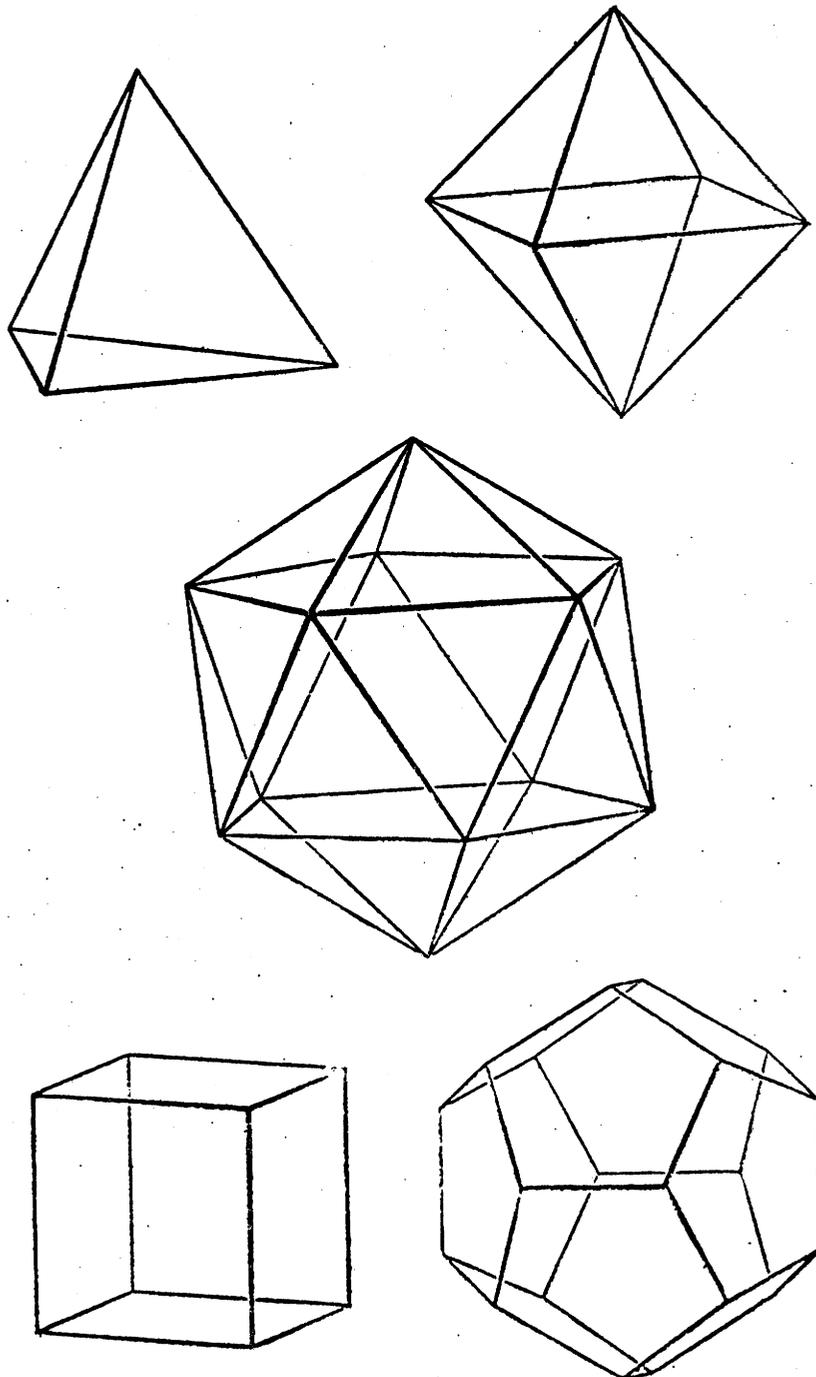


DAS IKOSAEDER

Christian Siebeneicher

(Vortrag im studentischen Colloquium am 23.5.78)

Das Ikosaeder ist einer der fünf platonischen Körper; es ist in der Mitte der folgenden Abbildung dargestellt.



Die platonischen Körper sind reguläre Polyeder, d.h. Polyeder, deren Seiten aus kongruenten regelmäßigen p -Ecken bestehen, von denen jeweils eine feste Anzahl q an einer Ecke des Polyeders zusammenstoßen. Man bezeichnet ein solches Polyeder mit $\{p, q\}$. Das Ikosaeder ist mit dieser Bezeichnung ein $\{3, 5\}$.

Die möglichen $\{p, q\}$'s kann man schnell aufzählen: klebt man nämlich q regelmäßige p -Ecke so zusammen, daß sie alle eine Ecke gemeinsam haben, dann entsteht nur dann keine ebene Figur, wenn $q \cdot (\text{Winkel des regelmäßigen } p\text{-Ecks}) < 2\pi$ ist. Der Winkel zwischen den Kanten eines regelmäßigen p -Ecks ist aber gleich $(1 - \frac{2}{p})\pi$, und man hat also notwendigerweise die Ungleichung $q \cdot (1 - \frac{2}{p})\pi < 2\pi$ oder übersichtlicher:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} .$$

Die einzigen Lösungen für diese Ungleichung sind die folgenden:

$\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$ und $\{5, 3\}$,

und man identifiziert diese leicht mit den platonischen Körpern.

Bei der hier gewählten Bezeichnung der regulären Polyeder fällt auf, daß das Tetraeder als einziges eine symmetrische Bezeichnung trägt, der Würfel und das Oktaeder bzw. das Dodekaeder und das Ikosaeder zueinander reziproke Bezeichnungen tragen. Das spiegelt wider, daß die durch ihre Bezeichnung miteinander verbundenen Polyeder auch in Wirklichkeit etwas miteinander zu tun haben: sie sind zueinander reziprok. Das bedeutet, daß man ausgehend von Polyeder $\{p, q\}$ die Ecken des Polyeders $\{q, p\}$ als Berührungspunkte einer dem Polyeder einbeschriebenen Kugel erhält. (Diese Punkte sind natürlich nichts anderes als die Mittelpunkte der Seiten von $\{p, q\}$).

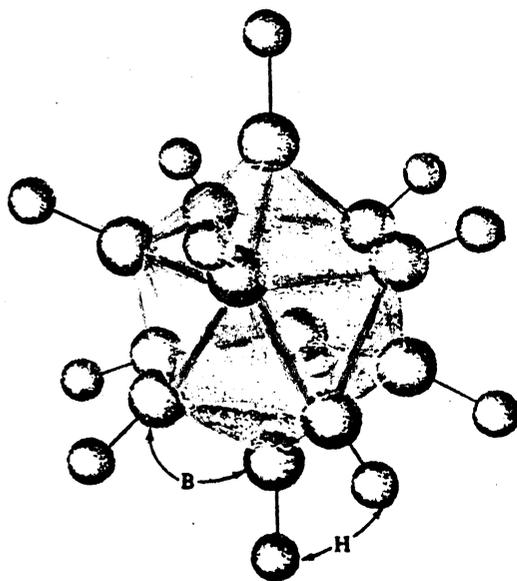


FIGURE 18-5
The structure of the icosahedral dodecaborane ion, $B_{12}H_{12}^{2-}$.

Tetraeder, Würfel und Oktaeder findet man in der Natur als Kristalle. Dodekaeder und Ikosaeder treten nicht in kristalliner Form auf, da beide Körper fünf Symmetrien haben und so etwas bei Kristallen nicht vorkommen kann. Man findet sie aber als Ionen wie das hier abgebildete Borwasserstoffion und auch als Baustein innerhalb der Elementarzelle von Kristallen,

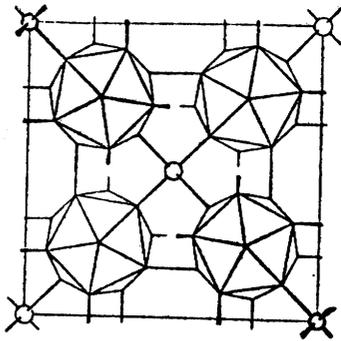


FIGURE 18-6
Structure of tetragonal boron as viewed in the direction of the c axis. One unit cell is shown. Two of the icosahedral B_{12} groups (light lines) are centered at $z = \frac{1}{4}$, and the other two (heavy lines) at $z = \frac{3}{4}$. The interstitial boron atoms, which have ligancy 4 (open circles), are at $(0, 0, 0)$ and $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. All of the extra-icosahedral bonds are shown with the exception of those parallel to the c axis from each icosahedron to the icosahedra in cells directly above and below. (Reprinted from Linus Pauling, *The Nature of the Chemical Bond*. Copyright 1939 and 1940 by Cornell University. Third edition © 1960 by Cornell University. Used by permission of Cornell University Press.)

wie beim Borkristall, wo man in der kubischen Elementarzelle jeweils vier Ikosaeder findet.

Das Dodekaeder findet man bei kristallinen Hydraten, beispielsweise dem Xenonhydrat, wo in dem kubischen Kristallgitter des Xenons Wassermoleküle so eingelagert sind, daß "Höhlen" aus Dodekaedern und Polyedern mit Fünfecken und Sechsecken als Seiten gebildet werden, in denen die Edelgasatome untergebracht sind.

