Mathematik in deutschen Schulen

— im Lichte eines Memorandums aus dem Jahre 1962

CHRISTIAN SIEBENEICHER

Anläßlich der Reformbemühungen Anfang der sechziger Jahre, die das Ziel hatten, den Mathematikunterricht an amerikanischen 'High Schools' zu verbessern, haben vor ziemlich genau vierzig Jahren prominente amerikanische Mathematiker im Frühjahr 1962 ein Memorandum veröffentlicht mit dem Ziel, ihre Bedenken gegen gewisse Bestrebungen der Reformer in der Öffenlichkeit bekannt zu machen — ohne Erfolg, wie wir heute wissen. Meinem Beitrag folgt eine deutsche Übersetzung dieses Memorandums, die, ebenfalls 1962, in der Zeitschrift 'Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht' erschien¹. Auch diese Veröffentlichung des Memorandums blieb bekanntlich ohne Auswirkung auf die in den Sechzigern begonnene Neugestaltung des Mathematik-Unterrichtes an Deutschlands Schulen.

Nach TIMSS und PISA ist eine Diskussion über den Mathematikunterricht in Gang gekommen. Vielleicht könnte dieses Memorandum ja heute, vierzig Jahre nach seiner Veröffentlichung, einen nützlichen Dienst leisten: Die damaligen Fragen an den Mathematikunterricht sind ja gar nicht so verschieden von denen, die sich heute stellen. Wenn beispielsweise »Die große Mehrheit der Befragten (Schüler) Aussagen zustimmt, wie: "Mathematik ist Behalten und Anwenden von Definitionen, Formeln, mathematischen Fakten und Verfahren" oder "Mathematik betreiben heißt: allgemeine Gesetze und Verfahren auf spezielle Aufgaben anwenden."«², und wenn vor diesem Hintergrund PISA in einer Studie befindet, »...ist die mathematische Grundbildung der 15–Jährigen in Deutschland wenig befriedigend«³, dann geht es um Probleme, die den Kern des Mathematikunterrichtes treffen.

Auf die Frage, wie es denn zu dieser Situation kommen konnte, gibt es eine Vielzahl von Antworten und aus diesen resultierende Verbesserungsvorschläge. In der öffentlichen Diskussion kommen hauptsächlich pädagogische und psychologische Gesichtspunkte zur Sprache. Von der Schulmathematik selbst, also dem, was im Mathematikunterricht unterrichtet wird, ist meistens nicht die Rede. Warum eigentlich nicht? Haben die Mathematiker dazu nichts zu sagen?

Nachdem es in den DMV-Mitteilungen 2/2001 'Vorschläge zur Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und –lehrern für das Lehramt an Gymnasien in Deutschland' gab, wäre es an der Zeit, auch zur Schulmathematik etwas zu sagen; eine Neuauflage des Memorandums von 1962 könnte eine offensichtliche Lücke ausfüllen. Hierzu müßten allerdings > Mathematiker, die ihr Fach kennen<4, bereit sein, sich die 'banal' erscheinenden Schulmathematik einmal genau anzusehen.

¹MNU, 15. Band Heft 5, S. 224–227, 1962 / 63

²GÜNTER TÖRNER, 'TIMSS — Zeit für einen Nachruf?', DMV Mitteilungen 2/2001

³http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa 'PISA 2000: Zusammenfassung zentraler Befunde'

⁴Günter Törner in 'TIMSS — Zeit für einen Nachruf?'

