
+78x & = & 468 + 78f \\
-146 & = & -146 \\
\hline
0 & = & -2 + 6f + 3f^2 + f^3
\end{array}
$$

Achtet man nun den Werth der letzten Brüche $3f^2 + f^3$ nicht: so bleibt $0 = -2 + 6f$, oder $f = \frac{1}{3} = 0,33$. Weiter darf man wegen des ausgelassenen f^2 und f^3 nicht gehen. Also wenn nun $x = 6,33 + f$ gesetzt wird: so bekommt man nach gehöriger Substitution $0 = 0,342637 + 8,3067\,f$, folgl. $f = -0,041$, woraus erhellet, daß f vorher zu groß angenommen war. Es ist nur $= 0,289\ldots$ also $x = 6,289\ldots$ Hier kann die letzte Zahl noch falsch seyn, welches man durch eine abermalige Substitution des Werths finden wird. Hat man aber auf eine so mühsame Art die ersten 3 Decimalbrüche berichtigt: so ist es hernach desto sicherer, daß man die folgenden drey Decimal-Stellen genauer finden wird.

Da überhaupt dergleichen Aufgaben selten vorkommen, und deshalb auch Cardans Regel für die cubische Gleichung nur kurz, Bombelli Methode aber, biquadratische Gleichungen auf cubische zu bringen, gar nicht erklärt worden ist: so würde selbst dieser Näherungs-Methode hier nicht erwähnt worden seyn, wenn sie nicht selbst zur Ausziehung der Quadrat- und Cubic-Wurzeln bequem gebraucht werden könnte. Vega hat deshalb in seinen logarithmischen Tafeln Formeln darüber S. 387 u. 388. mitgetheilt, die eine Erklärung verdienen.

§. 199. Aufgabe. **Eine allgemeine Formel anzugeben, um die Wurzel aus einer reinen Gleichung durch Näherung zu finden.**

Aufl.

Untersuchungen über das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = y$$

$$= (1-x^4)^{\frac{3}{4}} x + \int \frac{4x^4\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

$$= (1-x^4)^{\frac{3}{4}} x + \frac{4}{5}(1-x^4)^{3:4} x^5 + \frac{4.8}{5}\int \frac{x^8\, dx}{\sqrt{1-x^4)}}$$

$$= (1-x^4)^{\frac{3}{4}}\left(x + \frac{4}{5}x^5 + \frac{4.8}{5.9}x^9 \ldots\right)$$

$$+ \frac{4.8.12 \ldots 4n}{5.9.13 \ldots 4n-3}\int \frac{x^{4n}\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

$$= x + \frac{1}{4}\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{1}{9}x^9 + \frac{1\,5\,9}{4\,8\,12}\frac{1}{13}x^{13}$$

52

x	$y = ka \pm$
0,	0,
0,1	0, 1000005
0,2	0, 2000160
0,3	0, 30012
0,4	0, 4006
0,5	0. 5015176
0,6	0.6
0,7	0.7
0,8	0.8193082
0,9	
1,0	1,1107207

log. cos =

$\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{240} + \frac{17}{40320}$

$- \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \frac{1}{1152}$

$- \frac{1}{480}$

$+ \frac{1}{24} - \frac{1}{96}$

$- \frac{1}{84}$

17
-35
-84 673
-420
-630 1253
17
1786
1152

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

$\frac{1}{2} \Big| - \frac{1}{6} \Big| + \frac{1}{15} \Big| - \frac{1}{35} \Big| \frac{1}{75} \Big| \frac{16}{2475}$

$\frac{1}{2} \Big| \frac{1}{3} \Big| \frac{1}{5} \Big| \frac{4}{35} \Big| \frac{1}{15} \; \frac{32}{825} \; \frac{1}{75} \; \frac{1}{7} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{33}$

1.2 2.3 3.5. 5.7 15052

$\frac{1}{3} \; \frac{2}{5} \; \frac{3}{7}$

$\varphi\varphi\, f. \varphi^4$

$\varphi\varphi \quad x$

0.177612 $\frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{5} \; \frac{3}{25}$

$l.\cos\varphi = \varphi\varphi\, f:\varphi^4$

$\frac{1}{6} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{5} \; \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{15}$

$0 \; \frac{10}{} \; \frac{10}{5} \; \frac{8}{5} \; \frac{6}{5}$ $\frac{1}{6}$

$\varphi\varphi$

$\cos\varphi = e^{\varphi\varphi}, f. x^4$

Comp. $\quad\quad xx - ax - b$
$\quad\quad xx - a'x - b'$

$$\begin{array}{ll} a & b \\ a' & b' \\ \hline aa' + b + b' & \ldots\ldots - bb' \end{array}$$

$$xx - (aa' + b + b')x + bb' = (x - e)(x - f)$$

$$\begin{array}{l|l|l} te^m & \frac{e-b}{a}t & te^{m+1} \\ +ue^n & & +ue^{n+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a' & 1 \\ a'' & 1 \\ a''' & 1 \end{array}$$