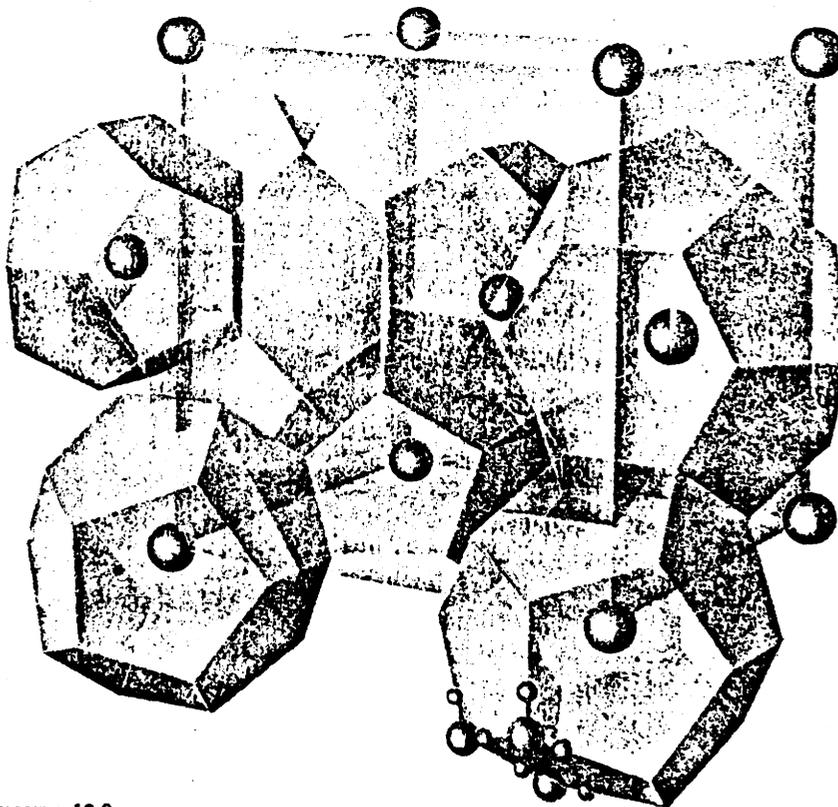
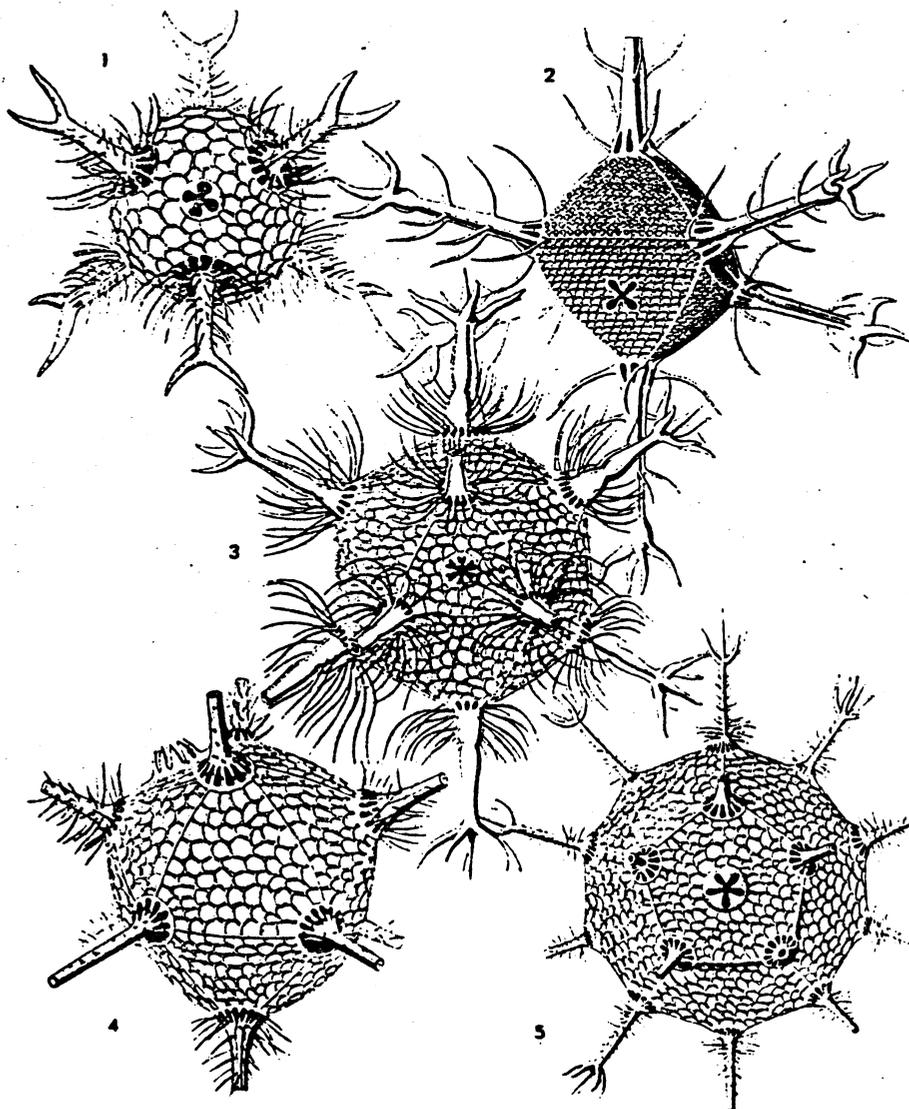
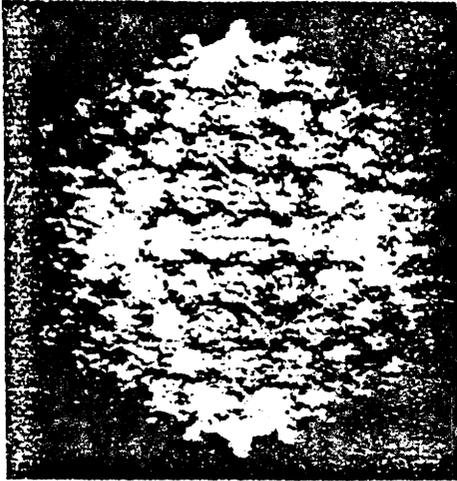


FIGURE 12-9
The structure of a clathrate crystal, xenon hydrate. The xenon atoms occupy cavities (eight per unit cube) in a hydrogen-bonded three-dimensional network formed by the water molecules (46 per unit cube). The $O-H \cdots O$ distance is 2.76 \AA , as in ice. Two xenon atoms, at $0, 0, 0$, and $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, are at the centers of nearly regular pentagonal dodecahedra. The other six, at $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0$; and $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0$, are at the centers of tetrakaidecahedra. Each tetrakaidecahedron (one is outlined, right center) has 24 corners (water molecules), two hexagonal faces, and 12 pentagonal faces.

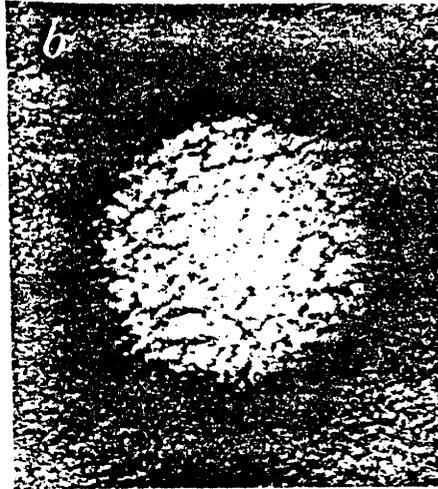
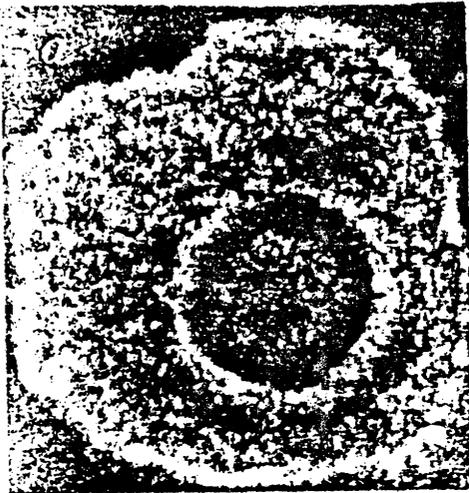
In unter dem Mikroskop sichtbarer Form findet man Dodekaeder und Ikosaeder als Skelette von Radiolarien. Ernst Haeckel hat sie in seinem 1887 veröffentlichten Bericht von der Reise der "Challenger" gezeichnet.



Radiolaria skeletons in Ernst Haeckel's Monograph of the Challenger Radiolaria

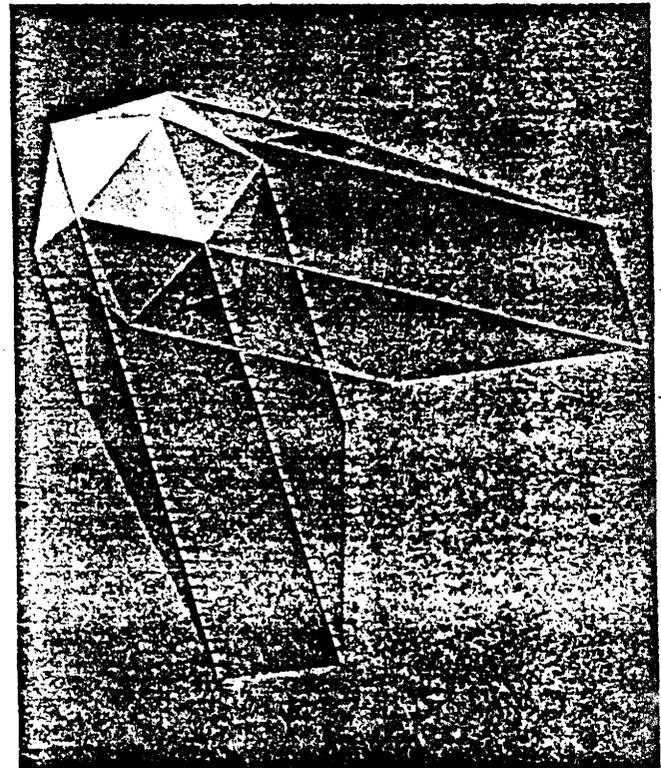
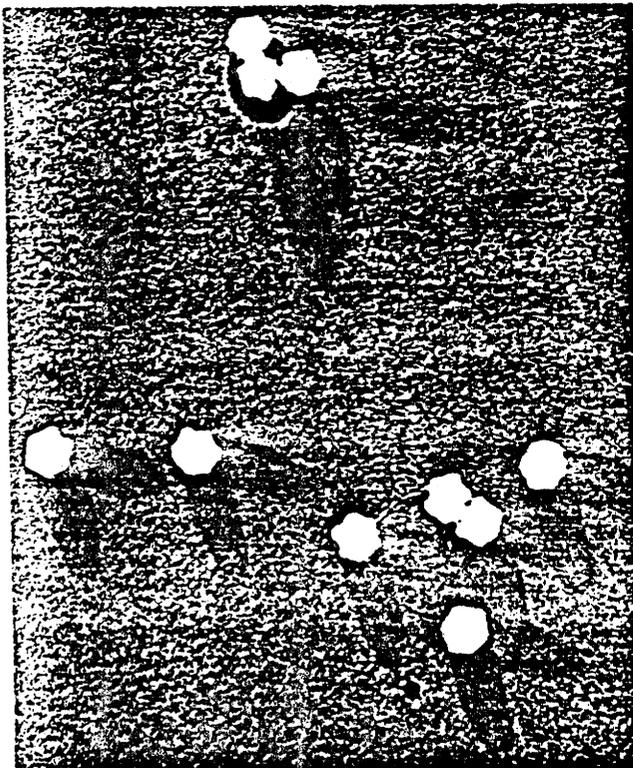