Man könnte diese als eine Sammlung bekannter Trivialitäten schnell beiseite tun, aber so könnte man auch mit Hilbert's Grundlagen der Geometrie (1899) verfahren. Solche Dinge werden erst dann interessant, wenn man sein Augenmerk auf den Aufbau und die Entwicklung der Theorie richtet — und angesichts der Frage, 'Wie denn das Kulturgut Mathematik an die nächste Generation weiterzugegeben sei', ist hier die Aufmerksamkeit der Mathematiker gefragt. In seiner 'Lobrede auf Herrn Leonhard Euler' sagt NICOLAUS FUSS⁵ 1783 worum es geht: » Verschiedene Akademiker hatten sich nämlich auf Verlangen des Präsidenten anheischig gemacht, Handbücher zum Unterrichte der Jugend zu verfertigen, und der grösste Analyste glaubte sich nicht durch eine Arbeit zu erniedrigen, die zwar weit unter seinen Kräften war, die aber der Zweck adelte, zu dem man sie bestimmte«. Fuss spricht hier von Euler's 'Einleitung zur Rechenkunst'⁶ von 1738. In diesem für russische Schulen geschriebenen elementaren Rechenbuch werden in einer für jedermann verständlichen Sprache die 'Banalitäten' des Rechnens so an den Leser herangetragen, daß er auf jeder Seite des Buches erleben kann, wie Euler's Imperativ, »...selbsten neue Regeln zu erfinden [um] solche Aufgaben aufzulösen, zu welchen die sonst gewöhnlichen Regeln nicht hinreichend sind«, auch bei der Entwicklung der Rechenkunst aus dem Zählen heraus ständig als Motor wirkt. Es lohnt sich, dieses Buch heutigen Schulbüchern gegenüberzustellen. Ein Vergleich macht deutlich, daß durch die Reformen der Vergangenheit — oft in »bester Absicht« mit der Vorstellung einer »irgendwie gearteten "optimierten" Vermittlung von Mathematik«⁷ — ganz wesentliche Bestandteile aus der Schulmathematik verschwunden sind.

Wenn man sich einmal auf diese eingelassen hat und sie mit den Augen des Mathematikers ansieht, dann wird es möglich, jenen 'Schwund' zu lokalisieren und damit vielleicht eine fundierte Diskussion über den Unterrichtsinhalt zu ermöglichen. Indem es hilft, die notwendigen Fragen zu stellen, könnte das Memorandum hierbei nützlich sein.

⁵LEONHARD EULER, Opera Omnia, Series Prima, Vol. I, S. LX

⁶LEONHARD EULER, Opera Omnia, Series Tertia, Vol. II und

http://www.mathematik.uni-bielefeld/~sieben/euler/rechenkunst.html

⁷GÜNTER TÖRNER in 'TIMSS — Zeit für einen Nachruf?'

Über den mathematischen Unterricht der höheren Schule⁸

Vorbemerkung des Übersetzers: Die nachfolgende Erklärung erschien unter der Überschrift »On the Mathematics Curriculum of the High School« in den Nummern für März 1962 der beiden amerikanischen Zeitschriften »The Mathematics Teacher« und »The American Mathematical Monthly«. Sie erscheint hier in Übersetzung mit der freundlichen Genehmigung dieser Zeitschriften. Obwohl die Erklärung unmittelbar auf die Verhältnisse in den USA und die dort im Gang befindlichen Bestrebungen zur Reform des Mathematikunterrichts Bezug nimmt, mag sie auch für Europa nicht ohne Interesse sein: Einmal wegen der grundsätzlichen Tragweite der Richtlinien, die sie aufstellt; dann aber auch, weil manche der Tendenzen, die sie anvisiert, sich zum Teil auch in manchen europäischen Reformbemühungen widerspiegeln. — »High school« wurde im folgenden einfach durch »höhere Schule«, übersetzt, obwohl es sich in den USA um eine ganz bestimmte Schulstufe handelt.

ALEXANDER WITTENBERG, Quebec, Kanada

Das nachfolgende Memorandum wurde durch mehrere der Unterzeichneten zusammengestellt und an 75 Mathematiker in den USA und Kanada gesandt. Es wurde kein Versuch unternommen, durch Bearbeitung der gesamten mathematischen Gemeinschaft eine große Zahl von Unterschriften anzusammeln. Das Ziel war vielmehr, eine bescheidene Zahl von Unterschriften von Männern mit mathematischer Kompetenz und Erfahrung und einem mathematischen »background« — und aus verschiedenartigen geographischen Orten — zu erhalten. Einige wenige der Unterzeichneten, deren Unterstützung sehr willkommen ist, boten sich an, ihren Namen beizusteuern, nachdem sie durch Kollegen von dem Memorandum gehört hatten.

