

## CAPITEL 6

### VON DEN BRÜCHEN UND DER NATUR DERSELBEN ÜBERHAUPT

1. *Wann in der Division der Divisor und der Dividendus so beschaffen sind, dass die Operation ohne Rest nicht vollzogen werden kann, so wird der Quotient, welcher anzeigt, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten ist, ein Bruch genannt.*

Wir haben schon in dem vorigen Capitel bei Nr. 3 angemerkt, dass nicht bei einer jeglichen Division der gesuchte Quotus accurat in ganzen Zahlen könne angezeigt werden, da wir uns dann begnügen mussten, die nächste kleinere Zahl dafür anzunehmen, und dabei den Rest anzumerken. In diesen Fällen ist demnach der daselbst gefundene Quotus nicht der wahre Quotus; sondern dazu muss noch der herauskommende Rest in Betrachtung gezogen werden, um einen hinlänglichen Begriff zu haben, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten sei. Als wann 17 durch 5 getheilet werden soll, so finden wir durch die daselbst gegebenen Regeln, dass der Quotus 3, und dazu noch ein Rest, nämlich 2, sei. Hieraus erhellet, dass 5 in 17 mehr als 3 mal enthalten, und folglich der wahre Quotus grösser als 3 sein müsse. Dann da 5 in 15 drei mal enthalten ist, so muss 5 in 17 nothwendig mehr als 3 mal begriffen sein. Dennoch aber ist 5 in 17 auch nicht gar 4 mal enthalten, weil 20 diejenige Zahl ist, welche 5 vier mal in sich begreift. Aus diesem folget also, dass der wahre Quotus, welcher anzeigen soll, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, grösser als 3 und doch kleiner als 4 sein müsse. Da sich nun zwischen 3 und 4 keine ganze Zahl befindet, so kann auch dieser Quotus keine ganze Zahl sein; unterdessen aber ist derselbe doch eine Grösse oder Zahl, indem man sagen kann, dass derselbe Quotus grösser als 3 und kleiner als 4 sei. Diese Art von Zahlen nun, welche keine ganze Zahlen sind, werden Brüche oder gebrochene Zahlen genennt. Der wahre Quotus also, welcher anzeigt, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, ist folglich ein Bruch, das ist keine ganze Zahl; und von diesem Bruch erhalten wir zugleich aus diesem seinem Ursprung einen deutlichen Begriff, indem derselbe eine Zahl ist, welche anzeigt, wie viel mal 5 in 17 enthalten ist.

2. *Ein Bruch oder gebrochene Zahl, das ist der wahre Quotus, welcher aus einer Division, da der Divisor in dem Dividendo nicht just etliche mal enthalten ist, entspringt, pflegt also geschrieben zu werden: Man schreibt den Divisor unter den Dividendum, und zieht dazwischen eine Linie. Ein Bruch also auf diese Art geschrieben deutet an, wie viel mal die unter der Linie stehende Zahl in der darüber stehenden enthalten sei.*

Da wir schon einen kleinen Begriff von einem Bruche erlanget, indem derselbe eine Zahl ist, welche anzeigt, wie viel mal eine gegebene Zahl in einer anderen enthalten sei, so wird erfordert, dass wir einen solchen Bruch auf eine bequeme Art auszudrücken suchen. Weil nun bei einem Bruch nach seinem Ursprung zwei Zahlen in Betrachtung kommen, nämlich der Dividendus und der Divisor, massen der Bruch den Quotum anzeigt, welcher aus einer solchen Division entspringt, so müssen auch in der Schreib–Art, dadurch der Bruch ausgedrückt wird, diese beiden Zahlen vorkommen. Dieses geschieht nun sehr bequem auf die angeführte Art, da der Dividendus über den Divisor gesetzt und eine Linie dazwischen gezogen wird. Dann auf diese Weise erkennt man zugleich den Ursprung und Werth eines Bruches, indem auf diese Art der Quotus angedeutet wird, welcher herauskommt, wann man

die obere Zahl durch die untere dividirt. In dem vorher gegebenen Exempel, da 17 durch 5 sollte dividirt werden, wird also der Quotus, welcher ein Bruch ist, auf diese Art angezeigt  $\frac{17}{5}$ . Durch diese Schreib-Art wird demnach ein Bruch ausgedrückt, und daraus erkennt man zugleich, was dasselbe für ein Bruch sei; nämlich  $\frac{17}{5}$  ist ein Bruch und deutet an, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, oder dieser Bruch ist der wahre Quotus, der herauskommt, wann man 17 durch 5 dividirt. Gleichergestalt wann 8 durch 7 getheilet werden soll, so ist der Quotus keine ganze Zahl, sondern ein Bruch und wird also geschrieben  $\frac{8}{7}$ . Und durch diese Schreib-Art  $\frac{5}{3}$  wird der Quotus angedeutet, welcher herauskommt wann man 5 durch 3 dividirt.

3. *Um einen Bruch mit den ganzen Zahlen besser zu vergleichen, so ist zu merken dass, wann die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile zertheilet wird, als die unter der Linie stehende Zahl ausweist, alsdann der Bruch so viel Theile enthalte, als die obere Zahl anzeige.*

Diese Art sich einen Begriff von dem Werth eines Bruchs zu machen, scheint zwar von der vorigen unterschieden zu sein, kommt aber in der That mit derselben sehr genau überein. Wann nämlich dieser Bruch  $\frac{7}{4}$  vorgegeben ist, so deutet derselbe nach der ersten Art den Quotum an, welcher herauskommt, wann man 7 durch 4 dividirt. Nach dieser Art aber sagen wir, dass, wann ein ganzes in 4 gleiche Theile getheilet wird, der Bruch 7 dergleichen Theile andeute und in sich begreife. Die Übereinstimmung aber dieser zwei verschiedenen Arten, den Werth eines Bruchs zu beschreiben, kann auf diese Weise gewiesen werden. Da  $\frac{7}{4}$  den Quotum andeutet, der herauskommt, wann man 7 durch 4 dividirt, so wird dadurch der vierte Theil von 7 angezeigt, dann 7 durch 4 dividiren ist nichts anders als den vierten Theil von 7 finden. Woraus erhellet, dass ein jeglicher Bruch nichts anders bedeute, als den so vielen Theil der obstehenden Zahl, als die untenstehende ausweist, welches wieder eine neue Art ist, sich den Werth eines Bruchs vorzustellen. Weilen nun, um bei dem gegebenen Exempel von  $\frac{7}{4}$  zu bleiben, 7 sieben mal grösser ist als 1, so muss folglich auch der vierte Theil von 7 sieben mal grösser sein als der vierte Theil von 1. Wann demnach 1 in 4 gleiche Theile getheilet wird, so ist einer derselben der vierte Teil von 1, und also 7 sieben mal grösser als ein solcher Theil. Woraus folget, dass dieser Bruch  $\frac{7}{4}$  sieben dergleichen Theile andeute, derer 4 ein ganzes oder eine Unität ausmachen. Aus diesem Exempel ist nun leicht zu begreifen, dass ein jeglicher Bruch, wann man die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile eintheilet, als die untere Zahl anzeigt, solcher Theile so viel in sich begreife, als die obere Zahl anzeigt. Und hieraus versteht man zugleich, dass diese Art mit der vorigen auf das genaueste übereinstimme.