Adenovirus virion, showing the icosahedral array of capsomers. The capsomers at the vertices are surrounded by five nearest neighbors, all the others by six. From R. C. Valentine and H. G. Pereira, "Antigens and Structure of the Adenovirus," *J. Mol. Biol.* 13, 13 (1965).



HERPES VIRUS sometimes has an envelope (a). The magnification is 310,000 diameters. The capsid (b) is composed of 162 capsomeres.

Einige Viren haben die Form von Iko-saedern, wie etwa der Adenovirus, der Herpes Virus, und der Tipula Iridescent Virus, von denen hier Fotografien mit dem Elektronenmikroskop abgebildet sind.

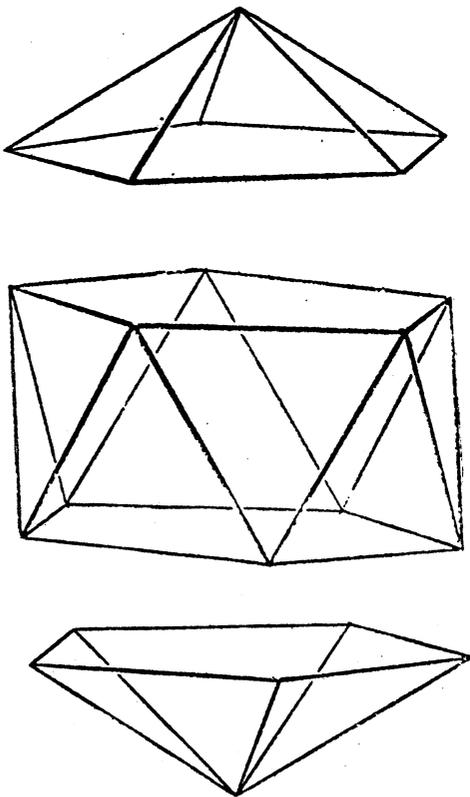


TIPULA IRIDESCENT VIRUS, an insect virus, is so large that its geometrically regular structure shows up clearly when specimens are shadowed with atoms of a heavy metal and enlarged in the electron microscope. In the doubly shadowed micrograph (left) the

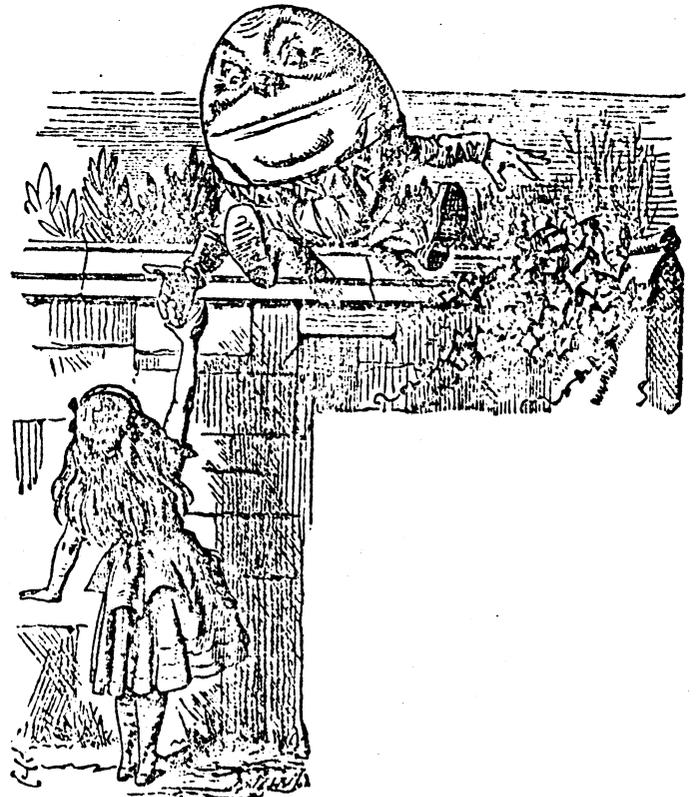
virus particles are enlarged about 58,000 diameters. The shadows indicate that each particle is a regular icosahedron (right). The micrograph was made by Kenneth Smith of the University of Cambridge and Robley C. Williams of the University of California.

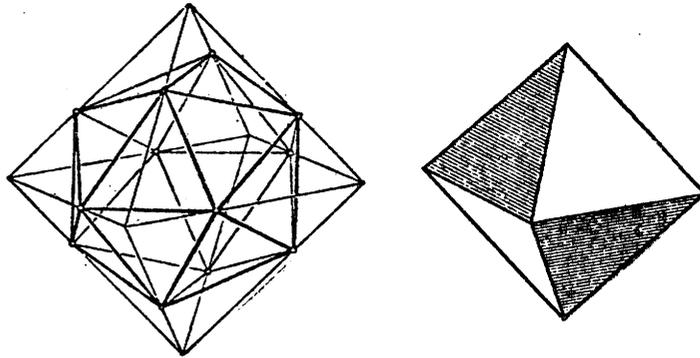
'Wirklich' sichtbare Dodekaeder und Ikosaeder sind Menschenwerk. Bei Ausgrabungen auf dem Monte Loffa bei Padua fand man ein 2500 Jahre altes etruskisches Dodekaeder, und in den ägyptischen Räumen des Britischen Museums in London kann man zwei Ikosaeder aus der ptolemäischen Dynastie sehen. Dodekaeder und Ikosaeder wurden zum "Würfeln" benutzt.

Wir wollen nun das Ikosaeder etwas genauer betrachten. Stellt man es auf eine Ecke, so daß die gegenüberliegende Ecke senkrecht über ihr liegt, dann sieht man oben und unten eine Pyramide, die ein regelmäßiges Fünfeck als Grundfläche hat. Schneidet man die Pyramiden weg, dann bleibt etwas übrig, das aussieht wie Humpty Dumpties Kragen und was man ein Antiprisma nennt. Bei dieser Darstellung des Ikosaeders kann man gut die Anzahl der Ecken, Kanten und Seiten abzählen. Man hat 12 Eckpunkte, 30 Kanten und 20 Seitenflächen.



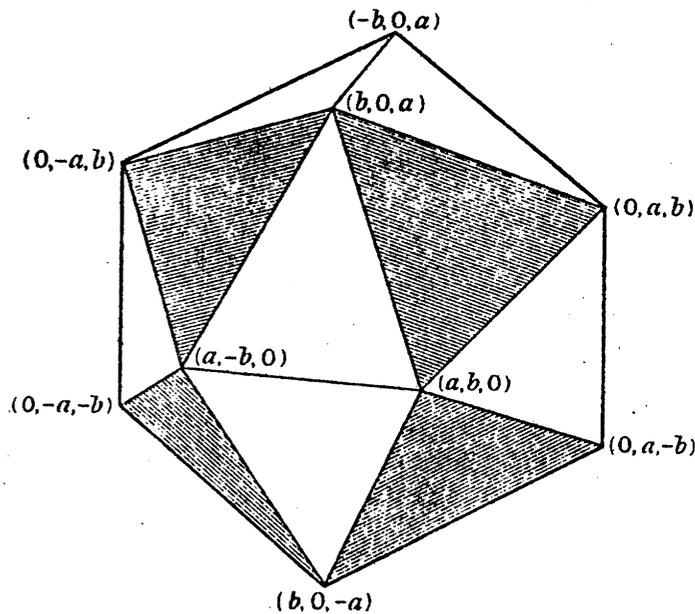
HUMPTY DUMPTY.