* * *

Die Mathematiker dieses Landes verfügen gegenwärtig über ein günstigeres Klima für die Entwicklung und die Einführung in die Praxis von Verbesserungen im mathematischen Unterricht. Tatsächlich haben eine Anzahl Gruppen die sich bietende Gelegenheit erkannt und arbeiten hart und mit den besten Absichten, um von ihr Gebrauch zu machen.

Es wäre jedoch eine Tragödie, wenn die Lehrplanreform die falsche Richtung einschlüge und wenn die goldene Gelegenheit vergeudet würde. In der gegenwärtigen Lage bestehen unglücklicherweise Faktoren und Mächte, die uns fehlleiten können. Mochte früher das Erziehungswesen durch berufliche Pädagogen beherrscht worden sein, die das Pädagogische auf Kosten des Inhalts des Unterrichtes betonten, so können heute Mathematiker hierauf in der Weise reagieren, daß sie den Lehrstoff auf Kosten der Pädagogik betonen; ihr Tun kann dann ebenso unwirksam sein. Unbewußt mögen Mathematiker annehmen, daß alle jungen Menschen das gern haben sollten, was zeitgenössische Mathematiker gern haben, oder daß die einzigen Schüler, die sorgsamer geistiger Pflege wert sind, diejenigen sind, die dereinst berufliche Mathematiker werden könnten. Die Notwendigkeit, heutzutage viel mehr Mathematik zu lernen, als in der Vergangenheit erforderlich war, mag uns veranlassen, abgekürzte Wege zu suchen, die jedoch mehr schaden als nützen könnten.

 $^{^{8}}$ MNU, 15. Band, Heft 5, S. 224–227, 1962 / 63

In Anbetracht der möglichen Gefahren mag es hilfreich sein, zu formulieren, was unseres Erachtens fundamentale Grundsätze und praktische Richtlinien sind.

- 1. Für wen? Der mathematische Unterrichtsstoff der höheren Schule sollte den Bedürfnissen aller Schüler dienen: er sollte einen Beitrag zum kulturellen »background« des allgemeinen Schülers leisten und den zukünftigen Benutzern der Mathematik, das heißt den Ingenieuren und Wissenschaftlern, berufliche Vorbereitung geben, wobei sowohl den physikalischen Wissenschaften, die die Grundlage unserer technologischen Zivilisation sind, als auch den Sozialwissenschaften, die in Zukunft immer mehr Mathematik benötigen mögen, Rechnung zu tragen ist. Indem er für die anderen Schüler sorgt, kann der Unterricht zugleich auch den zukünftigen Mathematikern das allerwesentlichste Material bieten. Doch ist es eine Vergeudung, allen Schülern solche Gegenstände zu bringen, die nur für die kleine Minderheit von zukünftigen Mathematikern von Interesse sein können; es läuft auf eine Ignorierung der Bedürfnisse der wissenschaftlichen Gemeinschaft und derjenigen der Gesellschaft als Ganzes hinaus.
- 2. Wissen ist Tun. In der Mathematik hat nur solches Wissen Wert, das nicht Besitz von Information, sondern »know-how«-Wissen, »wie man es macht«, ist. Mathematik können heißt imstande sein, Mathematik zu tun: einigermaßen flüssig die mathematische Sprache zu gebrauchen, Probleme zu lösen, Überlegungen kritisch zu überprüfen, Beweise zu finden und, was die wichtigste Tätigkeit sein mag, einen mathematischen Begriff in einer gegebenen konkreten Situation zu erkennen oder ihn aus ihr herauszuschälen.