4. *Wann ein Bruch auf vorbesagte Art geschrieben ist, so wird die über der Linie stehende Zahl der Zähler, die untere aber der Nenner genannt. Ein jeder Bruch aber wird also ausgesprochen: erstlich nennt man den Zähler und darauf den Nenner mit Hinzusetzung des Worts Theil. Als dieser Bruch  $\frac{5}{12}$  wird ausgesprochen: fünf zwölfte Theil.*

Nach dem Ursprung der Brüche aus der Division ist die obere Zahl der Dividendus, die untere aber der Divisor. Die jetzt gegebene Benennung aber hat ihren Grund in der eben vorher angezeigten Eigenschaft der Brüche, da ein jeder Bruch, wann die Unität oder ein

ganzes in so viel gleiche Theile getheilet wird, als die untere Zahl anzeigt, dergleichen Theile so viel in sich begreift, als die obere Zahl ausweist. Dann da die obere Zahl die Anzahl solcher Theile angibt, so wird dieselbe daher füglich der Zähler genannt. Die untere Zahl heisst aber deswegen der Nenner, weil dieselbe die Art dieser Theile benennet, indem sie anzeigt, wieviel dergleichen Theile ein ganzes ausmachen. Also ist in diesem Bruch  $\frac{7}{10}$  die obere Zahl 7 der Zähler, die untere Zahl 10 aber der Nenner. Und da man sich den Inhalt also vorstellt, dass, wann die Unität oder ein ganzes in zehen gleiche Theile getheilet würde, derselbe 7 dergleichen Theile in sich enthalte, so kann derselbe also füglich mit Worten ausgesprochen werden: sieben zehente Theile eines ganzen. Dann weilen man sich hier die Unität in zehen gleiche Theile getheilet vorstellt, so ist ein solcher Theil der zehnte Theil eines ganzen, und sieben dergleichen, so viel nämlich der Bruch  $\frac{7}{10}$  begreift, sind sieben zehnte Theile eines ganzen. Der letzte Zusatz aber eines ganzen, weilen derselbe bei allen Brüchen vorkommt, pflegt gemeinlich der Kürze halben ausgelassen zu werden, so dass dieser Bruch  $\frac{7}{10}$  nur sieben zehnte Theil genannt wird. Gleichergestalt heisst dieser Bruch  $\frac{15}{28}$  fünfzehn achtundzwanzigste Theil, und dieser  $\frac{3}{4}$  drei vierte Theil. Ist der Zähler 1, so deutet ein solcher Bruch einen solchen Theil an, dergleichen so viel, als der Nenner anzeigt, ein ganzes ausmachen. Demnach heisst dieser Bruch  $\frac{1}{3}$  ein dritter Theil, oder, welches gleichviel, ein Drittel; also heisst  $\frac{1}{4}$  ein Viertel,  $\frac{1}{5}$  ein Fünftel, und so fort. Ist aber der Nenner 2, so wird anstatt zweite Theil oder Zweitel gesagt halbe, als  $\frac{1}{2}$  heisst ein halbes,  $\frac{3}{2}$  drei halbe, und so fort. Hieraus lässt sich nun sowohl die Schreib-Art als Benennung der Brüche leicht verstehen; zu Erkennung des Werths oder wahren Inhalts der Brüche aber wird ausser dem, was schon allbereits ist angebracht worden, folgendes dienen.

*5. Ist in einem Bruch der Zähler kleiner als der Nenner, so ist auch der Bruch selber kleiner als ein ganzes oder als 1. Ist aber der Zähler grösser als der Nenner, so ist auch der Inhalt des Bruchs grösser als 1. Ein Bruch aber, da der Zähler dem Nenner gleich ist, hält just ein ganzes.*

Die Wahrheit dieses, was hier ist vorgebracht worden, lässt sich aus den beiden Arten, nach denen wir uns die Brüche vorgestellt, leicht erweisen. Dann da nach der ersten Art ein Bruch den wahren Quotum anzeigt, welcher herauskommt, wann man die obere Zahl durch die untere dividirt, so ist klar, dass wann die obere Zahl kleiner ist als die untere, diese in jener nicht ein mal, sondern weniger mal darinnen enthalten sei; weswegen in solchem Fall der Quotus, das ist der Inhalt des Bruchs, kleiner als 1 sein muss. Als  $\frac{3}{7}$  deutet den Quotum an, welcher herauskommt, wann man 3 durch 7 dividirt. Nun aber ist 7 in drei nicht ein mal enthalten, dann 1 mal 7 macht 7, das ist mehr als 3; dennoch aber ist 7 in 3 mehr als kein mal oder 0 mal enthalten, dann 0 mal 7 macht 0, das ist weniger als 3. Hieraus folget also, dass dieser Bruch oder der wahre Quotus, so herauskommt, wann 3 durch 7 dividirt wird, kleiner sei als 1, und doch grösser als nichts. Auf gleiche Weise sieht man, dass, wann die obere Zahl grösser ist als die untere, alsdann diese in jener mehr als ein mal enthalten und folglich der Inhalt des Bruches grösser als 1 sein müsse. Also ist  $\frac{7}{5}$  grösser als 1, dann wann ich 7 durch 5 dividire, so kommt in Quotum 1 und bleibt noch 2 über, weswegen der wahre Quotus, das ist der Werth des Bruchs  $\frac{7}{5}$ , grösser sein muss als 1. Ingleichem gibt es auch Brüche, welche grösser sind als 2, 3, 4, und so fort;

als  $\frac{15}{4}$  ist grösser als 3, und  $\frac{30}{7}$  grösser als 4, wie aus der Division erhellet. Dass aber ein Bruch, in welchem der Zähler dem Nenner gleich ist, just 1 ausmache, lässt sich hieraus auch leicht ersehen. Dann da die obere Zahl der unteren gleich ist, so ist diese in jener just ein mal enthalten, und also der wahre Quotus 1. Nämlich  $\frac{4}{4}$  ist so viel als 1, dann  $\frac{4}{4}$  ist der Quotus, so herauskommt, wann man 4 durch 4 dividirt; dieser Quotus aber ist 1 ohne Rest, und also ist  $\frac{4}{4}$  so viel als 1. Gleichermassen gibt es auch Brüche, welche 2, 3, oder eine andere ganze Zahl ausmachen; also ist  $\frac{6}{3}$  so viel als 2,  $\frac{12}{4}$  so viel als 3. Dergleichen Brüche aber sind eigentlich keine Brüche, indem ihr Werth durch ganze Zahlen angegeben werden kann. Weilen aber doch die Schreib-Art die Gestalt eines Bruchs hat, so werden solche Brüche Schein-Brüche oder scheinbare Brüche genennet, und werden in der Brüche-Rechnung auch gebraucht. Solche Schein-Brüche sind alle diejenige, deren Nenner 1 ist; dann da eine jegliche Zahl durch 1 dividirt selbst wieder herauskommt, so trägt ein solcher Bruch eben so viel aus, als sein Zähler anzeigt. Nämlich  $\frac{7}{1}$  ist 7, und  $\frac{13}{1}$  ist 13. Auf diese Art kann also eine jede ganze Zahl in die Gestalt eines Bruchs gebracht werden, welches in der Bruch-Rechnung öfters nöthig ist. Alles dieses aber, was wir aus unserem ersten Begriff der Brüche hergeleitet, folget gleichermassen auch aus dem anderen und noch leichter. Dann da man ein ganzes in so viel Theile theilt, als der Nenner eines Bruchs anzeigt, und der Bruch selbst alsdann dergleichen Theile so viel enthält, als der Zähler anweist, so ist klar, dass, wann der Zähler dem Nenner gleich ist, alsdann der Bruch eben so viel Theile enthalte, als ein ganzes ausmachen, und folglich selbst ein ganzes betrage. Und weilen ferner ein ganzes so viel Theile hält, als der Nenner ausweist, so muss ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, kleiner als 1, und ein Bruch, dessen Zähler grösser ist als der Nenner, grösser als 1 sein. Dann in jenem Fall sind weniger Theile, in diesem aber mehr enthalten, als zu einem ganzen erfordert werden.