Eine andere Darstellung des Ikosaeders erhält man, wenn man von einem Oktaeder einen Teil geschickt abhackt. Dazu teilt man dessen Kanten

in einem festen Verhältnis $a : b$, und zwar so, daß auf den vier schwarzen Oktaederflächen die Teilpunkte im Uhrzeigersinn orientiert sind. Man erhält durch die zwölf Teilpunkte ein im allgemeinen irreguläres Ikosaeder, das von



8 gleichseitigen und 12 gleichschenkligen Dreiecken begrenzt wird. Die Basis der gleichschenkligen Dreiecke hat die Länge $2b$, die Länge der beiden anderen Dreieckseiten ist gleich

$$\sqrt{a^2 + (a - b)^2 + b^2}.$$

Die drei Seiten sind gleichlang, und das Ikosaeder wird regulär,

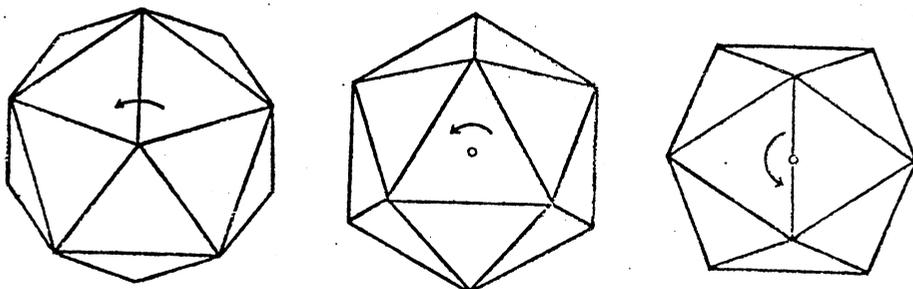
wenn das Teilverhältnis $a : b$ gleich $\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5+1})$ ist. Die Zahl τ ist das Verhältnis des goldenen Schnittes und es ist erfreulicherweise

$$\tau = 2 \cos \frac{\pi}{5}.$$

Das Ikosaeder ist ein "sehr symmetrischer" Körper. Wir wollen daran gehen, seine Symmetrien genauer zu untersuchen. Dabei wollen wir unter einer Symmetrie des Ikosaeders eine Bewegung verstehen, die das Ikosaeder wieder mit sich

selbst zur Deckung bringt. Die Menge I dieser Symmetrien bildet offensichtlich eine Gruppe, die sogenannte Ikosaedergruppe. Es ist klar, daß die Ikosaedergruppe I gleichzeitig auch die Symmetriegruppe des reziproken Dodekaeders ist.

Eine Reihe von Symmetrien wird durch Drehungen gegeben.



Die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken liefern 6 Drehachsen für Fünfteldrehungen, und man erhält so außer der Identität $4 \cdot 6 = 24$ Symmetrien. Die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten liefern 10 Drehachsen für Drittel-drehungen und man erhält so $2 \cdot 10 = 20$ nichttriviale Symmetrien. Schließlich hat man noch 15 Drehachsen für Halbdrehungen, gegeben durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten, und $1 \cdot 15 = 15$ zugehörige nichttriviale Symmetrien. Zusammen mit der Identität erhält man so 60 Elemente der Ikosaedergruppe I , und das sind auch alle Symmetrien. Das sieht man beispielsweise so: Die Ikosaedergruppe I operiert auf der Menge E der Ecken des Ikosaeders. Die Operation ist transitiv. Ist also I_P die Standuntergruppe der Ecke P , $I_P = \{g \in I \mid gP = P\}$, dann gilt: Die Anzahl Ecken ist gleich der Anzahl der Nebenklassen von I_P in I , $|E| = |I/I_P|$. Es ist also $|I| = |I_P| \cdot |E|$ und da I_P eine zyklische Gruppe mit fünf Elementen ist, ist $|I| = 5 \cdot 12 = 60$.

Die Ikosaedergruppe I ist eine interessante Gruppe: sie ist nämlich einfach. Das bedeutet, daß sie nur triviale Normalteiler hat, und das soll nun gezeigt werden. Da Normalteiler solche Untergruppen sind, die unter Konjugation fest stehen wie der Fels in der Brandung, d.h. mit allen ihren Konjugierten übereinstimmen, ist es nützlich, sich zunächst generell eine Übersicht über die Klassen konjugierter Untergruppen einer gegebenen Gruppe zu verschaffen. Dafür ist das folgende Lemma nützlich:

Lemma: Operiert die Gruppe I auf einer Menge M , ist $x \in M$ und $g \in I$, dann gilt für die Standuntergruppe I_{gx} des Elements $g \cdot x$:

$$I_{gx} = g \cdot I_x \cdot g^{-1} .$$

Wir ziehen aus dem Lemma sofort das folgende

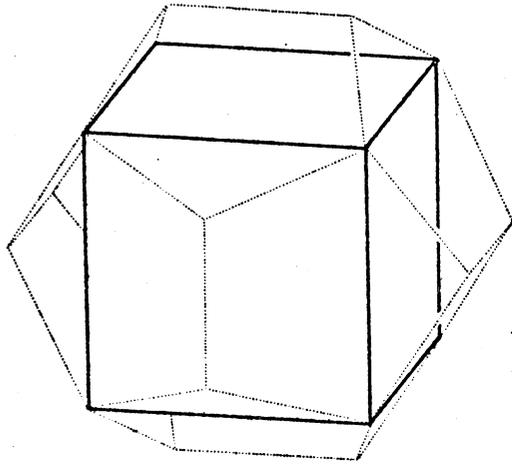
Korollar: Die Standuntergruppen der Elemente einer transitiven Menge sind eine Klasse konjugierter Untergruppen. (Umgekehrt erhält man natürlich auch eine gegebene Klasse konjugierter Untergruppen als Menge der Standuntergruppen einer geeigneten transitiven Menge).

Um das Korollar anzuwenden, betrachten wir die transitiven Operationen der Ikosaedergruppe I auf den folgenden drei Mengen: Ecken des Ikosaeders, Seiten des Ikosaeders, Kanten des Ikosaeders. Wir erhalten das folgende Resultat:

Die Standuntergruppen der Ecken, der Seiten und der Kanten des Ikosaeders bilden je eine Konjugiertenklasse von Untergruppen des Ikosaeders. Es handelt sich dabei um je eine Klasse von 6 zyklischen Untergruppen der Ordnung 5, 10 zyklischen Untergruppen der Ordnung 3, 15 zyklischen Untergruppen der Ordnung 2.

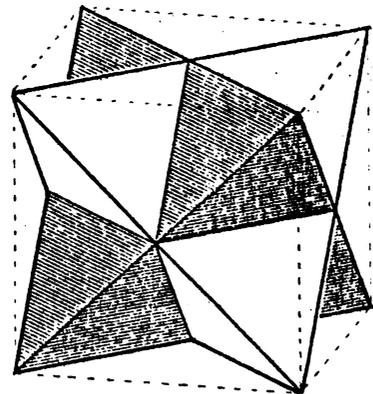
Wir hatten schon gesehen, daß jedes Element der Ikosaedergruppe in einer der hier aufgezählten zyklischen Untergruppen liegt. Damit folgt aber, daß ein Normalteiler von I , der nicht nur aus dem Einselement besteht, mit einem Element auch die von diesem Element erzeugte zyklische Untergruppe enthält und damit dann auch alle zu dieser Untergruppe konjugierten Untergruppen. Jeder Normalteiler, der nicht nur das Einselement enthält, ist daher Vereinigung der Untergruppen einer, zweier oder dreier der oben aufgezählten Konjugiertenklassen. Nun muß die Ordnung eines Normalteilers aber auch noch ein Teiler von 60 sein. Die Vereinigung der Untergruppen einer Klasse liefert 25 bzw. 21 bzw. 16 Elemente der Ikosaedergruppe, und da diese Zahlen keine Teiler von 60 sind, erhält man so keinen Normalteiler. Die Vereinigung der Untergruppen zweier Klassen hat stets mehr als 30 aber weniger als 60 Elemente, und auch eine solche Menge kann also kein Normalteiler sein. Die Vereinigung der Untergruppen aller drei Klassen schließlich liefert sämtliche 60 Elemente der Ikosaeder, und man erhält so den trivialen Normalteiler I . Insgesamt sehen wir also, daß I nur triviale Normalteiler hat, also einfach ist.

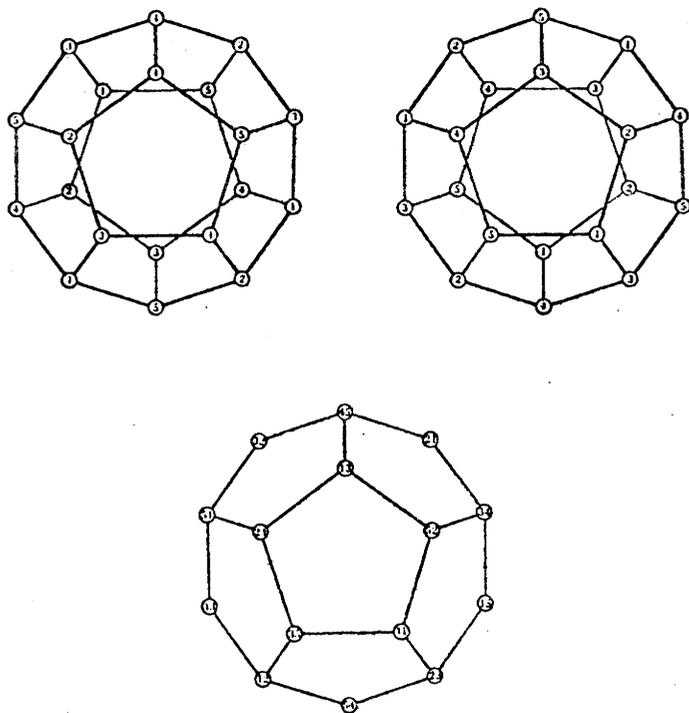
Außer I gibt es bekanntlich noch eine weitere einfache Gruppe der Ordnung 60, nämlich die Gruppe A_5 der geraden Permutationen von 5 Objekten, die sogenannte alternierende Gruppe. Jeder, der ein bißchen mehr als die Anfänge der Gruppentheorie kennt, würde es für ein Wunder halten, wenn diese beiden Gruppen wirklich verschieden wären. Sie sind es auch nicht. Um das einzusehen, interpretiert man die Ikosaedergruppe I besser als Symmetriegruppe des reziproken Dodekaeders und benutzt die Tatsache, daß man einem Dodekaeder fünf Würfel



einbeschreiben kann. Jede Dodekaederecke ist dabei Ecke zweier Würfel. Da in jedem Würfel zwei Tetraeder liegen, erhält man in dem Dodekaeder

10 Tetraeder. Auf diesen 10 Tetraedern operiert nun die Ikosaedergruppe, und die Menge der Tetraeder zerfällt unter dieser Operation in zwei transitive Mengen. Jede Dodekaederecke ist dann Ecke je eines Tetraeders aus jeder dieser Mengen, und jede der zwölf Dodekaederseiten hat mit allen fünf Tetraedern jeder der beiden Mengen je eine Ecke gemeinsam. Numeriert man also die fünf Ecken einer Dodekaederseite und auf diese Weise auch die fünf Tetraeder einer der beiden Mengen mit den Zahlen 1 bis 5 durch und versieht dann die übrigen Ecken jedes dieser Tetraeder mit der dem Tetraeder zugeordneten Zahl, dann erhält man eine Numerierung der 20 Dodekaederecken. Eine zu dieser Numerierung reziproke Numerierung erhält man dadurch, daß man die Tetraeder der anderen Menge so numeriert, daß ein Tetraeder dieser Menge die gleiche Zahl erhält, wie das zu ihm reziproke Tetraeder der ersten Menge. Setzt man diese Numerierungen zusammen, dann trägt jede Dodekaederecke eine zweistellige Zahl, deren erste Stelle von der ersten Numerierung und deren zweite Stelle von der zweiten Numerierung stammt.