Daher ist es schlimmer als nutzlos, neue Begriffe einzuführen, wenn ein ausreichender Hintergrund an konkreten Tatsachen fehlt, vereinheitlichende Begriffe einzuführen, wo keine Erfahrung vorhanden ist, die zu vereinheitlichen wäre, oder auf den eingeführten Begriffen herumzureiten ohne konkrete Anwendungen, die dem Schüler wirkliche geistige Herausforderung sein können: vorzeitige Formalisierung kann zur Sterilität führen; verfrühte Einführung von Abstraktionen kann besonders den Widerstand kritischer Geister hervorrufen, die, bevor sie eine Abstraktion hinnehmen, wissen wollen, wieso sie relevant ist und wie man von ihr Gebrauch machen kann.

- 3. Mathematik und Wissenschaft. In ihrer kulturellen Bedeutung sowohl wie in ihrem praktischen Gebrauch ist die Mathematik mit den übrigen Wissenschaften und sind die übrigen Wissenschaften mit der Mathematik verknüpft, ist diese doch ihre Sprache und ihr wesentliches Instrument. Eine Mathematik, die von den anderen Wissenschaften abgetrennt ist, verliert eine der wichtigsten Interessen- und Motivierungs-Quellen.
- 4. Induktiver Zugang und formale Beweise. Mathematisches Denken ist nicht einfach deduktives Überlegen, es besteht nicht bloß in formalen Beweisen. Jene geistigen Prozesse, die uns suggerieren, was bewiesen werden soll und wie es bewiesen werden kann, sind ebensosehr ein Bestandteil mathematischen Denkens wie der Beweis, der sich schließlich aus ihnen ergibt. Aus einer konkreten Situation den angemessenen Begriff herausschälen, auf der Grundlage beobachteter Fälle verallgemeinern, induktiv überlegen, analog überlegen, intuitive Gründe für eine allmählich Gestalt annehmende Vermutung finden, alles sind mathematische Denkweisen. Ja, ohne einige Erfahrung solcher »informeller« gedanklicher Prozesse kann der Schüler nicht die wahre Rolle formaler, strenger Beweise verstehen, je-

ne Rolle, die so treffend durch *Hadamard* beschrieben wurde: »Der Zweck mathematischer Strenge ist, die Eroberungen der Intuition zu billigen und zu legitimieren, und es hat für sie niemals einen anderen Zweck gegeben.«

Es gibt mehrere Niveaus der Strenge. Der Schüler sollte lernen, auf dem Niveau, das seiner Erfahrung und seinem Vorwissen entspricht, Beweise mit Verständnis aufzunehmen, sie selber zu finden und kritisch zu überprüfen. Drängt man ihn zu früh zu einem zu sehr formalen Niveau, so kann daraus Entmutigung und Abscheu entstehen. Überdies kann das Empfinden für Strenge viel besser an Beispielen erlernt werden, in denen der Beweis wirkliche Schwierigkeiten bewältigt, denn an Haarspaltereien oder endlosem Herumreiten auf Trivialem.

5. Genetische Methode. »In jedem Gebiet ist es für den Studenten von großem Vorteil, die Originalabhandlungen über das Gebiet zu lesen, denn Wissenschaft wird immer dann am vollständigsten assimiliert, wenn sie im Entstehen begriffen ist«, so schrieb James Clerk Maxwell. Es hat einige begnadete Lehrer gegeben, z. B. Ernst Mach, die zwecks Erläuterung einer Idee auf die Entstehungsgeschichte derselben zurückgriffen und die historische Bildung der Idee nachzeichneten. Dies mag ein allgemeines Prinzip nahelegen: Die beste Art, die geistige Entwicklung des einzelnen zu leiten, ist, ihn die geistige Entwicklung des Menschengeschlechts nachvollziehen zu lassen — die großen Linien der Entwicklung, natürlich nicht die tausend Irrtümer in Einzelheiten.

Dieses genetische Prinzip mag uns vor einer verbreiteten Verwechslung bewahren: Wenn A in einem gewissen System logisch vor B kommt, so kann es nichtsdestoweniger gerechtfertigt sein, im Unterricht B vor A durchzunehmen, besonders wenn in der Geschichte B vor A war. Im großen und ganzen können wir größeren Erfolg erwarten, wenn wir dem Folge leisten, was uns durch das genetische Prinzip nahegelegt wird, als wenn wir uns von der rein formalen Betrachtungsweise der Mathematik leiten lassen.