6. *Ein Bruch, welcher grösser ist als 1, oder in welchem der Zähler grösser ist als der Nenner, kann folgendergestalt in zwei Glieder zerleget werden, davon eines eine ganze Zahl, das andere aber ein Bruch ist, welcher kleiner als ein ganzes. Nämlich man dividirt den Zähler durch den Nenner auf die in der Division beschriebene Art, und da gibt der Quotus das eine Glied, nämlich die ganze Zahl, der Rest aber gibt für das zweite, gebrochene Glied den Zähler, wozu der vorige Nenner genommen wird.*

Um den Inhalt dieses Satzes deutlicher zu machen, so sei gegeben dieser Bruch  $\frac{20}{3}$ , welcher grösser ist als 1, weilen der Zähler grösser ist als der Nenner. Nun um zu wissen, wie viel ganze in diesem Bruch enthalten sind, und ausser denselben was für ein Bruch, so dividirt man den Zähler 20 durch den Nenner 3; da dann in Quotum 6 ganze kommen und noch 2 für den Rest zurückbleiben. Dieser Rest 2 giebt nun den Zähler des Bruchs, dessen Nenner ist 3, nämlich  $\frac{2}{3}$ . Hierauf sagt man, dass der vorgelegte Bruch  $\frac{20}{3}$  so viel sei als 6 ganze nebst  $\frac{2}{3}$ , welche ganze Zahl nebst dem Bruch also geschrieben zu werden pflegt  $6\frac{2}{3}$ , da der Bruch hinter die ganze Zahl gesetzt wird, und heisst eine ganze Zahl nebst einem Bruch. Also ist  $\frac{20}{3}$  eben so viel als  $6\frac{2}{3}$ ; gleichergestalt ist  $\frac{33}{7}$  so viel als  $4\frac{5}{7}$  und  $\frac{51}{11}$  so viel als  $4\frac{7}{11}$ . Dann wann man 33 durch 7 dividirt, so kommen in Quotum 4 ganze, und in Rest 5, woraus der angehängte Bruch  $\frac{5}{7}$  entsteht. Dividirt man aber 51 durch 11, so kommen in Quotum 4 ganze und restiren noch 7, daher der  $\frac{7}{11}$  entspringet. Auf diese Art erkennt man also

gleich, wie viel ganze in einem Bruche enthalten sind, und was für ein Bruch noch ausser denselben dazu gehöre. Man findet nämlich eine ganze Zahl nebst einem Bruche, welche zusammen eben so viel ausmachen, als der vorgelegte Bruch. Durch diese Operation erhält man also einen deutlichen Begriff von einem Bruch, indem man erkennt, wie viel derselbe ganze und nebst denselben noch was für einen Bruch in sich begreife. Es ist aber klar, dass dieser angehängte Bruch allezeit kleiner sein [muss] als ein ganzes, dann sein Zähler ist der aus der Division entsprungene Rest, welcher allezeit kleiner ist als der Theiler, so zum Nenner gemacht wird. Diesemnach wird die Erkenntnis eines jeglichen Bruches, so grösser ist als ein ganzes, auf die Erkenntnis eines Bruches, der kleiner ist als 1, gebracht, so dass, wer sich einen deutlichen Begriff von Brüchen, die kleiner sind als 1, zuwegen gebracht hat, derselbe zugleich von allen anderen Brüchen einen deutlichen Begriff erhält. Also wer weiss, was  $\frac{1}{3}$  ist, derselbe weiss zugleich, was  $\frac{10}{3}$  bedeutet, indem so viel ist als  $3\frac{1}{3}$ , das ist 3 ganze nebst  $\frac{1}{3}$ . Dieses dienet nun zur Erläuterung und Gebrauch der gegebenen Regel; der Grund davon aber weiset sich leicht aus der Natur der Brüche. Dann da der Inhalt eines jeglichen Bruchs nichts anders ist als der wahre Quotus, so herauskommt, wann man die obere Zahl, das ist den Zähler, durch die untere oder den Nenner dividirt, so kann dieser Inhalt durch die wirkliche Division gefunden werden. Durch die Division findet man aber erstlich eine ganze Zahl in den Quotum, welche aber nicht den völligen und wahren Quotum ausmacht, wann noch ein Rest vorhanden ist. Dann um den völligen Quotum zu bekommen, so müsste noch der Rest durch den Divisor dividirt, und was herauskommt zu dem gefundenen Quoto gesetzt werden. Diese Division des Rests nun durch den Divisorem geschieht mittelst eines Bruchs, da der Rest zum Zähler, der Theiler aber zum Nenner genommen wird. In solchem Fall ist also der wahre Quotus nichts anders als der gefundene Quotus in ganzen Zahlen nebst dem Bruch, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Theiler oder des vorigen Bruchs Nenner selbst ist. Da also ein jeder Bruch nichts anders ist, als der völlige Quotus, der herauskommt, wann man den Zähler durch den Nenner dividirt, so ist derselbe auch gleich dem auf beschriebene Art durch die Division gefundenen völligen Quoto; nämlich der durch die Division für den Quotum gefundenen ganzen Zahl, nebst dem Bruch, dessen Zähler der zurückgebliebene Rest, der Nenner aber eben des vorigen Bruchs Nenner ist. Dieses ist demnach der Grund der gegebenen Regel, durch welche man einen Bruch, der grösser ist als 1, in eine ganze Zahl nebst einem Bruch verwandelt.

*7. Eine ganze Zahl nebst einem Bruch wird in einen einzelnen Bruch verwandelt, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler des Bruchs addirt, da dann diese Stimme den Zähler des gesuchten einzelnen Bruchs, der vorige Nenner aber den Nenner abgibt.*

Diese Operation ist nichts anders als eine Verkehrung der vorigen, dann vorher haben wir gelehret, einen Bruch, der grösser ist als ein ganzes, in eine ganze Zahl nebst einem Bruche verwandeln. Hier aber ist die Operation umgekehrt, und wird gelehret, wie man eine ganze Zahl nebst einem Bruche wiederum in einen einzelnen Bruch verwandeln soll. Beide Operationen haben ihren grossen Nutzen; denn durch die erste erhält man, wie schon gemeldet, einen deutlichen Begriff von dem Inhalt oder Werth eines Bruchs, die andere aber ist in denen folgenden Operationen mit den Brüchen höchst nöthig, da, um

dieselben zu bewerkstelligen, gemeinlich eine ganze Zahl nebst angehängtem Bruche in einen einzelnen Bruch verwandelt werden muss. Die gegebene Regel verhält sich nun also: es sei gegeben  $7\frac{2}{3}$ . nämlich eine ganze Zahl 7 nebst dem Bruch  $\frac{2}{3}$  woraus ein einzelner Bruch gemacht werden soll. Man multiplicirt also 7 mit 3, und zum Product 21 thut man 2, so bekommt man 23 für den Zähler des gesuchten Bruchs, dessen Nenner ist 3, nämlich  $\frac{23}{3}$ . Dass nun dieser Bruch eben so viel sei als  $7\frac{2}{3}$  erhellet aus dem vorigen Satz, dadurch  $\frac{23}{3}$  in  $7\frac{2}{3}$  verwandelt wird. Der Grund selbst aber von dieser Verwandlung ist dieser: Eine jede Zahl nebst angehängtem Bruche kann angesehen werden als ein aus der Division entsprungener wahrer Quotus, da der Nenner des angehängten Bruchs der Divisor, die ganze Zahl der Quotus in ganzen Zahlen, wie derselbe in der Division ist gefunden worden, der Zähler des Bruchs aber der Rest ist. In dieser Division fragt sich also der Dividendus, welcher, so er bekannt ist, sogleich einen einzelnen Bruch dargibt, dadurch der wahre Quotus, das ist die vorgegebene ganze Zahl nebst dem angehängten Bruch, ausgedrückt wird; nämlich der Dividendus gibt den Zähler, der Divisor aber den Nenner dieses gesuchten Bruchs. Aus dem Divisore aber, Quoto und Rest wird der Dividendus gefunden, wann man den Quotum mit dem Divisore multiplicirt und dazu den Rest setzt. Weilen nun der Dividendus den Zähler des gesuchten Bruchs gibt, so wird derselbe gefunden, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler hinzusetzt. Der Nenner aber dieses Bruchs ist der Divisor, das ist der Nenner des angehängten Bruchs selbst. Dieses beruhet alles auf der Natur der Division und demjenigen, was im vorigen Satz von Findung des wahren Quoti aus dem Rest ist angebracht worden. Nach dieser Regel erkennt man also, dass  $2\frac{1}{3}$  so viel ist als  $\frac{7}{3}$  dann 2 mal 3 macht 6 und 1 dazu gibt 7 für den Zähler des einzelnen Bruchs, dessen Nenner wie vor 3 ist. Gleichergestalt ist  $5\frac{3}{4}$  so viel als  $\frac{23}{4}$ , dann 4 mal 5 ist 20 und 3 dazu gibt 23. Also ist  $128\frac{173}{320}$  so viel als  $\frac{41133}{320}$ , wie aus beigefügter Operation zu sehen.