$\cancel{ap + b = \ldots}$
$\cancel{bq + \ldots}$

$$ap + 1 = pq$$
$$bq + 1 = qr$$
$$cr + 1 = rp$$

So findet man z. B. $\sqrt{30} = 5.4772255667\ldots$
$\sqrt{3} = 1.73205$

$$abcp = p^2 -$$

Auflösung. Wenn in einer reinen Gleichung die Wurzel $\sqrt[m]{x} = w$ beynahe zutrifft, welches man durch die Logarithmen leicht finden kann: so ist $x = (w + f)^m = w^m + m w^{m-1} f + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \cdot w^{m-2} \cdot f^2 \ldots$ Da nun f ein sehr kleiner Bruch ist: so verschwindet das Glied $\frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} w^{m-2} f^2$ und man behält $x = w^m + m \cdot w^{m-1} f$, also $\frac{x - w^m}{m w^{m-1}} = f$, oder noch genauer $\frac{x - w^m}{m w^{m-1} + \frac{m \cdot (m-1)}{2} w^{m-2} \cdot f} = f$, und wenn man den Werth $f = \frac{x - w^m}{m w^{m-1}}$ im 2ten Gliede des Nenners substituirt und alles gehörig aufhebt: so ist

$$f = \frac{x - w^m}{m w^{m-1} + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{x - w^m}{w}} = \frac{w(x - w^m)}{m w^m + \frac{1}{2}(m-1)(x - w^m)}$$

$$= \frac{2w(x - w^m)}{2 m w^m + (m-1)(x - w^m)} = \frac{2w(x - w^m)}{(m+1) w^m + (m-1) x}$$

also $\sqrt[m]{x} = w + f = w + \frac{2w(x - w^m)}{(m+1) w^m + (m-1) x}$

für $m = 3$ wäre $\sqrt[3]{x} = w + \frac{w \cdot (x - w^3)}{2 w^3 + x}$.

Ex. $\sqrt[3]{572} = 8{,}30103 = w$, wie man durch Hülfe der Logarithmen leicht findet. Wollte man diese Wurzel genauer haben: so ist $m = 3$ und $f = \frac{8{,}30103 \cdot (572 - 8{,}30103^3)}{2 \cdot (8{,}30103)^3 + 572} = + 0{,}0000005005894044$.

Also $\sqrt[3]{572} = 8{,}3010305005894044$, bis auf die letzte Zahl noch richtig.

§. 200. Lehrsatz. In der unendlichen auf Null gebrachten Reihe $0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ sind alle zusammengesetzte Coefficienten A, B, C, D u. s. f. für sich Null.

Beweis. 1) Es sey $x = \frac{1}{\infty}$: so verschwinden alle mit x multiplicirten Glieder §. 82; und $o = A$.

2) Es sey $x = \infty$, und $o = A + Bx$: so verschwindet A gegen Bx, welches wieder ein Beweis ist, daß man $A = o$ setzen kann; also $o = Bx$ und $B = o$. Ist aber $o = A + Bx + Cx^2$: so verschwinden die beiden ersten Glieder gegen Cx^2, und $o = Cx^2$ oder $C = o$. Wäre ferner $o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$: so verschwinden die 3 ersten Glieder, und $o = Dx^3$; also $D = o$. Man sieht, daß diese Schlüsse immer weiter fortgesetzt werden können.

3) Da nun sowol für unendlich kleine als auch für unendlich große Werthe von x die zusammengesetzten Coefficienten, jeder für sich, Null sind: so muß dies auch von jedem andern Werthe von x, der zwischen dem unendlich großen und unendlich kleinen liegt, gelten.

§. 201. Aufgabe. **Den Bruch $\frac{1}{a+x}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln.**

Auflösung. Es sey $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$

$$\text{also } 1 = aA + \left.\begin{matrix} aB \\ +A \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} aC \\ +B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} aD \\ +C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} aE \\ +D \end{matrix}\right\} x^4 \ldots$$

und $o = aA - 1 + (aB + A)x + (aC + B)x^2 + (aD + C)x^3 + (aE + D)x^4 \ldots$ Da nun $aA - 1 = o$, so ist $A = \frac{1}{a}$, ferner $aB + A = o$, also $B = -\frac{A}{a} = -\frac{1}{a^2}$; $aC + B = o$, also $C = -\frac{B}{a} = +\frac{1}{a^3}$; $AD + C = o$, also $D = -\frac{C}{a} = -\frac{1}{a^4}$; $aE + D = o$, also $E = -\frac{D}{a} = +\frac{1}{a^5}$:

folgl. $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} \ldots$ gerade so wie man die Reihe nach §. 89. gefunden haben würde, welches zugleich zum Beweise dienet, daß die Potenzen der x ihre gehörige Form haben.

$$\partial \,\mathrm{Loc.\,C.\,M} = \cancel{\partial l \delta v} - \frac{p}{p-p'}\,\frac{\partial l \delta v}{(1+e\cos l\delta v - A_p.)^2} - \frac{p'}{p-p'}\,\frac{\partial l \delta v}{(1+e'\cos l\delta v - A_{p'})^2}$$

$1 \cdot \frac{1}{2}$ $+1$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ $+5-1$

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}$ $+9-1+1$

$\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{30}$ $+251-19+11-19$

$\frac{1}{120} \cdot \frac{1}{12}$ $+475-27+11-11+27$

$\frac{1}{720} \cdot \frac{1}{84}$ $+19087-863+271-191+271-863$

$\frac{1}{5040} \cdot \frac{1}{24}$ $+\cancel{20412 - 1383 + 162} - 191 + 191 - \cancel{162}$

$36799-1375+351$ $\quad 351+1375$

4
8
232 | 8

3

$1 \cdot \frac{1}{2}$ $+1$

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ $+4 \;\; +4$

$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}$ $+19 \;\; +13-5$

$4 \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{60}$ $+337 \;\; +159$

$a \sin(C' - A) - b \sin(C^{\circ} - B)$

$= \sin\left(C' - A . tg. \frac{a \sin A + b \sin B}{a \cos A + b \cos B}\right) \times$