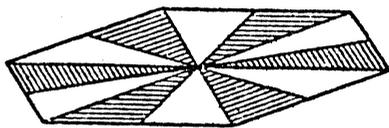
Mit Hilfe dieser Numerierung der Dodekaederecken kann man dann die Isomorphie von I und A_5 direkt ablesen:

Beispielsweise entspricht der Halbdrehung um die Achse, die durch den Mittelpunkt der Kanten $(13) - (45)$ und $(31) - (54)$ geht, die Permutation $(14)(35)$. Der Drehteldrehung um $(13) - (31)$ entspricht der Zyklus (245) (betrachte die zu (13) oder (31) benachbarten Ecken!), und der Fünfteldrehung um den Mittelpunkt der Dodekaederseiten mit den Ecken $(13) (24) (35) (41) (52)$ entspricht der Zyklus $(1 2 3 4 5)$.

Ganz nebenbei haben wir noch gezeigt, daß die Ikosaedergruppe eine Konjugiertenklasse von fünf Tetraedergruppen enthält (Standuntergruppen der transitiven Menge der fünf Würfel), ein Ergebnis, auf das wir später noch zurückkommen.

Mit ähnlichen, aber etwas leichteren Argumenten zeigt man übrigens, daß die Symmetriegruppe des Tetraeders isomorph ist zur Gruppe A_4 und die Symmetriegruppe des Würfels zur Gruppe S_4 , der symmetrischen Gruppe. Alle diese Gruppen haben als Symmetriegruppen regulärer Polyeder die Eigenschaft, endliche Untergruppen der Gruppe $SO(3)$, der Drehungen des \mathbb{R}^3 um den Nullpunkt zu sein. Man kann sich fragen, ob dies vielleicht schon alle endlichen Untergruppen von $SO(3)$ sind und so eine eindeutige Korrespondenz zwischen solchen Untergruppen und den regulären Polyedern besteht. Es zeigt sich nun, daß es außer diesen Gruppen noch eine Serie weiterer endlicher Untergruppen gibt, nämlich

die zyklischen Gruppen C_n und die Diedergruppen D_n , wobei C_n in D_n jeweils als Normalteiler enthalten ist, und D_n ein semidirektes Produkt von C_n mit C_2 ist. Die Gruppen D_n kann man als Symmetriegruppen von ausgearbeiteten regulären Polyedern, sogenannten Diedern,



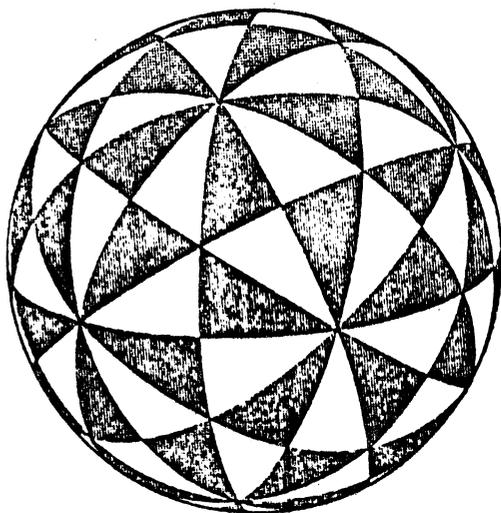
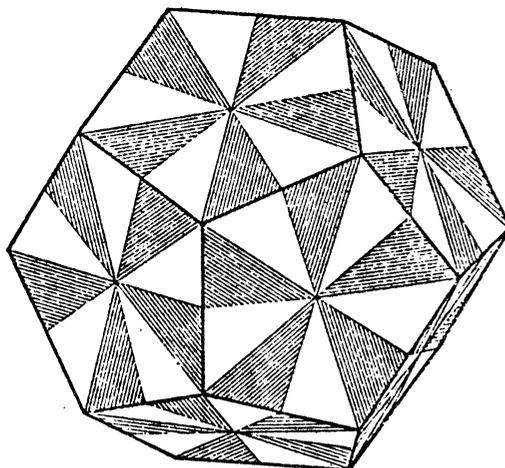
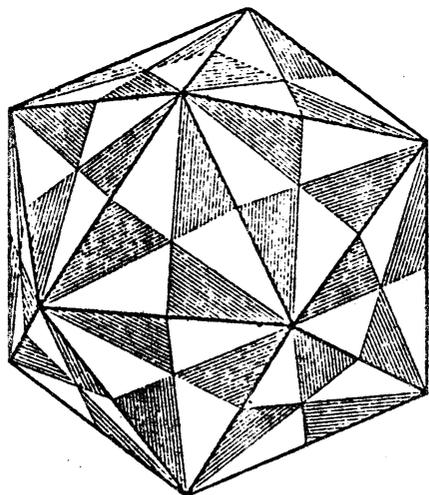
auffassen, die von 2 regelmäßigen n -Ecken begrenzt werden und den Inhalt 0 haben. (Ihr Symbol muß konsequenter Weise $\{n, 2\}$ lauten).

Die Ikosaedergruppe I operiert als Gruppe von Drehungen natürlich auch auf der 2-dimensionalen Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$. Die Bahnen unter der Operation von I bestehen im allgemeinen aus 60 verschiedenen Punkten. Es gibt drei Ausnahmefälle:

eine Bahn von 12 Punkten, den Projektionen der Ikosaederecken auf die Kugel,

eine Bahn von 20 Punkten, den Projektionen der Mittelpunkte der Ikosaederseiten auf die Kugel,

eine Bahn von 30 Punkten, den Projektionen der Kantenmitten auf die Kugel.



Die Lage der Punkte einer Bahn wird in nebenstehender Abbildung deutlich. Bis auf die drei Ausnahmefälle hat, grob gesprochen, jede Bahn entweder mit jedem der sechzig schwarzen oder mit jedem der sechzig weißen Dreiecke "genau" einen gemeinsamen Punkt.

Diese Operation der Ikosaedergruppe ist aus verschiedenen Gründen interessant. Man kann mit ihrer Hilfe, indem man die Sphäre als Riemannschen Zahlenkugel interpretiert, zu einer Auflösung der Gliederung 5. Grades kommen. Man erhält durch sie vierdimensionale reguläre Polytope, Verallgemeinerungen der platonischen Körper. Schließlich kommt man über diese Polytope zu Poincarés Beispiel einer Homologiesphäre, die keine Sphäre ist und Brieskorns exotischen Sphären, differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die homöomorph zur Standardsphäre sind, aber eine andere differenzierbare Struktur tragen als diese.

Ich möchte diese Dinge im folgenden kurz darlegen, benötige aber vorher noch eine möglichst explizite Darstellung der Ikosaedersymmetrien. Eine solche Darstellung ist im Körper der Quaternionen möglich. Da man heute, im Zeitalter der Strukturen, die Quaternionen kaum noch kennt - vielleicht gerade noch als Beispiel eines Schiefkörpers - , will ich ganz vorne anfangen.

Die Quaternionen sind eine vierdimensionale reelle Algebra \mathbb{H} , und sind $q = (\alpha, x, y, z)$ und $q' = (\alpha', x', y', z')$ zwei Quaternionen, dann ist ihr Produkt $q \cdot q'$ definiert durch

$$q \cdot q' = (\alpha\alpha' - xx' - yy' - zz', \alpha x' + x\alpha' + yz' - zy', \alpha y' - xz' + y\alpha' + zx', \alpha z' + xy' - yx' + z\alpha').$$

Man sieht, daß die Quaternionenmultiplikation offensichtlich nicht kommutativ ist.

Ein Quaternion der Form $(\lambda, 0, 0, 0)$ nennt man einen Skalar, da $(\lambda, 0, 0, 0) \cdot (\alpha, x, y, z) = (\alpha, x, y, z) \cdot (\lambda, 0, 0, 0) = (\lambda\alpha, \lambda x, \lambda y, \lambda z)$ ist. Die Zuordnung $\lambda \mapsto (\lambda, 0, 0, 0)$ definiert einen Homomorphismus von dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen in die Algebra der Quaternionen, und man bezeichnet deshalb den Skalar $(\lambda, 0, 0, 0)$ häufig einfach mit λ . Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen hat man zu jedem Quaternion $q = (\alpha, x, y, z)$ ein konjugiertes \bar{q} , das definiert ist durch $\bar{q} = (\alpha, -x, -y, -z)$, und es gilt: $\overline{q \cdot q'} = \bar{q}' \cdot \bar{q}$. Konjugieren ist also ein Anti-Automorphismus der Algebra \mathbb{H} . Ferner ist $q \cdot \bar{q} = (\alpha^2 + x^2 + y^2 + z^2, 0, 0, 0)$ ein Skalar, den man auch mit $N(q)$ bezeichnet und die (reduzierte) Norm von q nennt. Offensichtlich ist ein Quaternion q genau dann gleich 0, wenn $N(q) = 0$ ist, und es folgt, daß jedes Quaternion $q \neq 0$ ein multiplikatives Inneres hat, das gleich $\frac{\bar{q}}{N(q)}$ ist. Da die Multiplikation von Quaternionen auch assoziativ ist (siehe nächste Seite) ist \mathbb{H} also ein Schiefkörper. Wir halten noch fest, daß $N(q \cdot q') = N(q) \cdot N(q')$ ist und sehen, daß die Abbildungen $q \rightarrow p \cdot q$ und $q \rightarrow q \cdot p$ orthogonale

Abbildungen sind, falls $N(p) = 1$ ist. Hierbei ist Orthogonalität bezogen auf das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{H} , das definiert ist durch $\langle q, q' \rangle = \frac{1}{2} (q \cdot \overline{q'} + q' \cdot \overline{q})$, und für das $\langle q, q \rangle = N(q)$ ist.