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \ 8 \\
 \underline{\quad\quad 3 \ 2 \ 0} \\
 2 \ 5 \ 6 \ 0 \\
 3 \ 8 \ 4 \\
 \underline{\quad\quad 1 \ 7 \ 3} \\
 4 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{der Nenner} \\
 \\
 \\
 \text{der Zähler}
 \end{array} \right\} \text{des gesuchten Bruches}$$

8. *Ein Bruch bleibt seinem Werth nach unverändert, wann man sowohl den Nenner als den Zähler durch eine beliebige Zahl multiplicirt. Und gleichergestalt behält auch ein Bruch seinen vorigen Werth, wann man beides, den Zähler und Nenner, durch eine beliebige Zahl dividirt. Woraus also erhellet, dass ein jeglicher Bruch, ohne seinen Werth zu verändern, auf unendlich vielerlei Arten vorgestellt werden könne.*

Diesen Satz zu erklären, so lasst uns diesen Bruch  $\frac{2}{3}$  zum Exempel dienen; wann desselben Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt wird, so kommt dieser Bruch  $\frac{4}{6}$  heraus welcher dem Inhalt nach dem vorigen Bruch vollkommen gleich ist. Wann nun ferner eben dieses Bruchs Zähler und Nenner durch 3 multiplicirt wird, so hat man  $\frac{6}{9}$ , welcher wiederum so viel

ist als  $\frac{2}{3}$ . Wann man also fortfährt, durch 4, 5, 6 und so fort zu multipliciren, so kommen folgende Brüche heraus  $\frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}$ , und so weiter fort, welche alle ebensoviel halten als  $\frac{2}{3}$ . Gleichergestalt sind auch alle folgenden Brüche  $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$  und so fort einander gleich, und ist ein jeglicher davon so viel als ein halbes.

Es kann also eben derselbige Bruch auf unendlich vielerlei Arten vorgestellet werden, indem, wenn sowohl der Zähler als Nenner durch eine jegliche Zahl multiplicirt wird, ein Bruch herauskommt, der dem vorigen gleich ist. Auf diese Weise aber, nämlich durch das multipliciren, erhält man allzeit Brüche, welche aus grösseren Zahlen bestehen als der vorgelegte. Es ist aber klar, dass man hinwiederum aus diesen aus grossen Zahlen bestehenden Brüchen diejenigen müsse finden können, welche aus kleineren Zahlen bestehen, und aus welchen jene durch die Multiplication entstanden sind. Dieses geschieht nun durch die Division, da beides, der Nenner und Zähler, durch eine beliebige Zahl dividirt wird, wann nämlich die Division angeht. Dann gleich wie aus diesem Bruch  $\frac{3}{5}$  wenn oben und unten durch 7 multiplicirt wird, dieser  $\frac{21}{35}$  entspringt, so erhält man hinwiederum aus diesem Bruche den vorigen wann man beides, den Nenner und Zähler, durch 7 dividirt. Aus diesen zweierlei Arten, einen Bruch in andere Formen zu verwandeln, sieht man nun, dass man Brüche angeben könne, welche sowohl aus grösseren als kleineren Zahlen, als ein vorgegebener Bruch ist, bestehen, und demselben dennoch dem Werth nach gleich sind; deren jenes vermittelst der Multiplication, dieses aber durch die Division geschieht. Hiebei aber ist zum voraus zu erinnern, dass man diese beiden Operationen der Multiplication und Division nicht mit der eigentlichen Multiplication und Division der Brüche confundire; dann auf die jetzt beschriebene Art wird ein Bruch nur in eine andere Gestalt gebracht, ohne seinen Werth zu verändern. Wann aber ein Bruch entweder multiplicirt oder dividirt werden soll, so suchet man einen Bruch, welcher entweder grösser oder kleiner sein soll als der vorgelegte; sodass diese Operationen, welche zu den Speciebus der Brüche gehören, von der hier beschriebenen Verwandlung gänzlich unterschieden sind. Um nun auf den Grund dieser Verwandlung, da ein Bruch in eine andere Form, ohne seinen Werth zu verändern, gebracht wird, zu kommen, so muss derselbe aus der Natur der Brüche selbst hergeleitet werden; wobei dann vor allen Dingen zu merken ist, dass ein Bruch nichts anders ist als der wahre Quotus, welcher herauskommt, wann man den Zähler durch den Nenner dividirt. Ein jeglicher Bruch zeigt demnach an, wieviel mal der Nenner im Zähler enthalten sei. Es ist aber klar, dass, so viel mal bei einem Bruche der Nenner im Zähler enthalten ist, eben so viel mal der doppelte Nenner im doppelten Zähler enthalten sei, und folglich auch eben so viel mal der halbe Nenner im halben Zähler; woraus dann erhellet, dass, wann man beides, den Nenner und Zähler eines Bruchs, durch 2 entweder multiplicirt oder dividirt, der hieraus entstehende Bruch oben so viel betrage als der vorgegebene. Gleich wie man nun leicht sieht, dass, was hier von der Zahl 2 gesagt worden, seine Richtigkeit hat; so lässt sich eben dasselbe von der Zahl 3, 4, und sogar von einer jeglichen Zahl begreifen. Hieraus folget nun der vorgebrachte Satz, dass ein Bruch an seinem Werth nichts verliere, wann gleich beides, der Zähler und Nenner, durch eine jegliche beliebige Zahl entweder multiplicirt oder dividirt werden. Zu fernerer Erläuterung dieser Operation durch die Multiplication können

folgende Exempel dienen:

$$\frac{4}{7} \text{ ist so viel als } \frac{8}{14} \text{ oder } \frac{12}{21} \text{ oder } \frac{16}{28}.$$

Imgleichen  $2\frac{1}{3}$  ist so viel als  $2\frac{2}{6}$  oder  $2\frac{3}{9}$ , weilen  $\frac{2}{6}$  und  $\frac{3}{9}$  so viel sind als  $\frac{1}{3}$  und die ganze Zahl 2 bei allen einerlei ist. Gleichergestalt ist 3 so viel als  $\frac{6}{2}$ , item als  $\frac{9}{3}$ , item als  $\frac{12}{4}$ , und so fort; dann 3 ist so viel als  $\frac{3}{1}$ , wann man nun oben und unten durch 2 oder 3 oder 4 multiplicirt, so kommen  $\frac{6}{2}$ ,  $\frac{9}{3}$  und  $\frac{12}{4}$  heraus, welche Brüche folglich so viel sind als 3. Hieraus sieht man nun, dass man eine jegliche ganze Zahl in eine Bruchsform verwandeln kann von einem beliebigen Nenner; als wann man einen Bruch verlangte, der so viel ist als 5 und dessen Nenner 6 sein soll, so hat man  $\frac{30}{6}$ .

Um Exempel von dieser Operation durch die Division anzuführen, so muss man solche Brüche nehmen, deren Nenner und Zähler sich durch eine Zahl theilen lassen, welches nicht bei allen angeht. Dahero, obgleich die Multiplication bei allen Brüchen stattfindet, so kann doch die Division nur bei solchen angebracht werden, in welchen der Zähler und Nenner sich durch eine gemeine Zahl theilen lassen. Wann also ein Bruch nicht so beschaffen ist, so kann derselbe durch die Division in keine andere Form gebracht und folglich nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden. Ein solcher Bruch ist  $\frac{8}{15}$  da keine Zahl zugleich 8 und 15 theilet, weswegen der Inhalt dieses Bruchs durch kleinere Zahlen nicht ausgedrückt werden kann. Dann obgleich 1 oder die Unität sowohl 8 als 15 theilet, so wird durch diese Division die Form des Bruchs nicht verändert. Wann aber dieser Bruch  $\frac{36}{60}$  vorkommen sollte, so sieht man, dass beides, der Zähler und Nenner, sich durch 2 dividiren lasse, dadurch wird aber dieser Bruch in diesen  $\frac{18}{30}$  verwandelt. In diesem Bruche aber lassen sich wiederum beide Zahlen durch 2 theilen, wodurch man diesen Bruch  $\frac{9}{15}$  bekommt. Ferner lassen sich auch hier beide Zahlen wiederum durch 3 theilen, da dann  $\frac{3}{5}$  herauskommt welcher Bruch folglich so viel ist als  $\frac{36}{60}$ , und aus diesem auf einmal hatte können herausgebracht werden, wann man gesehen hätte, dass sich beide Zahlen 36 und 60 durch 12 theilen lassen. Dann wann [man] den Zähler und Nenner dieses Bruchs durch 12 dividirt, so kommen  $\frac{3}{5}$  heraus. Weilen nun bei dieser Operation, welche durch die Division geschieht, und dadurch ein Bruch in kleinere Zahlen gebracht wird, vor allen Dingen zu wissen nöthig ist, ob sich beide Zahlen eines Bruchs durch eine gemeine Zahl theilen lassen, und ferner, was dieser Theiler für eine Zahl ist, so wollen wir in folgenden Sätzen dazu Anleitung geben.