$\frac{a \sin A - b \sin B}{a \sin A + b \sin B} . \cancel{a \cos A + b \cos B} .$

$\cancel{\sqrt{1 +} \quad a \sin A + b}$

$\sqrt{(aa + bb + 2ab \cos A - B)}$

Signum radic: positive Ang. ita determinandus vt sit intra ~~0 et 180° si~~

~~intra 180° et 360° si~~

0 et 90 } si $a \cos A + b \cos B$ est pos.
270 et 0 }

90 et 180 } si . neg.
180 et 270 }

Nequimus uti hac formula quando $a \sin A + b \sin B = 0$ tunc ejiciantur ingredientes

$a \sin A + b \sin B$ et $\sqrt{(aa + bb + 2ab \cos A - B)}$

§. 202. Aufgabe. Die Wurzel aus $a + x$ durch eine unendliche Reihe zu finden.

Auflösung. Wenn $\sqrt{(a+x)} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \dots$

$$\text{so ist } a + x = A^2 + 2ABx + \left.\begin{matrix} B^2 \\ +2AC \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +2BC \\ +2AD \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +C^2 \\ +2BD \\ +2AE \end{matrix}\right\} x^4 \dots$$

also $o = A^2 - a + (2AB - 1)x + (B^2 + 2AC)x^2 + 2(BC + AD)x^3 + (C^2 + 2BD + 2AE)x^4 \dots$ also $A^2 - a = o$, oder $A = \sqrt{a}$; $2AB - 1 = o$, also $B = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$; $B^2 + 2AC = o$, also $C = -\frac{B^2}{2A} = -\frac{1}{2.4a.\sqrt{a}} = -\frac{1}{2.4.a^{\frac{3}{2}}}$; $-2BC = 2AD$, folgl. $D = -\frac{BC}{A} = +\frac{1}{2.4.2\sqrt{a}.a\sqrt{a}.\sqrt{a}} = +\frac{1}{2.2.4.a^2\sqrt{a}}$; $C^2 + 2BD + 2AE = o$, also $2AE = -(C^2 + 2BD)$ und $E = -\frac{(C^2 + 2BD)}{2A} = -\left(\frac{1}{4.16.a^3} + \frac{1}{4.4\sqrt{a}.a^2.\sqrt{a}}\right) : 2\sqrt{a} = -\frac{5}{2.4.16.a^3\sqrt{a}}$ u. s. w. Also $\sqrt{(a+x)}$

$$= \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}} - \frac{x^2}{2.4.a\sqrt{a}} + \frac{x^3}{2.2.4.a^2\sqrt{a}} - \frac{5.x^4}{2.2.4.8a^3\sqrt{a}}$$

$$= \left(a + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\frac{x^2}{a} + \tfrac{1}{16}\frac{x^3}{a^2} - \tfrac{5}{128}\frac{x^4}{a^3} \dots\right) : \sqrt{a}.$$

Nimt man hier x sehr klein, und a so an, daß die Quadratwurzel daraus leicht zu ziehen ist: so kommt man bald mit der Reihe zu Stande. Näme man x weit grösser als a an: so dürfte man nur $\sqrt{a + x} = A + Ba + Ca^2 + Da^3 \dots$ setzen.

§. 203. Zusatz. Es sey $x = \frac{y}{1+y} = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 \dots$ K. Weil nun $x + xy = y$, also $x = y - xy = (1-x)y$: so ist $y = \frac{x}{1-x} = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \dots$

$$\text{und } y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + (2AC + B^2)x^4$$
$$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 \dots$$
$$y^4 = A^4x^4 \dots$$

Nun

Nun substituire man diese Werthe in K für $y - y^2$ u. s. f. und bringe die Gleichung auf Null, so ist

$$o = (A-1)x + (B-A^2)x^2 + (C-2AB+A^3)x^3 + (D-2AC-B^2+3A^2B-A^4)x^4 \ldots$$

Also $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$ u. s. w.

Also $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots$ welche Reihe ebenfalls aus $\frac{1}{1-x}$ nach §. 88. gefunden wird.

Anmerkung. Die hier angeführten Exempel sollen nur zur Erläuterung der wichtigen Formel §. 200. dienen, keinesweges aber, um ihre Unentbehrlichkeit zu zeigen. Denn alle diese Aufgaben konnten viel leichter ohne dieselbe aufgelöset werden.

Auflösung unbestimmter Aufgaben vom ersten Grade.

§. 204. Hat man in der Angabe nicht so viel Gleichungen, als unbekannte Größen: so ist die Aufgabe unbestimmt (§. 171.) und man kann alsdann für die Größen, welche sich nicht bestimmen lassen, Zahlen nach Belieben annehmen. Doch sind insgemein solche Bedingungen dabey, daß dieses auch seine Gränzen hat, und eben diese Gränzen müssen immer zuerst aufgesucht werden, ehe man die Auflösung vornimt.

Exempel. 1) 25 sollen in 2 Zahlen zerlegt werden, davon die eine sich durch 2 und die andere durch 3 theilen läßt. Also $2x + 3y = 25$; und $x = \frac{25-3y}{2}$; folgl. darf y nicht über 8 seyn. Bey wirklicher Division findet man $x = 12 - y - (\frac{y-1}{2})$. Also muß $\frac{y-1}{2}$ durch 2 theilbar seyn. Es sey daher $\frac{y-1}{2} = z$, und $y = 2z + 1$. Da nun y nicht über 8 seyn darf: so kann z nicht über 3 angenommen werden, und $x = 12 - (2z+1) - z = 11 - 3z$.