Ordnet man dem Quaternion $q = (\alpha, x, y, z)$ die Matrix

$$M(q) = \begin{pmatrix} \alpha + iz & -ix + y \\ -ix - y & \alpha - iz \end{pmatrix}$$

zu, dann stellt man (mit einer kleinen Rechnung) fest, daß bei dieser Zuordnung dem Produkt zweier Quaternionen das Produkt der entsprechenden Matrizen zugeordnet ist; diese Zuordnung definiert also einen (injektiven) Homomorphismus von der Quaternionenalgebra \mathbb{H} in den Ring $M_2(\mathbb{C})$ der komplexen 2×2 Matrizen, und dies zeigt insbesondere, daß die Multiplikation von Quaternionen assoziativ ist. Setzt man für ein Quaternion $q = (\alpha, x, y, z)$ $u = \alpha + iz$ und $v = -ix - y$, dann erhält man für die zugehörige Matrix

$$M(q) = \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$$

und das (zu \mathbb{H} isomorphe) Bild von \mathbb{H} besteht also aus allen Matrizen dieser Form. Dies erlaubt es uns, die Quaternionen als Paare komplexer Zahlen anzusehen ($q \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$), wobei das Produkt $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - \overline{v} \\ v \\ \overline{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} .$$

Wir werden später von diesen Darstellungen Gebrauch machen.

Im Moment interessiert uns noch ein anderer Aspekt der Quaternionen. Betrachtet man nämlich die Formel für das Produkt zweier Quaternionen aufmerksam und erinnert sich an die analytische Geometrie, dann wird es einem plausibel erscheinen, Quaternionen q auch als Paare (α, v) zu schreiben, wobei $v = (x, y, z)$ ein Vektor aus \mathbb{R}^3 ist. Damit erhält man dann für das Produkt zweier Quaternionen:

$$q \cdot q' = (\alpha\alpha' - vv', \alpha v', + \alpha'v + vxv').$$

Hiermit hat dann sowohl der skalare Teil wie auch der vektorielle Teil des Produktes zweier Quaternionen eine anschauliche Deutung. ($v \cdot v'$ bezeichnet das Skalarprodukt der Vektoren v und v' und $v \times v'$ ihr Vektorprodukt). Den 3-dimensionalen Unterraum derjenigen Quaternionen, deren skalarer Anteil gleich 0 ist, bezeichnet man auch kurz als Unterraum der Vektoren, und anstelle von $(0, v)$ schreibt man einfach v .

Ist nun p ein Quaternion der Norm 1, dann gibt es offensichtlich einen Vektor v der Länge 1 und einen Winkel φ , so daß

$$p = (\cos \varphi, \sin \varphi v)$$

ist. Wir wollen nun die orthogonalen Abbildungen, die durch Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit p definiert werden, genauer untersuchen.

Da

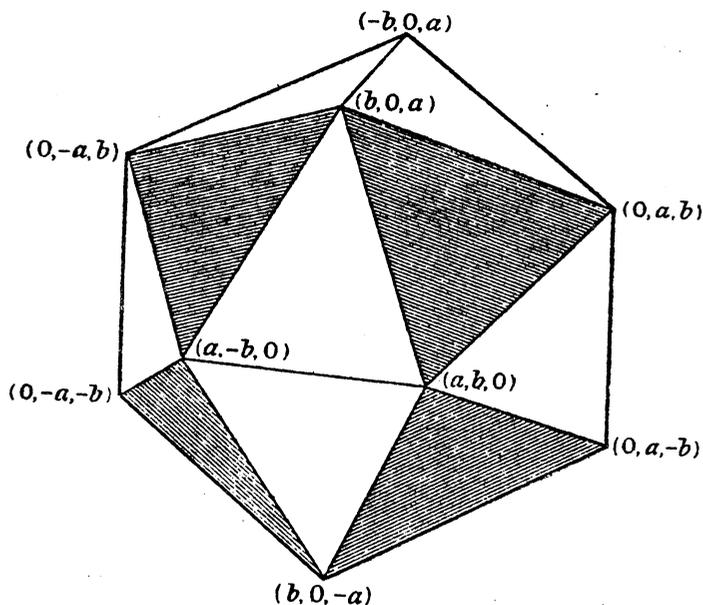
$$1 \cdot p = p \cdot 1 = p = (\cos \varphi, \sin \varphi v)$$

und

$$v \cdot p = p \cdot v = (- \sin \varphi, \cos \varphi v)$$

ist, bleibt die von 1 und v erzeugte Ebene sowohl bei Rechts- als auch bei Linksmultiplikation mit p invariant, und da 1 und v in dieser Ebene eine Orthonormalbasis bilden, sieht man, daß beide Operationen in dieser Ebene eine Drehung um den Winkel φ bewirken. Die dazu orthogonale Ebene, die gleich der Ebene der zu v senkrechten Vektoren ist, bleibt wegen der Orthogonalität der Multiplikation ebenfalls invariant, und es zeigt sich, daß Linksmultiplikation mit p in ihr eine Drehung um den Winkel φ bewirkt, während Rechtsmultiplikation mit p zu einer Drehung um den Winkel $-\varphi$ führt. Da das zum Quaternion $(\cos \varphi, \sin \varphi v)$ inverse Quaternion gleich $(\cos(-\varphi), \sin(-\varphi)v)$ ist, folgt, daß die Abbildung "Konjugation mit p ", d.h. $q \mapsto pqp^{-1}$, die Quaternionen 1 und v fest läßt, und in der Ebene der zu v senkrechten Vektoren eine Drehung um den Winkel 2φ bewirkt. Die Einschränkung u_p dieser Abbildung auf den Unterraum der Vektoren bewirkt also eine Drehung mit Drehachse v und Drehwinkel 2φ , und da die Zuordnung $p \rightarrow u_p$ ein surjektiver Homomorphismus von der Gruppe der Quaternionen der Norm 1 (der 3-dimensionalen Sphäre S^3) in die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen des 3-dimensionalen Raumes ist, erhalten wir auf diese Weise eine Darstellung der Drehungen durch Quaternionen. Weil der Kern der Surjektion $S^3 \rightarrow SO(3)$ gleich $\{+1, -1\}$ ist, gehören zu jeder Drehung zwei Quaternionen, und man kann zeigen, daß es nicht möglich ist, unter den zu einer Drehung gehörigen Quaternionen eine kanonische Auswahl zu treffen.

Wir wollen nun die Drehungen, die in der Ikosaedergruppe liegen, durch Quaternionen darstellen. Dazu legen wir das Oktaeder, aus dem das Ikosaeder durch Abhacken entsteht, so, daß seine Eckpunkte auf den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegen.



Dann ergibt sich für die Koordinaten der ausgezeichneten Punkte des Ikosaeders (mit der Kantenlänge 2):

Eckpunkte:

$$(0, \pm \tau, \pm 1) ; (\pm 1, 0, \pm \tau) ; (\pm \tau, \pm 1, 0)$$

Kantenmitten:

$$(\pm \tau, 0, 0) ; (0, \pm \tau, 0) ; (0, 0, \pm \tau)$$

$$\frac{1}{2} (\pm \tau^2, \pm 1, \pm \tau) ; \frac{1}{2} (\pm \tau, \pm \tau^2, \pm 1) ; \frac{1}{2} (\pm 1, \pm \tau, \pm \tau^2)$$

Seitenmittelpunkte: (Eckpunkte des reziproken Dodekaeders)

$$\frac{\tau^2}{3} (0, \pm \frac{1}{\tau}, \pm \tau) ; \frac{\tau^2}{3} (\pm \tau, 0, \pm \frac{1}{\tau}) ; \frac{\tau^2}{3} (\pm \frac{1}{\tau}, \pm \tau, 0); \frac{\tau^2}{3} (\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

In dieser Darstellung erkennt man gut einen der in dem reziproken Dodekaeder enthaltenen Würfel. Die Koordinatenvektoren für die ausgezeichneten Punkte des Ikosaeders ergeben Richtungsvektoren für die verschiedenen Drehungen der Symmetriegruppe I des Ikosaeders, und wenn man diese zu Einheitsvektoren normiert und mit den richtigen Winkeln (Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{5}$) versieht, erhält man eine Darstellung der Elemente der Ikosaedergruppe durch Quaternionen. Es ergeben sich für die Überlagerung I^* der Ikosaedergruppe die folgenden 120 Quaternionen:

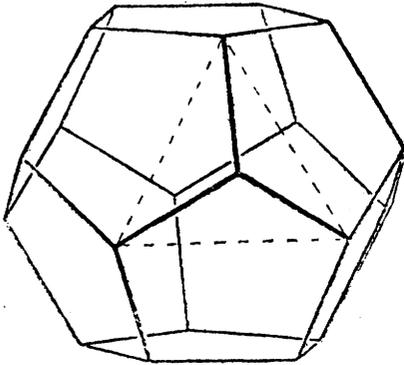
$$(\pm 1, 0, 0, 0); (0, \pm 1, 0, 0); (0, 0, \pm 1, 0); (0, 0, 0, \pm 1)$$

$$(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{2} ((\pm \tau, \pm 1, \pm \frac{1}{\tau}, 0))$$

wobei die Doppelklammer bedeutet, daß man sämtliche geraden Permutationen des Klammersausdrucks zu betrachten hat.