6. » Überlieferte« Mathematik. Der Mathematikunterricht in den elementaren und höheren Schulen ist weit hinter den heutigen Notwendigkeiten zurückgeblieben, und es ist höchst erforderlich, ihn wesentlich zu verbessern: wir erklären uns nachdrücklich mit dieser heute fast allgemein akzeptierten Meinung einverstanden. Doch die häufig gehörte Behauptung, daß die in den höheren Schulen unterrichteten Gegenstände überholt seien, sollte sehr genau überprüft werden; sie sollte nicht einfach ohne weiteres hingenommen werden. Elementare Algebra, ebene und räumliche Geometrie, Trigonometrie, analytische Geometrie und die Differential— und Integralrechnung sind immer noch von fundamentaler Bedeutung, wie sie es vor 50 oder 100 Jahren waren: zukünftige Benutzer der Mathematik müssen alle diese Gegenstände erlernen, bereiten sie sich nun darauf vor, Mathematiker, Physiker, Sozialwissenschaftler oder Ingenieure zu werden; und alle jene Gegenstände können dem allgemeinen Schüler kulturelle Werte schenken. Der traditionelle Unterrichtsstoff der höheren Schule umfaßt alle diese Gegenstände, mit Ausnahme der Differential— und Integralrechnung, in gewissem Maße; irgendeinen derselben fallenzulassen, wäre verhängnisvoll.

Was am heutigen Unterricht der höheren Schule schlecht ist, sind nicht so sehr die Gegenstände, denen er sich widmet, als die Isolierung der Mathematik von anderen Bereichen des Wissens und der Forschung, besonders von der Physik, und die Isolierung der verschie-

denen Unterrichtsgegenstände voneinander; selbst innerhalb des einzelnen mathematischen Gebiets erscheinen die Techniken und Sätze dem Schüler als isolierte, unzusammenhängende Tricks, und er bleibt im Dunkeln über die Ursprünge und den Zweck der Manipulierungen und Tatsachen, von denen man erwartet, daß er sie auswendig lerne. Und so passiert es unglücklicherweise häufig, daß der Unterrichsstoff als nutzlos und langweilig erscheint, außer vielleicht für die wenigen zukünftigen Mathematiker, die trotz des Lehrplans durchhalten mögen.

7. » Moderne« Mathematik. In Anbetracht des Mangels an Zusammenhang zwischen den verschiedenen Teilen des gegenwärtigen Unterrichtsprogramms mögen die Gruppen, die an der Ausarbeitung neuer Programme arbeiten, gut beraten sein, wenn sie bestrebt sind, vereinheitlichende allgemeine Terminologie und Begriffe einzuführen. Auch wir glauben, daß ein vernünftiger, angemessener Gebrauch von Mengen und von der Sprache und den Begriffen der »abstrakten« Algebra möglicherweise mehr Kohärenz und Einheitlichkeit in den Unterricht der höheren Schule bringen kann. Doch kann der Geist moderner Mathematik nicht gelehrt werden, indem man einfach ihre Terminologie wiederholt. Im Einklang mit unseren Grundsätzen wünschen wir, daß der Einführung neuer Ausdrucksweisen und Begriffe genügend »konkrete« Vorbereitung vorangehe und daß ihr echte, geistig anspruchsvolle Anwendungen folgen, nicht substanz— und witzloses Material: ein neuer Begriff muß motiviert und angewandt werden, wenn man einen intelligenten jungen Menschen davon überzeugen will, daß der Begriff seine Aufmerksamkeit verdient.

Wir können uns hier nicht auf eine detaillierte Analyse der vorgeschlagenen neuen Programme einlassen, aber so viel können wir nicht unausgesprochen lassen: Werden sie auf der Grundlage der oben formulierten Richtlinien (Abschnitte 1–5) beurteilt, so finden wir Punkte, mit denen wir nicht einverstanden sein können.