Dies giebt	$z = 0$	$z = 1$	$z = 2$	$z = 3$
	$y = 1$	$y = 3$	$y = 5$	$y = 7$
	$x = 11$	$x = 8$	$x = 5$	$x = 2$

Jeder dieser 4 Fälle thut der Aufgabe eine Genüge.

2) 20

Theorema generale demonstrandum.

1. Sit p primus et si fieri potest discerpatur $p-1$ in factores e, f E. gr. $43 = p$; $42 = 3 \cdot 14$.

2. His positis semper datur aequatio gradus $\underline{e}$, cuius radices sunt $\Sigma \left(\sqrt[p]{1}\right)^{\rho^{\dots}}$ term. $\underline{f}$ mod. $\underline{p}$. nostro casu datur aequatio $x^3 + Axx + Bx + C = 0$ cuius radices sunt

$$\begin{array}{ll} 1/ & 1 + \varrho^3 + \varrho^6 \dots + \varrho^{39} \\ 2/ & \varrho + \varrho^4 + \varrho^7 \dots + \varrho^{40} \\ 3/ & \varrho\varrho + \varrho^5 + \varrho^8 \dots + \varrho^{41} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1) & \varepsilon + \varepsilon^{(\varrho^3)} + \varepsilon^{(\varrho^6)} + \varepsilon^{(\varrho^9)} + \dots \varepsilon^{(\varrho^{39})} \\ 2/ & \varepsilon^{\varrho} + \varepsilon^{\varrho^4} + \varepsilon^{\varrho^7} + \dots \\ 3/ & \varepsilon^{\varrho\varrho} + \varepsilon^{\varrho^5} + + \end{array}$$

ubi $\varepsilon = \sqrt[p]{1}$

ϱ radix elem. modulo existente p

Dico hanc aequationem habere omnes radices (resid: f.) reales posito modulo quocunque $\underline{m}$ quando $m^e \equiv 1$ modulo p.

(54)

Oder $y = \frac{25 - 2x}{3}$ Also darf x nicht über 12 sein. Man dividire wirklich: so erhält man $y = 8 - \frac{2x-1}{3}$ Also $2x-1$ durch 3 theilbar. Man setze $2x - 1 = 3z$ oder $x = (z+1) : 2$. z muß also ungerade, u. da x nicht über 12 sein darf, nicht über 23 u. in 3 theilbar sein. Also

$z = 3$	$z = 9$	$z = 15$	$z = 21$
$x = 2$	$x = 5$	$x = 8$	$x = 11$
$y = 7$	$y = 5$	$y = 3$	$y = 1$

Welches der andern Art völlig entspricht.

→ [Bemerkung zum Tgb; vgl. S. 9, S. 31]

265. 256.9.0 | 225.36.4 | ~~144.121.1~~ | ~~121.81.64~~
144.121.0 |

305. 289.16.0 | 225.64.16 | 196.100.9
256.49.0 | 5 | 169.100.36

377. 361.16.0 | 324.49.4 |

273. 256.16.1

341. 324.16.1 | 289.36.16
256.49.36 | 16.225.100.

1641 961.484.196
1600.25.16

0,⋯⋯14 8643626904 4964697138 6101820884 4295800817 540.

+ 1⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

1⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

1

1

0000000014 86436270
6. 5381398237 6766989660
4. 5747109785 0338221167

11. 1128508037 57488378

5. 7004435733 9068642686
5. 4161004022 0442013199
9. 2103408719 7618273607

20. 3268943475 7128929449

9. 2140335438 13800916

= 1.10037

2) 20 Personen, Männer, Frauen und Kinder, haben insgesamt 1 Rthlr. 24 Mgr. verzehrt. Dazu hat jeder Mann 6 Mgr. jede Frau 4 Mgr. und jedes Kind 1 Mgr. gegeben. Wie viel sind x Männer, y Frauen und z Kinder?

Den Bedingungen zufolge sind $x + y + z = 20$, also $x + y < 20$. Ferner $6x + 4y + z = 60$, davon die erste Gleichung abgezogen, läßt $5x + 3y = 40$. Also $x = \frac{40 - 3y}{5}$. Da $\frac{3y}{5}$ eine ganze Zahl seyn muß: so setze man $y = 5u$, und $x = 8 - 3u$; folgl. $8 - 3u + 5u + z = 20$, und $z = 12 - 2u$. Hier sind wegen $x = 8 - 3u$ nur 2 Werthe für u möglich, nämlich $u = 1$, und $u = 2$;

$$\text{also } y = 5 \quad \text{oder} \quad y = 10$$
$$x = 5 \qquad\qquad x = 2$$
$$z = 10 \qquad\qquad z = 8$$

3) Ein Münzmeister hat einige Stück Silber, jedes 1 Mk. schwer am Gewicht. Einige aber sind 14löthig, andere 11löthig, noch andere 9löthig. Nun soll er eine Masse, 30 Mk. schwer, verarbeiten, die 12löthig ist. Wie viel nimt er von jeder Sorte? Vom 14löthigen x Stück, vom 11löthigen y, und vom 9löthigen z.