9. *Um einigermassen zu sehen, ob eine vorgegebene Zahl durch andere getheilet werden könne, hat man nachfolgende Regeln, welche bei der Verkleinerung der Brücke wohl in acht genommen zu werden verdienen.*

1. *Durch 2 lassen sich alle diejenigen Zahlen theilen, deren letzte Figur nach der rechten Hand sich durch 2 theilen lässt.*
2. *Durch 4 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die zwei letzten Zahlen gegen der Rechten durch 4 theilen lassen.*



3. *Durch 8 lässt sich eine Zahl theilen, wann die drei letzten Zahlen gegen. der Rechten durch 8 getheilet werden können.*
4. *Durch 5 lässt sich eine Zahl theilen, wann die letzte Figur nach der Rechten entweder 5 ist oder 0.*
5. *Durch 10 lassen sich keine anderen Zahlen theilen, als deren letzte Figur nach der Rechten 0 ist.*
6. *Durch 3 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die Summe von allen Figuren, aus welchen die Zahl bestehet, durch 3 theilen lässt.*
7. *Durch 9 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich gleichfalls die Summe aller Figuren durch 9 theilen lässt.*
8. *Durch 6 lassen sich alle diejenigen Zahlen (heilen, welche zugleich durch 2 und durch 3 getheilet werden können.*  
*Ob sich aber eine Zahl durch 7 theilen lasse oder nicht, kann nicht wohl eine kürzere und bequemere Regel gegeben werden, als dass man die Sache durch die wirkliche Division versuche.*

Der Grund dieser Regeln beruhet auf der angenommenen Art, alle Zahlen durch Unitäten, Decaden, Centenarios, Millenarios und so fort auszudrücken; weswegen zu mehrerer Erläuterung nicht undienlich sein wird, die Gewissheit derselben mit mehrerem auszuführen; insonderheit, da dieselben gemeiniglich ohne allen Beweisthum vorgetragen zu werden pflegen. Wir betrachten also eine jegliche Zahl aus so viel Theilen zusammengesetzt, als viel Figuren dieselbe besteht, so dass ein Theil die Unitäten, der zweite die Decades, der dritte die Centenarios und so fort enthält. Was nun die erste Regel betrifft, so ist zu betrachten, dass sich die Decades, Centenarii, Millenarii und so weiter alle durch 2 theilen lassen. Wann sich demnach auch die Unitäten durch 2 theilen lassen, so lässt sich auch die ganze Zahl durch 2 theilen; dieses aber geschieht, wann sich die letzte Figur nach der rechten Hand durch 2 theilen lässt, oder wann dieselbe ist entweder 0 oder 2, 4, 6, 8. Hierauf beruhen auch die 4 te und 5 te Regel; dann die Decades, Centenarii, Millenarii und folgende lassen sich für sich durch 5 und durch 10 theilen. Derowegen, wann auch die Unitäten durch 5 oder 10 getheilet werden können, so lässt sich auch die ganze Zahl dadurch theilen. Nun aber enthält die letzte Figur von der Rechten die Unitäten; und folglich lässt sich eine Zahl durch 5 oder 10 theilen, wann sich die letzte Figur dadurch theilen lässt, das ist für den ersteren Fall, nämlich 5, wann die letzte Figur entweder 0 oder 5 ist, im anderen Fall für 10 aber, wann die letzte Figur 0 ist. Die zweite Regel zu beweisen, so ist zu merken, dass sich alle Centenarii, Millenarii und so fort durch 4 theilen lassen; wann sich demnach die Decades zusammt den Unitäten auch durch 4 theilen lassen, so wird die ganze Zahl durch 4 können getheilet werden. Die zwei letzteren Figuren aber nach der rechten Hand enthalten die Decades und Unitates, und folglich kommt die ganze Sache darauf an, ob sich diese zwei Zahlen, oder vielmehr die Zahl, welche dadurch angedeutet wird, durch 4

theilen lässt; also lässt sich 1736 durch 4 theilen, weil 36 dadurch getheilet werden kann. Eine gleiche Bewändnüs hat es auch mit der dritten Regel, dann weil sich 1000 durch 8 theilen lässt, so lassen sich auch alle Millenarii und folgende höhere Sorten durch 8 theilen. Derowegen, wann sich in einer Zahl die Centenarii, Decades und Unitäten insgesamt durch 8 theilen lassen, so wird auch die völlige Zahl durch 8 getheilet werden können; dieses aber geschieht, wann sich die Zahl, welche durch die drei letzten Figuren nach der Rechten angedeutet wird, durch 8 theilen lässt. Also lässt sich diese Zahl 13896 durch 8 theilen, weilen 896dadurch getheilet werden kann. Der Beweis der 6 ten und 7 ten Regel hat mehr Schwierigkeit, dennoch aber kann derselbe auf folgende Art vorgebracht werden. Wann eine Anzahl Decaden oder Centenarii oder Millenarii oder höhere Sorten durch 3 oder 9 getheilet werden, so bleibt eben so viel über, als wann eine gleiche Anzahl Unitäten durch 3 oder 9 wäre getheilet worden; als wann 700 durch 3 oder 9 getheilet wird, so bleibt eben so viel über, als wann 7 allein dadurch getheilet würde. Wann also eine Zahl, so aus viel Figuren besteht, durch 3 oder 9 getheilet wird, so bleibt eben so viel über, als wann alle Figuren nur Unitäten bedeuteten, und alle zusammen genommen durch 3 oder 9 dividirt würden. Weilen sich nun eine Zahl durch eine andere theilen lässt, wann nichts überbleibt, so wird sich eine jegliche Zahl durch 3 oder 9 theilen lassen, wann sich die Summe aller Figuren dadurch theilen lässt. Also lässt sich 1737 durch 3 und 9 theilen, dann die Summe der Figuren macht 18, welche Zahl durch 3 und 9 getheilet werden kann. Bei grossen Zahlen, wann die Summe der Figuren selbst wieder gross wird, und aus etlichen Figuren besteht, so kann dieser Vortheil wieder angebracht, und die Summe dieser Figuren selbst untersucht werden. Als wann gefragt würde, ob sich diese Zahl

5 987 625 798 634

durch 3 oder 9 theilen lasse, so addire man alle Figuren zusammen, da dann 79 herauskommt; dieser Zahl Figuren zusammen machen nun ferner 16, und weil diese Zahl noch aus zwei Figuren besteht, so addire man dieselben nochmals zusammen, da dann 7 herauskommt. Woraus erhellet, dass, wann die vorgegebene Zahl durch 3 oder 9 dividirt werden sollte, eben so viel überbleiben würde, als wann 7 dadurch getheilet würde, nämlich im erstern Fall 1, im letzten 7. Die 8 te Regel folget aus der ersten und sechsten; dann wann sich eine Zahl in zwei und zugleich auch in drei gleiche Theile zertheilen lässt, so lässt sich dieselbe auch in 6 gleiche Theile theilen. Endlich ist zu merken, dass man durch alle diese Regeln nicht nur erkennt, ob sich eine Zahl durch eine solche vorgeschriebene theilen lasse oder nicht, sondern auch, wieviel im letzteren Fall übrig bleibe, wie aus dem letztangebrachten Exempel von 3 und 9 zu ersehen, obgleich dieses zu unserem jetzigen Vorhaben nicht dienet, in anderen Fällen aber dennoch von grossem Vortheil sein kann. Wann man nun diese Regeln wohl im Kopfe hat, so kann man öfters bei einem vorgegebenen Bruche gleich sehen, ob sich beides, der Zähler und Nenner, durch eine gemeine Zahl theilen lassen, und ob folglich der Bruch in einen anderen gleiches Werths, der aber aus kleineren Zahlen besteht, verwandelt werden könne. Dann zu Erkennung der Brüche tragt sehr viel bei, wann die Zahlen, daraus derselbe besteht, so klein sind als möglich; und ist also die Verkleinerung der Brüche zu deutlicherem Begriff derselben höchst nützlich. Derowegen

wird nicht undienlich sein, einige Exempel vorzubringen, in welchen Brüche vermittelt der gegebenen Regeln in leichtere verwandelt werden.