Es zeigt sich nun, daß die 120 Punkte von I^* die Eckpunkte eines 4-dimensionalen regulären Polytops sind. Um dies einzusehen, muß man zunächst einmal definieren, wann man ein solches Polytop regulär nennen will. Man nennt nun ein n -dimensionales Polytop regulär, wenn sowohl seine Seiten als auch seine Eckfiguren jeweils untereinander kongruente $(n-1)$ dimensionale reguläre



Polytope sind. Hierbei ist unter der zu einer Ecke gehörigen Eckfigur dasjenige Polytop zu verstehen, dessen Ecken gerade die zu der gegebenen Ecke benachbarten Ecken des gegebenen Polytops sind. Diese Definition stimmt für 3-dimensionale Polytope mit der üblichen Definition überein. Hat ein vierdimensionales reguläres

Polytop als Seiten $\{p, q\}$'s und als Eckfiguren $\{q, r\}$'s, dann muß $q = q'$ sein, da ja die Seiten einer Eckfigur gleichzeitig auch die Eckfiguren der Seiten sind. Solch ein Polytop kann also mit dem Symbol $\{p, q, r\}$ bezeichnet werden, und mit dem gleichen Gedankengang folgt, daß ein n -dimensionales reguläres Polytop durch ein Symbol $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, sein sogenanntes Schläfli-Symbol, gekennzeichnet wird.

In jeder Dimension hat man die Standardpolytope

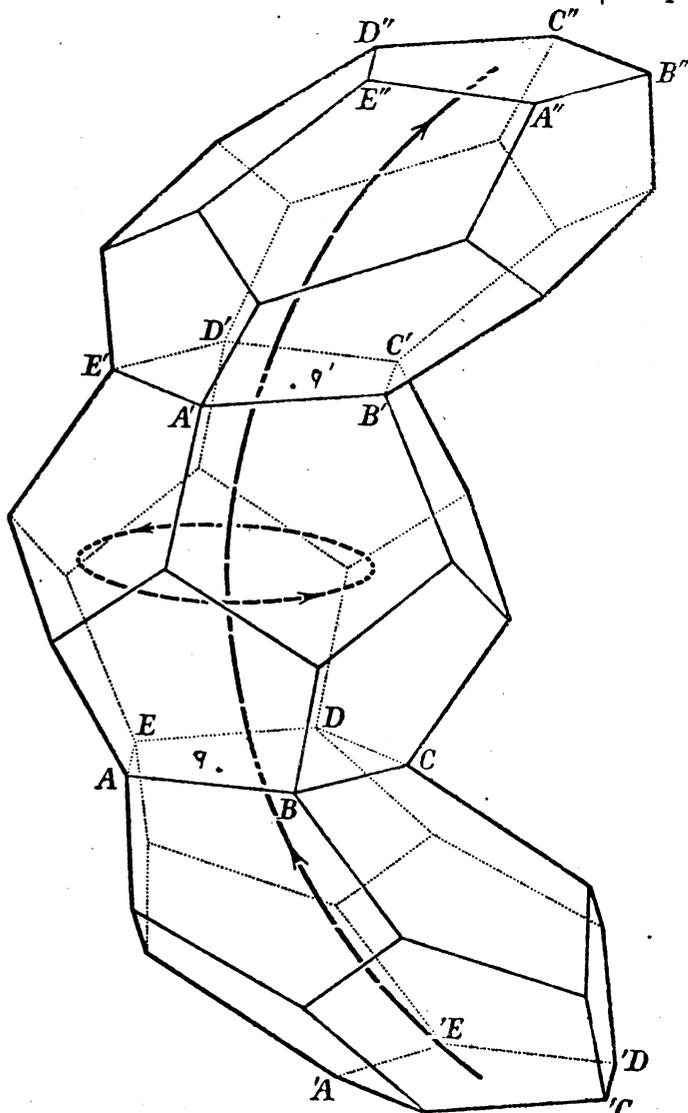
$$\{3, 3, \dots, 3, 3\}, \{3, 3, \dots, 3, 4\} \text{ und } \{4, 3, \dots, 3, 3\},$$

die n -dimensionalen Verallgemeinerungen von Tetraeder, Oktaeder und Würfel. Erstaunlicherweise sind das für Dimensionen ≥ 5 sogar schon alle regulären Polytope.

In der Dimension 4 gibt es noch drei weitere: $\{3, 4, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$ und $\{5, 3, 3\}$. Wir wollen zeigen, daß die Punkte von I^* ein $\{3, 3, 5\}$ aufspannen. Das Polytop $\{5, 3, 3\}$ ist dann das zu $\{3, 3, 5\}$ reziproke Polytop und $\{3, 4, 3\}$ erhält man, indem man die Tetraedergruppe durch Quaternionen darstellt.

Wir betrachten zunächst die zum Punkt $(1, 0, 0, 0)$ gehörige Eckfigur. Sie besteht aus den zwölf Punkten $\frac{1}{2}(\tau, 0, \pm 1, \pm \frac{1}{\tau})$; $\frac{1}{2}(\tau, \pm \frac{1}{\tau}, 0, \pm 1)$ und $\frac{1}{2}(\tau, \pm 1, \pm \frac{1}{\tau}, 0)$. Diese Punkte liegen sämtlich in der Hyperebene $\alpha = \frac{\tau}{2}$

und bilden ein Ikosaeder der Kantenlänge $\frac{2}{\tau}$. Die zu dem Punkt $(1,0,0,0)$ gehörige Eckfigur ist also ein $\{3, 5\}$. Die 20 Tetraeder, die auf den Ikosaederseiten stehen und deren vierter Punkt die Ecke $(1,0,0,0)$ von I^* ist, sind Seiten des Polytops I^* und sämtlich untereinander kongruente reguläre Tetraeder. Ist nun p ein beliebiger Punkt in I^* , dann bewegt Linksmultiplikation mit p die hier betrachtete Situation in den Punkt p , und es folgt, daß die Eckfiguren kongruente $\{3, 5\}$ und die Seiten von I^* kongruente $\{3, 3\}$ sind: I^* ist also ein $\{3, 3, 5\}$. Da sich in jeder Ecke von I^* zwanzig Tetraeder treffen, jedes Tetraeder aber wiederum zu vier Ecken gehört, gibt es fünf mal so viel Tetraeder wie Ecken. I^* hat also 600 Seiten und heißt deshalb auch 600 Zell. Das zu I^* reziproke Polytop J ist ein $\{5, 3, 3\}$, das von 120 regulären Dodekaedern begrenzt wird und 120 Zell heißt. Die Gruppe I^* operiert auf diesem Polytop durch Linksmultiplikation und jede der 120 Dodekaederseiten von J ist ein Fundamentalbereich für diese Operation. Ich will den Raum J/I^* der Bahnen genauer beschreiben. Man erhält ihn, wenn man bei einem Fundamentalbereich diejenigen Randpunkte identifiziert, die in der gleichen Bahn liegen. Nimmt man als Fundamentalbereich beispielsweise das zu der Ecke $1 = (1,0,0,0)$ von I^* reziproke Dodekaeder F , dann hat man zwei Randpunkte q und q' von F genau dann zu identifizieren, wenn es ein $p \in I^*$ gibt, so daß $q' = p \cdot q$ ist.



Ein solches Element muß dann aber dasjenige Nachbar-Dodekaeder F , in dessen Rand der Punkt q auch noch liegt, auf das Dodekaeder F abbilden. Deshalb kann p nur eines derjenigen Elemente von I^* sein, das in der Hyperebene $\alpha = \frac{1}{2} \tau$ liegt. Es ist also von der Form

$$\left(\cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{5} \cdot v \right)$$

und bewirkt sowohl in der von 1 und v erzeugten Ebene als auch in der dazu senkrechten Ebene eine Drehung um $\frac{\pi}{5}$. Wird das Dodekaeder F durch p in das Dodekaeder F'

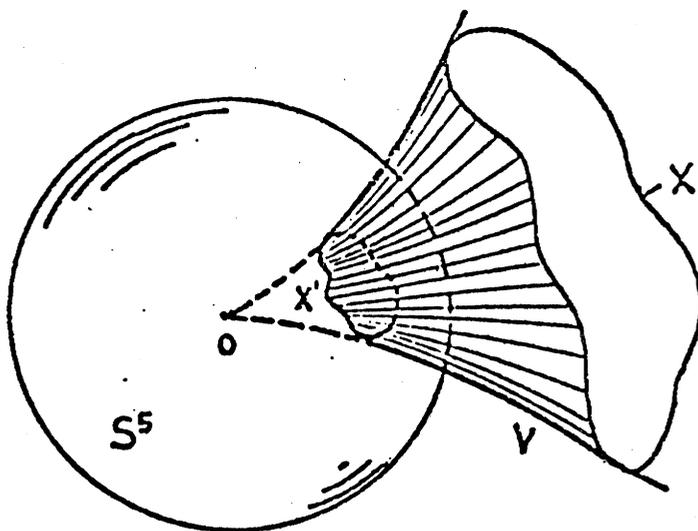
transportiert, dann hat man die gemeinsame Seite von F und F' mit der gemeinsamen Seite von F' und F nach einer Drehung um $\frac{\pi}{5}$ zu identifizieren. In der Abbildung repräsentiert der große Bogen die von 1 und v erzeugte Ebene, in der p eine Drehung um $\frac{\pi}{5}$ bewirkt. Die dazu senkrechten Dodekaederseiten werden identifiziert. Der Raum J/I^* , man nennt ihn den sphärischen Dodekaeder-raum, hat die gleiche Homologie wie die 3-dimensionale Sphäre S^3 , hat aber die Gruppe I^* als Fundamentalgruppe, und ist deshalb keine Sphäre. Er wurde 1904 von Henri Poincaré angegeben.