Also $x + y + z = 30$. Darin ist an reinem Silber

$$14x + 11y + 9z = 30 \cdot 12 \text{ Loth} = 360 \text{ Lt.}$$

Nimt man die erste Gleichung 9mal, so ist

$$9x + 9y + 9z = 30 \cdot 9 \text{ Loth} = 270 \text{ Lt.}$$
$$\text{folgl. } 5x + 2y = 90; \text{ und } 2y = 90 - 5x.$$

Also $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Da nun ganze Zahlen verlangt werden, so muß x durch 2 theilbar seyn. Also $x = 2u$, dies giebt $y = 45 - 5u$. Hier darf also u nicht größer als 9 seyn. Und $z = 30 - x - y = 30 - 2u - 45 + 5u = 3u - 15$. Also darf u nicht kleiner seyn als 5.

Die Gränzen für u sind demnach	5	6	7	8	9
folgl. $x = 2u =$	10	12	14	16	18
$y = 45 - 5u =$	20	15	10	5	0
$z = 3u - 15 =$	0	3	6	9	12

4) Wenn

4) Wenn 4 unbekannte Größen und 2 Gleichungen gegeben sind: so ist gewöhnlich die Zahl der möglichen Fälle so groß, daß man die Lust verliert sie alle anzugeben. Z. B. Eine Bauerfrau hat x Gänse, y Hühner, z Enten und t Tauben, insgesamt 140 Stück, verkauft, jede Gans um 10 Mgr., jedes Huhn um 6 Mgr., jede Ente um 4 Mgr., jede Taube um 2 Mgr., und insgesamt 26 Rthl. 24 Mgr. gelöset; wie viel Stück hatte sie von jedem? Hemeling, aus dem dieses Exempel genommen, sagt: 60 Gänse, 40 Hühner, 20 Enten und 20 Tauben. Allein nur die Probe mit der Substitution eines willkührlichen Werths für die eine unbekaante Größe y soll zeigen, daß man ermüden würde, hier alle mögliche Fälle zu berechnen.

Es ist näml. $x + y + z + t = 140$; also $t = 140 - x - y - z$,
ferner $10x + 6y + 4z + 2t = 960$ Mgr.
oder $5x + 3y + 2z + t = 480$.
Zieht man davon die oberste Gleichung ab: so bleibt
$$4x + 2y + z = 340.$$
Also $x = \frac{340}{4} - \frac{2y}{4} - \frac{z}{4}$.

Da y und z ganze Zahlen seyn müssen: so setze man $y = 2p$, und $z = 4q$; also $x = 85 - p - q$; folgl. $p + q$ muß kleiner seyn als 85.

Nun setze man 1) $p = q$: so ist $x = 85 - 2q$; $y = 2q$; $z = 4q$ und $t = 140 - 85 + 2q - 2q - 4q = 55 - 4q$. Also darf q nicht größer seyn als 13. Dies giebt folgende 13 Fälle für die Aufgabe.

$q =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x = 85 - 2q =$	83	81	79	77	75	73	71	69	67	65	63	61	59
$y = 2q =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$z = 4q =$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
$t = 55 - 4q =$	51	47	43	39	35	31	27	23	19	15	11	7	3

2) Man setze ferner $p = 2q$: so ist $x = 85 - 2q - q = 85 - 3q$; $y = 4q = z$, und $t = 140 - 85 + 3q - 8q = 55 - 5q = (11 - q)5$; folglich darf q nicht größer als 11 seyn; und man erhält folgende 11 oder eigentlich nur 10 Fälle.

$$apq + bp + c = pqr$$
$$a'qr + b'q + c' = qrs$$
$$a''rs + b''r + c'' = rst$$
$$a'''st + b'''s + c''' = stp$$
$$a^{IV}tu + b^{IV}t + c^{IV} = tpq$$

$$a^{I \ldots IV} \; xx$$

$$10037 \cdot 97 \cdot 691 + 1 = 672\,750000 = 225 \cdot 10000 \cdot 299$$

$$l\,10037 = l\,10000 + l.225 + l.299 - l\,97 - l\,691$$

$$-\frac{1}{a} = \frac{1}{1000000}\left(\frac{2}{9} + \frac{9}{13} + \frac{2}{23} - 1\right)$$

9145 2991452991 4529914529 9145299145 2991452991 453
869 5652173913 0434782608 6956521739 1304347826 087

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = s^0$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \sqrt{(1 - x^4)}$$

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} = -2x^3$$

$$\frac{d^3 x}{d\varphi^3} = -6x^2 \sqrt{(1 - x^4)}$$

$$\frac{d^4 x}{d\varphi^4} = -12x(1 - x^4) + 12x^5 = -12x + 24x^5$$

Zur Möglichkeit des Ausdrucks

$a\Box + b = c\Box$ wird erfordert:

1) daß $+bc$ ein R. v. a sei

2) daß $-ab$ ein Rest v. c sei

3) daß $+ac$ ein R. v. b sei

Generalissime ad possibilitatem aequationis

$axx + byy + czz = 0$

requiritur

I) Ut non omnes a, b, c idem signum habeant

II) ut

$$\left.\begin{array}{l} -bc \\ -ac \\ -ab \end{array}\right\} \text{residua sint ipsorum} \left\{\begin{array}{l|l} a\times & b,c \\ b\times & c,a \\ c\times & a,b \end{array}\right.$$

div. c. max.