**I.** Es sei uns dieser Bruch  $\frac{122}{356}$  vorgelegt, in welchem wir nach der ersten Regelsehen, dass sich beide Zahlen durch 2 theilen lassen, weilen die letzten Figuren derselben 2 und 6 dadurch getheilet werden können; wann wir derohalben den Zähler und Nenner durch 2 dividiren, so kommt dieser Bruch heraus  $\frac{61}{178}$ , welcher dem vorgelegten gleich ist.

**II.** Wenn dieser Bruch  $\frac{368}{1032}$  vorkäme, so sähe man nach der zweiten Regel gleich, dass beide Zahlen sich durch 4 theilen lassen, weilen die zwei letzteren Figuren davon, nämlich 68 und 32, dadurch theilbar sind. Ja man kann hier sogar die dritte Regel anbringen und sehen, dass sich beide Zahlen durch 8 theilen lassen, weilen die drei letzten Figuren, nämlich 368 und 032, das ist 32, durch 8 theilbar sind. Wann man demnach durch 8 dividirt, so wird der vorgelegte Bruch in diesen  $\frac{46}{129}$  verwandelt. Hiebei aber ist zu erinnern, dass man nicht nöthig habe, sich viel Mühe für die 2te und 3te Regel zu geben, indem der Gebrauch der ersten beide in sich begreift; als im vorgegebenen Bruche  $\frac{368}{1032}$  kann genug sein, wann man sieht, dass sich beide Zahlen durch 2 theilen lassen, wodurch also dieser Bruch  $\frac{184}{516}$  herauskommt; bei welchem man sieht, dass beide Zahlen sich nochmals durch 2 theilen lassen, da man dann  $\frac{92}{258}$  bekommt. Hier sieht man nun wiederum leicht, dass beide Zahlen noch durch 2 theilbar sind, durch welche Division der oben gefundene Bruch  $\frac{46}{129}$  herauskommt.

**III.** Wann dieser Bruch vorkäme  $\frac{7350}{8900}$ , so sähe man nach der fünften Regel gleich, dass beide Zahlen durch 10 theilbar sind, weswegen nach verrichteter Division durch 10 dieser Bruch  $\frac{735}{890}$  herauskommt. Bei diesem Bruche kann ferner die vierte Regel stattfinden, weilen die obere Zahl sich mit 5, die untere aber mit 0 endigt; daher beide durch 5 theilbar sind. Wann man nun beide Zahlen durch 5 dividirt, so bekommt man diesen Bruch  $\frac{147}{178}$ , welcher eben so viel hält als der vorgelegte  $\frac{7350}{8900}$ . Hiebei ist nun zu merken, dass diejenigen Brüche, deren Nenner und Zähler sich durch 10 theilen lassen und folglich mit einer oder mehr Nullen sich endigen, am leichtesten zu kleineren Zahlen können gebracht werden, indem man nur nöthig hat, oben und unten eine oder zwei oder mehr Nullen abzuschneiden. Also ist  $\frac{30}{50}$  so viel als  $\frac{3}{5}$  und  $\frac{120}{700}$  so viel als  $\frac{12}{70}$  und  $\frac{29000}{50000}$  so viel als  $\frac{29}{50}$ .

**IV.** Es sei uns dieser Bruch  $\frac{4623}{10548}$  vorgegeben, durch kleinere Zahlen auszudrücken; weilen nun beide Zahlen zugleich weder durch 2 noch 5 noch 10 getheilet werden können, so wollen wir sehen, ob nicht beide durch 3 oder 9 theilbar sind, welches nach der sechsten und siebenten Regel geschieht, wann man die Figuren sowohl des Zählers als Nenners zusammen addirt. Des Zählers Figuren aber zusammen machen 15 und des Nenners 18, woraus erhellet, dass sich beide Zahlen durch 3 theilen lassen, daher dieser Bruch  $\frac{1541}{3516}$  herauskommt.

Ob aber diese Regeln gleich einen grossen Vorthail in Verkleinerung der Brüche haben, so kann man dennoch vermittelt derselben nur sehen, ob beide Zahlen durch 2, 3, 5 oder 10 theilbar sind, und folglich dadurch dergleichen Brüche nicht in kleinere Zahlen bringen, bei welchen diese Regeln nicht stattfinden. Derowegen ist nöthig, eine andere allgemeine Regel an die Hand zu geben, durch deren Mittel man allzeit diejenige Zahl finden kann, durch

welche beide Zahlen, nämlich der Zähler und Nenner, getheilt werden können.

10. *Ein gemeiner Theiler von zweien Zahlen ist eine solche Zahl, dadurch sich beide Zahlen theilen lassen; und der grösste gemeine Theiler ist die grösste Zahl, durch welche sich beide Zahlen zugleich theilen lassen. Um aber von zweien gegebenen Zahlen den grössten gemeinen Theiler zu finden, hat man diese Regel: Man dividirt die grössere Zahl durch die kleinere, oder setzt die kleinere zum Divisore, die grössere aber zum Dividendo; hierauf dividirt man den Divisorem durch den übergebliebenen Rest, das ist, man macht nach der ersten Division die zweite, in welcher der gefundene Best zum Divisor, der vorige Divisor aber zum Dividendo gesetzt wird; und also fahret man mit solchen Divisionen fort, indem man immer den Best der vorigen Division zum Divisor der folgenden, und den Divisor der vorigen zum Dividendo der folgenden setzt, bis man zu einer Division kommt, welche ohne Best absolvirt wird. Und da ist der Divisor dieser letzten Division der grösste gemeine Theiler der zwei vorgegebenen Zahlen.*

Wann hier und in vorigen Sätzen von Zahlen die Rede ist, so ists allzeit von ganzen Zahlen zu verstehen, obgleich die Brüche auch freilich mit unter die Zahlen gehören. Alle Zahlen sind nun theilbar durch 1, weilen alle durch 1 ohne Rest getheilt werden können; ferner ist auch eine jegliche Zahl durch sich selbst theilbar, und deswegen hat eine jegliche Zahl zum wenigsten zwei Theiler, nämlich die Unität und sich selbst. Ein Theiler aber einer Zahl ist eine solche Zahl, dadurch sich dieselbe Zahl ohne Rest theilen lässt, als 3 ist ein Theiler von 12, und 5 ein Tbeiler von 15. Hier kommt nun ein Haupt- unterschied in den Zahlen zu merken vor, dann einige Zahlen sind so beschaffen, dass sie sich durch keine andere Zahlen ausser der Unität und sich selbst theilen lassen, welche also füglich untheilbare Zahlen genennet werden können; solche Zahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und so weiter, als welche keine andere Theiler haben als die Unität und sich selbst.