Nachdem wir nun mit Hilfe der Quaternionen eine sehr explizite Beschreibung der Ikosaederdrehungen gewonnen haben, möchte ich kurz auf die Auflösung der Gleichung 5. Grades mit Hilfe der Ikosaederoperation auf der 2-Sphäre eingehen. Dazu ist es nützlich, sich die 2-Phäre als Riemannsche Zahlenkugel vorzustellen. Jede Drehung der Sphäre definiert dann eine Abbildung der (um den Punkt ∞ erweiterten) komplexen Zahlen in sich, und ist $M(g) = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$ eine der beiden komplexen 2×2 Matrizen, die der Drehung g zugeordnet ist, dann ist das Bild der komplexen Zahl z unter der Drehung g gegeben durch $\frac{uz - \bar{v}}{vz + u}$; die andere der Drehung g zugeordnete Matrix liefert den gleichen Wert.

Diese etwas unvermittelt auftretende Beziehung zwischen den Drehungen der Kugel und Transformationen der Form $z \mapsto \frac{uz - \bar{v}}{vz + u}$, sogenannten Möbiustransformationen, wird eigentlich nur dann richtig klar, wenn man die Tatsachen benutzt, daß die Sphäre S^2 nichts anderes ist als der eindimensionale komplexe projektive Raum $P_1(\mathbb{C})$. Ich möchte darauf nicht näher eingehen. Wir sehen aber, daß diejenigen Möbiustransformationen, die den Ikosaederdrehungen zugeordnet sind, sehr einfache Koeffizienten haben. Ist ζ eine fünfte Einheitswurzel, dann liegen sie sämtlich im Körper $\mathbb{Q}(\zeta)$. Jedes Element eines den Körper $\mathbb{Q}(\zeta)$ umfassenden Körpers wird daher durch Anwendung von Ikosaederdrehungen wieder auf ein Element des gleichen Körpers abgebildet. Ist also z_1, \dots, z_{60} eine Bahn unter I , $P(z) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_{60})$ und enthält der Grundkörper K , aus dem die Koeffizienten des Polynoms stammen eine fünfte Einheitswurzel, dann ist jede der Zahlen z_1, \dots, z_{60} ein primitives Element für den Zerfällungskörper E des Polynoms P . Falls die Bahn nicht zufällig sehr speziell gewählt wurde, dann ist der Grad von E über K gleich 60, und die Galoisgruppe der Erweiterung ist gleich der Ikosaedergruppe, oder wenn wir so wollen auch gleich der alternierenden Gruppe A_5 . Das ist deshalb interessant, weil ja bekanntlich eine solche Körpererweiterung nicht durch schrittweise Adjunktion von Wurzeln reiner Gleichungen, d.h. Gleichungen der Form $z^n - a = 0$, erhalten werden können. Dennoch hat man über den Zerfällungs-

körper des Polynoms P eine genauso gute Übersicht, wie über den Zerfällungskörper des Polynoms $z^n - a$, da die beiden Polynome sich in gewisser Hinsicht sehr ähnlich sind. Bei beiden muß man mit Methoden der Analysis eine Wurzel bestimmen, und die restlichen erhält man dann quasi geschenkt durch Anwendung der Operationen der jeweiligen Galoisgruppen. Der Zerfällungskörper E hat noch eine weitere schöne Eigenschaft: er ist auch Zerfällungskörper von Gleichungen 5. Grades, die ja, wie man weiß, nicht durch Radikale auflösbar sind. Ist nämlich T eine der fünf in I enthaltenen Tetraedergruppen und w_1 ein unter T invariantes Element aus E , dann erhält man durch Anwendung von I aus w_1 vier weitere Elemente w_2, w_3, w_4, w_5 , und das Polynom $(z - w_1) \cdot \dots \cdot (z - w_5)$ hat Koeffizienten in dem Grundkörper K , und falls w_1 nicht zu speziell gewählt wurde, ist E Zerfällungskörper des Polynoms. Umgekehrt kann man, *cum grano salis*, zeigen, daß in dem Zerfällungskörper eines Polynoms 5. Grades immer ein primitives Element existiert, welches Wurzel einer Ikosaedergleichung ist. Diese sehr theoretischen Überlegungen gewinnen dadurch praktische Bedeutung, daß die Gleichungen der verschiedenen Bahnen der Ikosaedergruppe nicht beziehungslos nebeneinanderstehen, sondern eine einparametrische Familie von Polynomen sechzigsten Grades bilden. Zunächst einmal ist es klar, daß das zu der Bahn z_1, \dots, z_{60} gehörige Polynom P auf den Bahnen von I konstant ist. Ist nämlich g ein Element von I , dann hat das Polynom $P(gz) = (gz - z_1) \cdot \dots \cdot (gz - z_{60})$ die gleichen Nullstellen wie $P(z)$ und stimmt deshalb mit $P(z)$ überein. Ist nun $Q(z)$ das zu einer zweiten Bahn gehörige Polynom, dann unterscheiden sich die Werte der beiden Polynome auf einer dritten Bahn nur um einen konstanten Faktor λ , d.h. das Polynom $R(z)$ dieser Bahn ist von der Form $R(z) = P(z) - \lambda Q(z)$. Seien nun f, H und T speziell diejenigen Polynome, deren Nullstellen gerade die Ikosaederecken, die Seitenmittelpunkte und die Kantenmitten sind, dann kann man durch je zwei von ihnen jede beliebige Bahn von I beschreiben: für geeignetes λ ist sie beispielsweise Nullstellenmenge des Polynoms $f^5 - \lambda H^3$. (Insbesondere gilt eine Relation der Form $f^5 - \lambda H^3 = \mu T^2$). Bemerkenswert hieran ist, daß man nur einen Parameter λ benötigt und daß die Koeffizienten von f, H und T wohlbekannt sind (ausrechnen!) und in $Q(\zeta)$ liegen. Man kann nun das Verfahren zur Auflösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades noch etwas genauer beschreiben. Man bestimmt zu einer solchen Gleichung (algebraisch) einen Parameter λ , löst die zugehörige Ikosaedergleichung (mit Mitteln der Analysis) und berechnet dann daraus rational die Wurzeln der Gleichung 5. Grades. Dieses Programm ist explizit ausführbar und ist in dem Buch von Felix Klein "Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grad" dargestellt.

Interpretiert man nun die Riemannsche Zahlenkugel als komplexen projektiven Raum $P_1(\mathbb{C})$, dann entsprechen den Polynomen f, H, T homogene Polynome (in zwei Unbestimmten), die invariant sind unter der Operation der Gruppe I^* . Man kann zeigen, daß jedes unter I^* invariante homogene Polynom ein Polynom in den f, H und T entsprechenden homogenen Polynomen ist, die mit $z_1(u,v), z_2(u,v), z_3(u,v)$ bezeichnet seien und die so normiert seien, daß die zwischen f^5, H^3 und T^2 bestehende Relation die Form $z_1^5 + z_2^3 + z_3^2 = 0$ annimmt. Es zeigt sich, daß diese Relation im wesentlichen die einzige Relation ist und daß daher die Algebra der I^* invarianten homogenen Polynome isomorph ist zu $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] / (z_1^5 + z_2^3 + z_3^2)$. Ist nun V die komplexe 2-dimensionale algebraische Fläche in \mathbb{C}^3 , die Nullstellengebilde des Polynoms $z_1^5 + z_2^3 + z_3^2$ ist, dann ist die Abbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow V$, die definiert ist durch $(u,v) \rightarrow (z_1(u,v), z_2(u,v), z_3(u,v))$ verträglich mit der Operation von I^* auf \mathbb{C}^2 und induziert eine Abbildung $\mathbb{C}^2/I^* \rightarrow V$, die ein Isomorphismus ist. Die Einschränkung auf den Dodekaederraum (dieser jetzt aufgefaßt als S^3/I^*) hat als Bild eine (reelle) dreidimensionale Mannigfaltigkeit X in V . Sie ist Rand einer Umgebung des Nullpunktes $0 \in V$, nämlich des Bildes der in \mathbb{C}^2 gelegenen Vollkugel mit Rand S^3 und ist diffeomorph zu dem Durchschnitt X' von V mit der in \mathbb{C}^3 gelegenen 5-dimensionalen Sphäre $S^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 = 1\}$.



Der Raum X' liefert also eine weitere Beschreibung des sphärischen Dodekaederraumes, und man kann also sagen, daß er Durchschnitt einer Sphäre mit einer komplexen Hyperfläche ist, die im Nullpunkt eine isolierte Singularität hat. Es zeigt sich, daß ein solcher Durchschnitt

häufig einen interessanten Raum liefert. So hat Brieskorn gezeigt, daß der Durchschnitt des in \mathbb{C}^5 gelegenen Nullstellengebildes des Polynoms $x_1^5 + x_2^3 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$ (einer offensichtlichen Verallgemeinerung der Ikosaedergleichung) mit der Sphäre S^9 eine 7-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, die homöomorph ist zur 7-Sphäre, aber eine andere differenzierbare Struktur trägt als diese und deshalb mit Recht eine exotische Sphäre genannt werden kann.

An dieser Stelle könnte man nun beginnen, über die Ikosaedersingularität und ganz allgemein über Singularitäten zu reden, aber das ist, wie eine detaillierte Diskussion der Gleichung 5. Grades, Stoff genug für eine ganze Vorlesung, und deshalb möchte ich den Vortrag hier abschließen.