a factt. suis quadratis liberati

Allgemeiner zur Möglichkeit der Gleichung

$a\Box + b\Box = c\Box$ ist nöthig daß

1) $+ac$ R. v. b

2) $-ab$ R. v. c } sei

3) $+bc$ R. v. a

Canon quantitatum imaginariarum exponentialium

$$a^{\sqrt{-1}} = \cos. la + \sqrt{-1}\,\sin la$$

$$(a+b\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}} = \left(\frac{a}{\cos\varphi}\right)^{n\sqrt{-1}}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{b}{a} = \tang\varphi\right) \quad = \left(\frac{a}{\cos\varphi}\right)^{\sqrt{-1}}(\cos(\sqrt{-1})\varphi + \sin\sqrt{-1}\varphi\sqrt{-1})$$

$$= \left(\frac{a}{\cos\varphi}\right)^{\sqrt{-1}} e^{-\varphi}$$

$$= e^{-n\,\mathrm{Arc.\,tg.}\frac{b}{a}}\left(\cos. n\, l\frac{aa+bb}{a} + \sin n\, l\frac{aa+bb}{a}\sqrt{-1}\right)$$

$$a + \frac{a}{aa+bb} + \left(e^{+\mathrm{Arc.\,tg.}\frac{b}{a}} + e^{-\mathrm{Arc.\,tg.}\frac{b}{a}}\right)\cos. l\frac{aa+bb}{a} = 1$$

$$b - \frac{b}{aa+bb} + \left(e^{-\mathrm{A.\,tg}\frac{b}{a}} \cancel{+} e^{+\mathrm{A\,tg}\frac{b}{a}}\right)\sin l\frac{aa+bb}{a} = 0$$

Hypoth. $aa + bb = 1$ $\qquad N = \mathrm{Arc.\,cos.}\, a$

$$2a + e^{N} + e^{-N} = 1$$

$q =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x = 85 - 3q =$	82	79	76	73	70	67	64	61	58	55	52
$y = z = 4q =$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
$t = 55 - 5q =$	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

3) Man setze $p = 4q$, also $y = 8q$; $z = 4q$; $x = 85 - 5q$, $t = 55 - 7q$, also kann q nicht größer als 7 seyn. Dies giebt

$q =$	1	2	3	4	5	6	7
$x = 85 - 5q =$	80	75	70	65	60	55	50
$y = 8q =$	8	16	24	32	40	48	56
$z = 4q =$	4	8	12	16	20	24	28
$t = 55 - 7q =$	48	41	34	27	20	13	6

Probe vom letzten Fall.

$x = 50$	und	$10x = 500$
$y = 56$		$6y = 336$
$z = 28$		$4z = 112$
$t = 6$		$2t = 12$
140 Stück		960 Mgr.

Anmerkung. Dergleichen Tabellen ließen sich noch weit mehrere machen. Die Alten nennten deshalb diese unbestimmten Aufgaben Regula coeci, weil man unter so vielen Fällen gleichsam blind wählen muß. Uebrigens bleibt dieser Theil der Analytik für solche, die ihren Scharfsinn üben wollen, immer sehr schätzbar. Die Gleichungen von höhern Graden aber sind für Anfänger in den meisten Fällen zu schwer und zu verwickelt, und werden deshalb hier übergangen. Blos die Functional-Gleichungen der höhern Geometrie pflegen in den Anfangsgründen vorgetragen zu werden. Diese aber gehören hier nicht her.

Zusatz

Zusatz zu §. 80.

Setzt man allgemein $q = ur$: so läßt sich in dem Bruche $\frac{m}{am+n}$ der Zähler durch 1, und der Nenner durch eine schief laufende Kette von Brüchen ausdrücken.

$$\frac{m}{am+n} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{t+\cfrac{1}{u}}}}$$

Denn $\frac{m}{am+n} = \frac{m:m}{(am+n):m}$ (§. 25.) $= \cfrac{1}{a+\cfrac{n}{m}}$

bekommt man

Da nun $m = pn+q$: so ~~ist~~ $\cfrac{1}{a+\cfrac{n}{m}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{n}{pn+q}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{q}{n}}}$

und weil $n = qt+r$: so ist $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{q}{n}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{q}{qt+r}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{t+\cfrac{r}{q}}}}$

Endlich, wenn $q = ur$: so ist $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{t+\cfrac{1}{u}}}}$

Man kann dieses Verfahren immer so lange fortsetzen, bis der Bruch endlich auf diese Form gebracht ist, die, wenn sie wieder auf einen gewöhnlichen Bruch reducirt wird, denselben doch in der kleinsten Zahl angiebt (§. 33.), eben weil der gemeinschaftliche größte Theiler r wegfällt. Man kann aber auch, wenn die größte Schärfe nicht nöthig ist, schon nach einer oder einem Paar Divisionen mit den Zählern der gebrochenen Reste aufhören, und erhält alsdann nur kleine Zahlen, die doch dem Werth des Bruchs ziemlich nahe kommen.