Die übrigen Zahlen aber, welche sich ausser der Unität und sich selbst noch durch andere Zahlen theilen lassen, werden theilbare Zahlen genennt, dergleichen sind 4, 6, 8, 9, 10, 12 und so fort. Von solchen Zahlen sind insonderheit diejenigen zu merken, welche sich durch 2 theilen lassen und grade Zahlen genennt zu werden pflegen, als da sind 2, 4, 6, 8, 10, 12 und so fort, welche aus der ersten Regel des vorigen Satzes gleich erkannt werden. Da im Gegentheil diejenigen Zahlen, welche sich nicht durch 2 theilen lassen, ungrade Zahlen genennt werden, als da sind 3, 5, 7, 9, 11, 13 und dergleichen, zu welchen auch die Unität selbst mit gehöret. Da wir nun erklärt, was man durch einen Theiler einer Zahl versteht, so ist auch leicht zu begreifen, was ein gemeiner Theiler von zweien oder mehr Zahlen ist, nämlich eine solche Zahl, dadurch sich eine jede derselben Zahlen theilen lässt; also ist die Unität ein gemeiner Theiler aller Zahlen, aber eben deswegen von keinem Nutzen bei unserem Vorhaben, die Brüche in kleinere Zahlen zu bringen, weilen durch die Division mit der Unität die Zahlen unverändert bleiben. Zwei solche Zahlen nun, welche ausser der Unität noch einen oder mehr gemeine Theiler haben, werden unter sich theilbare Zahlen genennt, dergleichen sind 12 und 15, als welche beide sich durch 3 theilen lassen; ingleichem 7 und 21, dann beide sind durch 7 theilbar. Solche Zahlen aber, welche ausser der Unität keinen gemeinen Theiler haben, werden unter sich untheilbare Zahlen genennt, solche sind 7 und 9; item 15 und 28. Wann derohalben ein Bruch so beschaffen ist, dass der

Zähler und Nenner unter sich untheilbare Zahlen sind, so kann derselbe nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden; dergleichen Brüche pflegen unaufhebliche Brüche genennt zu werden, weil sie sich durch die Division nicht in kleinere Zahlen bringen lassen, welche Operation das Aufheben der Brüche genennt zu werden pflegt. Wann aber der Zähler und Nenner eines Bruchs unter sich theilbare Zahlen sind, so kann der Bruch durch den gemeinen Theiler aufgehoben, das ist durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden, weswegen auch solche Brüche aufhebliche Brüche genennt werden. Um nun die aufheblichen Brüche zu erkennen, und dieselben in kleinere Zahlen zu bringen, so haben wir die beschriebene Regel vorgebracht, vermittelst welcher man nicht nur von zweien gegebenen Zahlen einen gemeinen Theiler, wann sie nämlich unter sich theilbar sind, sondern sogar den grössten gemeinen Theiler finden kann. Dadurch erhält man aber diesen Vortheil, dass man sogleich alle aufheblichen Brüche durch den grössten gemeinen Theiler in die kleinsten möglichen Zahlen bringet und in unaufhebliche verwandelt, von welchen man versichert sein kann, dass sie alsdann durch keine kleinere Zahlen weiter ausgedrückt werden können. Die gegebene Regel nun, um den grössten gemeinen Theiler von zweien Zahlen zu finden, ist kurz und leicht bei allen Fällen anzuwenden; jedennoch aber wird nicht undienlich sein, ehe wir den Grund davon anzeigen, dieselbe durch etliche Exempel zu erläutern. Es seien uns derothalben diese zwei Zahlen 1578 und 2904 vorgegeben, deren grössten gemeinen Theiler man zu wissen verlanget; man theile also 2904 durch 1578 wie folget:

$$\begin{array}{r} 1578) 2904 \quad (1 \\ \underline{1578} \\ 1326 \end{array}$$

so findet man 1326 für den Rest; durch solchen dividirt man nach der Regel den vorigen Divisorem 1578, nämlich:

$$\begin{array}{r} 1326) 1578 \quad (1 \\ \underline{1326} \\ 252 \end{array}$$

Ferner muss 1326 durch 252 dividirt werden:

$$\begin{array}{r} 252) 1326 \quad (5 \\ \underline{1260} \\ 66 \end{array}$$

Weiter durch 66 dividire man 252:

$$\begin{array}{r} 66) 252 \quad (3 \\ \underline{198} \\ 54 \end{array}$$

Nun ist 66 durch 54 zu dividiren:

$$54) 66 \quad (1$$

$$\underline{54}$$

$$12$$

Jetzt muss 54 durch 12 dividirt werden:

$$12) 54 \quad (4$$

$$\underline{48}$$

$$6$$

Endlich hat man 12 durch 6 zu theilen, welche Division, weilen sie ohne Rest aufgeht, anzeigt, dass 6 der grösste gemeine Theiler von den zwei vorgegebenen Zahlen ist. Wann also dieser Bruch  $\frac{1578}{2904}$  wäre vorgelegt worden, so könnte man denselben durch 6 aufheben und in diesen Bruch  $\frac{263}{484}$  verwandeln, welcher unaufheblich und nicht mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kann. Wann diese Zahlen 3735 und 4815 sollten sein vorgegeben worden, so würde die ganze Operation nach der gegebenen Regel folgendergestalt zu stehen kommen:

$$3735) 4815 \quad (1$$

$$\underline{3735}$$

$$1080) 3735 \quad (3$$

$$\underline{3240}$$

$$495) 1080 \quad (2$$

$$\underline{990}$$

$$90) 495 \quad (5$$

$$\underline{450}$$

$$45) 90 \quad (2$$

$$\underline{90}$$

Aus welcher Operation man sieht, dass 45 der grösste gemeine Theiler der vorgegebenen Zahlen ist. Wären aber die Zahlen unter sich untheilbar, so weiset auch dasselbe diese Operation, dadurch die Unität als der grösste gemeine Theiler gefunden wird, wie aus folgendem Exempel, da diese Zahlen 36 und 151 gegeben sind, zu ersehen:

$$36) 151 \quad (4$$

$$\underline{144}$$

$$7) 36 \quad (5$$

$$\underline{35}$$

$$1) 7 \quad (7$$

$$\underline{7}$$

Damit wir aber endlich auf den Grund dieser Operation kommen, so ist vor allen Dingen zu merken, dass, wann zwei Zahlen einen gemeinen Theiler haben, alsdenn auch die Differenz

derselben Zahlen durch eben denselben Theiler getheilet werden könne; ingleichem auch die Differenz zwischen der einen und dem doppelten oder dreifachen oder einem anderen vielfachen der anderen Zahl. Nun aber, wann die grössere Zahl durch die kleinere dividirt wird, so ist der Rest nichts anders als die Differenz zwischen der grösseren Zahl und einem multiplo der kleineren. Derohalben muss ein gemeiner Theiler zweier Zahlen auch den Rest theilen, welcher in der Division der grösseren Zahl durch die kleinere zurückbleibt. Solchergestalt wird ein jeder gemeiner Theiler der zwei gegebenen Zahlen zugleich ein gemeiner Theiler sein des Divisoris und des Rests. Auf gleiche Weise, wann der vorige Divisor durch den Rest getheilet wird, so wird wiederum ein jeder gemeiner Theiler der zwei Anfangs vorgegebenen Zahlen den Divisor und Rest dieser letzten Division theilen, und so weiter fort bei allen folgenden Divisionen. Wann man endlich also zu einer Division kommt, welche ohne Rest aufgeht, so haben auch der Dividendus und Divisor dieser letzten Division eben die gemeinen Theiler, welche die beiden Anfangs gegebenen Zahlen unter sich haben. Weilen aber diese letzte Division ohne Rest aufgeht, so ist der Divisor nicht nur ein gemeiner Theiler des Divisoris selbst und des Dividendi, sondern auch der grösste gemeine Theiler; woraus dann folgt, dass dieser letzte Divisor auch der grösste gemeine Theiler beider vorgegebenen Zahlen sein müsse. Dieses ist also der Grund der erklärten Regel, durch welche der grösste gemeine Theiler zweier Zahlen gefunden werden kann, davon der Nutzen in Verkleinerung oder Aufhebung der Brüche zwar schon einigermassen angeführt worden ist, dennoch aber zu grösserem Gebrauch im folgenden Satz ausgeführt werden soll.

11. *Um von einem vorgegebenen Bruche zu urtheilen, ob derselbe durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könne oder nicht, so muss man von dem Zähler und Nenner desselben den grössten gemeinen Theiler suchen. Findet man nun 1 für den grössten gemeinen Theiler, so ist dasselbe ein Anzeigen, dass der Bruch durch kleinere Zahlen nicht ausgedrückt werden könne. Kommt aber ein anderer grösserer gemeiner Theiler heraus, so kann der vorgegebene Bruch in kleinere Zahlen gebracht werden, wann man nämlich den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch den gefundenen grössten gemeinen Theiler dividirt, wobei noch dieses zu merken ist, dass der Bruch, welchen man auf diese Weise erhält, nicht weiter verkleinert oder aufgehoben werden könne, und dadurch folglich der vorgelegte Bruch in den kleinsten Zahlen ausgedrückt werde.*

Wir haben schon gesehen, dass ein jeglicher Bruch auf unendlich vielerlei Arten ausgedrückt werden könne, ohne den Inhalt davon zu ändern, welche Verwandlung der Brüche ihren unentbehrlichen Nutzen im folgenden Capitel haben wird. Allhier aber, da wir nur von der Natur der Brüche handeln, so ist ausser allem Zweifel, dass, je kleiner die Zahlen sind, dadurch ein Bruch vorgestellet wird, je deutlicher und leichter man sich von dem Werthe des Bruchs einen Begriff formiren könne. Derowegen ist die hier gegebene Regel, durch welche man lernet, einen Bruch in den kleinsten möglichen Zahlen vorzustellen, von sehr grossem Nutzen; indem man durch Hilfe derselben einen Bruch entweder sicher in die kleinsten Zahlen bringen, oder wo eine solche Aufhebung nicht stattfindet, versichert sein kann, dass der vorgelegte Bruch unaufheblich sei, und durch kleinere Zahlen unmöglich vorgestellet werden könne. Diese Verwandlung in die leichteste Form geschieht nun durch die Ausfindung des grössten gemeinen Theilers der beiden Zahlen des Bruchs, nämlich des

Zählers und Nenners, wozu im vorigen Satze genugsame Anleitung gegeben worden ist. Deswegen, wann man den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners gefunden, so wird dadurch der vorgegebene Bruch leicht in die kleinsten Zahlen gebracht, wann man nämlich nach dem achten Satze sowohl den Zähler als den Nenner durch diesen grössten gemeinen Theiler dividirt, da dann der herausgebrachte Bruch dem vorigen dem Werthe nach gleich sein, dabei aber aus den kleinsten möglichen Zahlen bestehen, und folglich keine weitere Aufhebung leiden wird. Da nun diese Operationen schon zur Genüge ausgeführt worden sind, so ist nur noch übrig, zum Beschluss dieses Capitels einige Exempel beizufügen.

I. Es sei uns dieser Bruch  $\frac{3080}{8547}$  vorgegeben, welcher wo möglich durch kleinere und das durch die allerkleinsten Zahlen ausgedrückt werden soll. Man suche also vor allen Dingen den grössten gemeinen Theiler dieser beiden Zahlen 3080 und 8547, wie folget:

$$\begin{array}{r}
 3080) 8547 \quad (2 \\
 \underline{6160} \\
 2387) 3080 \quad (1 \\
 \underline{2387} \\
 693) 2387 \quad (3 \\
 \underline{2079} \\
 308) 693 \quad (2 \\
 \underline{616} \\
 77) 308 \quad (4 \\
 \underline{308} \\
 0
 \end{array}$$

Woraus erhellet, dass 77 der grösste gemeine Theiler ist der beiden Zahlen, daraus der Bruch besteht. Derowegen, dividirt man beides, den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs, so wird dieser Bruch herauskommen  $\frac{40}{111}$ , welcher nicht weiter aufgehoben werden kann.

II. Einer hat 24 Solotnick Silber und möchte gerne wissen, den wievielten Theil er von einem Pfund habe.

Weilen ein Pfund 96 Solotnick hält, so hat diese Person  $\frac{24}{96}$ , das ist vierundzwanzigste Theil eines Pfunds; derowegen läuft die Frage dahin aus, dass man wo möglich diesen Bruch durch kleinere und das [durch] die aller kleinsten Zahlen ausdrücke. Man suche also den grössten gemeinen Theiler von 24 und 96, also

$$\begin{array}{r}
 24) 96 \quad (4 \\
 \underline{96} \\
 0
 \end{array}$$

weswegen sich beide Zahlen durch 24 theilen lassen. Wann man nun den Bruch durch 24 aufhebt, so kommt dieser Bruch  $\frac{1}{4}$  heraus, woraus man sieht, dass das vorgegebene Gewicht just ein viertel Pfund sei.



III. Wann man diesen Bruch  $\frac{9222}{1740}$  gefunden hätte, und man wollte wissen, ob der Inhalt desselben nicht könnte auf eine kürzere Art ausgedrückt werden, so würde man also verfahren:

Erstlich sieht man, weil der Zähler grösser ist als der Nenner, dass in diesem Bruche ein oder etliche ganze enthalten sind, weswegen vor allen Dingen dienlich sein wird zu suchen, wieviel ganze vorhanden sind, weilen man alsdann schon einen deutlicheren Begriff von dem Werthe desselben erhält, als wann die ganzen mit im Bruche eingewickelt sind. Um nun dieses zu finden, so hat man nach dem sechsten Satz den Zähler durch den Nenner zu dividiren wie folgt:

$$\begin{array}{r} 1740) 9222 \quad (5 \\ \underline{8700} \\ 522 \end{array}$$

Also sieht man schon, dass der vorgegebene Bruch in diese Form  $5\frac{522}{1740}$  gebracht werde, welche schon leichter zu begreifen ist als die vorgelegte.

Ferner hat man zu sehen, ob der Bruch  $\frac{522}{1740}$  nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könne, welches geschieht, wann man den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners sucht, solchergestalt:

$$\begin{array}{r} 522) 1740 \quad (3 \\ \underline{1566} \\ 174) 522 \quad (3 \\ \underline{522} \\ 0 \end{array}$$

Demnach ist 174 der grösste gemeine Theiler; wann man nun den gefundenen Bruch  $\frac{522}{1740}$  dadurch aufhebt, so bekommt man diesen  $\frac{3}{10}$ . Derowegen ist der im Anfang gegebene Bruch  $5\frac{522}{1740}$  so viel als  $5\frac{3}{10}$ , das ist so viel als fünf ganze und drei Zehntel eines ganzen. Man kann aber auch gleich den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners des gegebenen Bruchs suchen, also:

$$\begin{array}{r} 1740) 9222 \quad (5 \\ \underline{8700} \\ 522) 1740 \quad (3 \\ \underline{1566} \\ 174) 522 \quad (3 \\ \underline{522} \\ 0 \end{array}$$

Weilen nun 174 der grösste gemeine Theiler ist, so wird durch die Division der gegebene Bruch in diese Form  $\frac{53}{10}$  gebracht, so dass eben so viel ist als  $\frac{9222}{1740}$ . Da aber der Bruch  $\frac{53}{10}$

mehr ist als 1, so wird derselbe, wann man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirt, in diese Form  $5\frac{3}{10}$  verwandelt wie vorher.

IV. Sei uns dieser Bruch  $\frac{1640}{1776}$  gegeben, um in die kleinste mögliche Form zu bringen. Deswegen suche man den grössten gemeinen Theiler beider Zahlen 1640 und 1776.

$$\begin{array}{r}
 1640) 1776 \quad (1 \\
 \underline{1640} \\
 136) 1640 \quad (12 \\
 \underline{136} \\
 280 \\
 \underline{272} \\
 8) 136 \quad (17 \\
 \underline{8} \\
 56 \\
 \underline{56} \\
 0
 \end{array}$$

Weilen nun 8 der grösste gemeine Theiler ist, so wird dadurch der vorgegebene Bruch durch folgende kleinere Zahlen ausgedrückt  $\frac{205}{222}$ , welcher Bruch so viel ist als der vorgegebene und zugleich aus den kleinsten möglichen Zahlen besteht.