So

Es sei

$ap + 1 = pq$ - -
$bq + 1 = qr$ - -
$cr + 1 = rs$ - -
$ds + 1 = st$ - - -
$et + 1 = tp$

$[pq, qr, rs, st, tp]$

Also $abcde.pqrst = \overline{pqrst}^2 - (\text{pr}.4) + (\text{pr}.3) - (\text{pr}\ 2) + \text{Summ} - 1$

$\left.\begin{matrix} abc \\ bcd \\ cde \\ dea \\ eab \end{matrix}\right\} pqrst = (\text{pr}.4) - (\cancel{\text{pr}.3} + \odot) + (\text{pr}.2 + \odot) - \text{Summ}$

$\left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} pqrst = (\text{pr}.3\ \odot)\ \cancel{(\text{pr}.2)} - (\text{pr}\ 2\ \odot)$

3,1 | 2,1 | 5,1 | 4,1 | 3,1 | 2,1 | 5,1 | 4,1 |

-1 0 1 3 7 38 159 615 1189 6460

170 = 120
+ 6 + 10 + 20 + 12 = 48

$p = e + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a +}}}}$

$\alpha = \alpha'\beta'$
$\beta = \beta''\gamma'$
$\gamma = \gamma'\delta'$

$\alpha' ap + \alpha = p\alpha q$
$e\ \beta' bq + \beta = q\beta r$
$\gamma' c r + \gamma = r\gamma s$
$\delta' d s + \delta = s\delta t$
$\varepsilon' e t + \varepsilon = t\varepsilon p$

$aP + \alpha = \frac{\alpha}{\alpha'\beta'} PQ$

$\sqrt{\alpha\beta\gamma\ldots}$

$apq + p + 1 = pqr$

$\alpha' p = P$
$p\alpha q = PQ\alpha$
$\beta'' q =$

Dans cette demonstration nous avons supposé seulement qu'il y avoit un nombre premier b de la forme $4n-1$ qui pouvoit diviser la formule $xx+Ayy$

le Gendre Mem. de Paris 1785. p. 520.

Il auroit été mieux d'avoir demontré cela ou de ne pas pretendre d'avoir donné une demonstration où manque la partie la plus essentielle. G.

~~[illegible]~~

$$m\mu + n\nu + p\pi = 0$$
$$mm + nn + pp = C$$
$$\mu\mu + \nu\nu + \pi\pi = \Gamma$$

~~$\Gamma\mu\mu$~~

$$C(\mu\mu+\nu\nu) = (m\nu - n\mu)^2 + \Gamma p^2.$$
$$\Gamma(mm+nn) = (m\nu - n\mu)^2 + C\pi^2.$$

I Wenn $m\mu + n\nu + p\pi = 0$ u. $mm+nn+pp = \cancel{m'm'} + n'n' +$

$m'\mu + n'\nu + p'\pi = 0$

so ist Γ oder C. zusammengesetzt

II. Wenn $m\mu + n\nu + p\pi = 0$ so ist Γ oder C oder beide zusammengesetzt.

$m'\mu' + n'\nu' + p'\pi' = 0$

$$\frac{m\nu - n\mu}{p} \pm \frac{m\nu' - n\mu'}{p} \text{ Theilb. d. } C.$$

So ist $\frac{m}{am+n}$ beynahe $= \frac{1}{a+\frac{1}{p}}$ u. noch genauer $\frac{1}{a+\frac{1}{p+\frac{1}{t}}}$

Der erste Werth giebt $\frac{p}{pa+1}$, wie man leicht sieht, wenn man Zähler und Nenner mit p multiplicirt. Um den zweyten Werth zu finden: setze man $\frac{1}{t} = \alpha$.

Also $\frac{1}{a+\frac{1}{p+\alpha}} = \frac{1.(p+\alpha)}{(a+\frac{1}{p+\alpha})(p+\alpha)} = \frac{p+\alpha}{a(p+\alpha)+1} = \frac{tp+1}{atp+t+n}$

In unserm Exempel $\frac{345}{437}$ ist $a=1$, $p=3$, $t=1$. Und $\frac{345}{437}$ beynahe $= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$; denn $\frac{3}{4}$ ist nur um $\frac{3}{76}$ zu klein.

Setzt man aber $\frac{345}{437} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{t..}}}$; so ist $\frac{tp+1}{atp+t+n} = \frac{4}{5}$

welches um $\frac{1}{95}$ zu groß ist. Setzt man endlich $\alpha = \frac{1}{t+\frac{1}{u}}$ $= \frac{u}{ut+1}$: so bekommt man den völligen Werth in den kleinsten Zahlen, die möglich sind.

Es ist nämlich $\frac{p+\alpha}{a(p+\alpha)+1} = \frac{p+\frac{u}{ut+1}}{a(p+\frac{u}{ut+1})+1}$ $= \frac{p(ut+1)+u}{a(put+p+u)+ut+1}$ der völlige Bruch mit Weglassung des gemeinschaftlichen größten Theilers r. Hier z. B. ist, außer den vorhin angezeigten Werthen, $u=3$, und $\frac{345}{437} = \frac{15}{19} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} = \frac{3(3+1)+3}{3\cdot3+3+3+3+1}$.

Ein anderes Exempel sey das berühmte Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange, $\frac{10000\,000\,000}{31415\,926\,536}$. Hier ist $\frac{1}{a+\frac{1}{p}} = \frac{1}{3+\frac{1}{7+..}} = \frac{7}{22}$, genauer $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{t+\,..}}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}} = \frac{15\cdot 7+1}{3\cdot 15\cdot 7+15+1} = \frac{106}{331}$

und noch genauer $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{t+\cfrac{1}{u+\,..}}}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\,..}}}}$

$= \frac{7(15+1)+1}{3(7\cdot 15+7+1)+15+1} = \frac{113}{355}$. Dieser letzte Bruch ist nicht völlig um $\frac{3}{100000000}$ kleiner als der gegebene.

Eine ausführlichere Erläuterung dieser Kette von Brüchen im Nenner findet man, nebst andern gründlichen Untersuchungen, die der Kürze wegen hier übergangen sind, in Hrn. Prof. Joh. Christian Lud. Hellwig Anfangsgründen der allgemeinen Mathematik und der Arithmetik. Braunschweig, 1777.

Wolfenbüttel,
aus der Bindseilschen Buchdruckerey, 1790.

Druckfehler.

Seite 6. Zeile 10. statt heißt lies giebt.

S. 7. §. 1. 1. st. Dinge l. Nur Dinge.

S. 9 Z. 4. von unten, st. §. 13. l. §. 15.

S. 10. Z 2. v. u. st. oder l. und.

S. 12. Z. 13. st. §. 19. l. §. 18.

S. 13. Z. 23. st. $\frac{243}{130}$ l. $\frac{243}{120}$.

S. 17. Z. 1. st. Fartors l. Factors.

S. 18. Z 24. st. l. 52. l. l. 512.

S. 20. Z. 4. st. $(6\,ba^2\,b^3)$ l. $(6\,a^2\,b^3)$.

S. 27. §. 75. st. (a^2+ab+b^2) l. $(a^2+2ab+b^2)$.

S. 28. Z. 18. st. §. l. § 30.

S. 30. Z. 22. st. $\frac{149235}{563000}$ l. $\frac{194235}{563000}$; und letzte Zeile st §. 14. l. §. 15.

S. 38. Z. 22. st. 1971,175 l. 1971,125.

S. 39. Z. 7. v. u. st. die Produkte l. einige Produkte.

S. 41. Z. 8. v. u. st. §. 104. l. §. 106.

S. 44. § 115. Z. 11. v. u. st. §. 112. l. denn für $\frac{1+x}{1-x} = 10$ ist in der Reihe §. 113. $x = \frac{9}{11}$ wie für K §. 112.

S. 45. Z. 16. st. l. $\frac{100}{10{,}73}$ l. $\frac{100}{1073}$.

S. 51. Z. 6. st. Zwey Glieder l. Zwey Glieder des Verhältnisses in ꝛc.

S. 52. Z. 6. v. u. st. $(12-1)$ ggr. l. $(12-1)$ pf.

S. 57. Z. 10. st. nach s l. nach 5.

S. 71. Z. 8. st. n^2+2n+1 l. n^2-2n+1.

S. 78. Z. 8. v. u. st. $c = 25000$ l. $c = 25$ oder 25,000.

S. 85. Z. 8. v. u. st. $\frac{13}{12}(x-3)$ l. $\frac{13}{12}x-3$.

S. 86. Z. 7. v. u. st. $5x+12$ ggr. ꝛc. l. $5x+72$ ggr. ꝛc.

S. 94. Z. 19. st. $\pm\sqrt{(f-49}$ l. $\pm\sqrt{(f^2-4g)}$.

S. 112. Z. 11. v. u. st. so ist l. so bekommt man.

Valores x numeri primi | a $-\frac{aa}{b}$

y ~~in~~ ordine

$\frac{dy}{dx}$ | n $b\,\frac{2-n+\frac{1}{a}}{2aa+\frac{a}{n}}$

$\frac{x\,dy}{dx}$ | m $b\,\frac{2-\frac{m}{a}+\frac{1}{m}}{2aa+\frac{aa}{m}}$

x	316	100000
y	65	9593
n	0,16	

$\frac{1{,}86}{202000}$ 9593

76744

57558

1784298

892149

0,08833

Iterum $\frac{dx}{\zeta} = dy$

$|x| = x + \omega\zeta + \frac{\omega\omega}{1.2}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\omega^3}{6}\zeta d\zeta d\zeta + \&c.$

rerum correspondentes $\underset{x}{y}$ $\underset{|x|}{y+\omega}$

folglich ist

$x = t + uX$

~~$x = t$~~ ~~2~~

Umkehrung ist $y = \varphi x$ ist

$x = x + \frac{\omega}{\varphi' x} - \frac{\omega\omega\,\varphi'' x}{2\,\varphi' x^2} - \frac{\omega^3}{6}\Big($

$x = x + \frac{\omega}{\zeta} - \frac{\omega\omega\,\zeta'}{2\zeta^3} + \frac{\omega^3}{6}\Big(\frac{3\zeta'\zeta' - \zeta\zeta''}{\zeta^5}$

Ideal

Speculationes mathematicae si ad earum utilitatem respicimus ad duas classes reduci debere videntur: ad priorem referendae sunt eae quae cum ad vitam communem tum ad alias artes insigne aliquod commodum afferunt quarum propterea pretium ex magnitudine huius commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo insigni commodo sunt coniunctae tamen ita sunt comparatae ut ad fines analyseos promovendos viresque ingenii acuendas occasionem praebeant. Cum enim plurimas speculationes, unde maxima utilitas expectari posset, ob solum analyseos defectum, deserere cogamur, non minus pretium iis speculationibus statuendum videtur quae haud contemnenda analyseos incrementa pollicentur. 58

Euler. Comm. Nov. Petrop. VI. p. 58

Il y a des verités generales que notre esprit est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers.

Euler. Histoire de l'Ac. de Berlin 1748. p. 234.

Au sujet du theoreme de Fermat : $a^m \equiv a$.

on pourra comparer encore

<u>l'appel au public</u> par <u>König</u> et

<u>la reponse de Euler</u> Hist: de l'Ac. de Pr. A. 1750. p 530