Natürlich haben nicht alle Mathematiker den gleichen Geschmack. Mathematik hat viele Gesichter. Man kann sie als ein Instrument ansehen, das uns hilft, die Welt um uns zu verstehen: vermutlich besaß Mathematik diesen Wert für Archimedes und Newton. Man kann Mathematik auch als ein Spiel mit willkürlichen Regeln betrachten, bei dem die hauptsächliche Rücksicht ist, sich an die Spielregeln zu halten: irgendeine derartige Ansicht mag für gewisse Grundlagenprobleme als angemessen erscheinen. Die Mathematik hat noch mehrere andere Gesichter, und ein beruflicher Mathematiker mag irgendeines derselben bevorzugen. Doch wenn es um den Unterricht geht, so ist die Auswahl nicht eine bloße Geschmacksache. Wir können von einem intelligenten jungen Menschen erwarten, daß er den Wunsch habe, die Welt um ihn zu erkunden, aber wir können nicht von ihm erwarten, daß er willkürliche Regeln lerne: warum gerade diese und nicht andere?

Auf jeden Fall wünschen wir den Arbeitern an den neuen Programmen von ganzem Herzen viel Erfolg. Es ist unser besonderer Wunsch, daß die neuen Programme besser den Zusammenhang zwischen Mathematik und der übrigen Wissenschaft widerspiegeln mögen und daß sie sorgfältig die Unterscheidung zwischen Dingen, die logisch vorgängig sind, und Dingen, die den Vortritt im Unterricht haben sollten, beachten. Nur auf diese Weise können wir hoffen, daß die grundlegenden Werte der Mathematik, ihr wahrhafter Sinn, Zweck und Nutzen, allen Schülern zugänglich gemacht werden — inbegriffen natürlich die zukünftigen

Mathematiker. Die kürzlich laut gewordene »verbreitete Sorge über eine Tendenz zu übertriebenem Nachdruck auf Abstraktheit im Unterricht der Mathematik an Ingenieure« weist in die gleiche Richtung⁹.

Lars V. Ahlfors, Harvard University Rudolph E. Langer, University of Wisconsin Harald M. Bacon, Stanford University C. M. Larsen, San Jose State College Clifford Bell, University of California, Los Angeles Peter D. Lax, New York University Walter Leighton, Western Reserve University Richard E. Bellman, Rand Corporation Lipman Bers, New York University Norman Levinson, Massachusetts Institute of Tech-Garrett Birkhoff, Harvard University Hans Lewy, University of California, Berkelev R. P. Boas, Northwestern University Alfred T. Brauer, University of North Carolina W. Robert Mann, University of North Carolina Richard Brauer, Harvard University M. H. Martin, University of Maryland Jack R. Britton, University of Colorado Deane Montgomery, Institute for Advanced Study R. Creighton Buck, University of Wisconsin Marston Morse, Institut for Advanced Study George F. Carrier, Harvard University Zeev Nehari, Carnegie Institute of Technology Hirsh Cohen, International Business Machines Corp. Jerzy Neyman, University of California, Berkeley Richard Courant, New York University Frederick V. Pohle, Adelphi College H. S. M. Coxeter, University of Toronto H. O. Pollack, Bell Telephone Laboratories Dan T. Dawson, Stanford University George Pólya, Stanford University Hillel Poritsky, General Electric Company Avron Douglis, University of Maryland Arthur Erdélyi, California Institute of Technology William Prager, Brown University Walter Freiberger, Brown University Murray H. Protter, University of California, Berkeley K. O. Friedrichs, New York University Tibor Rado, Ohio State University Paul R. Garabedian, New York University Warwick W. Sawyer, Wesleyan University David Gilbarg, Stanford University Max M. Schiffer, Stanford University Sydney Goldstein, Harvard University James B. Serrin, University of Minnesota Herman Goldstine, International Business Machines Lehi T. Smith, Arizona State University I. S. Sokolnikoff, University of California, Los Ange-Herbert Greenberg, International Business Machines Eli Sternberg, Brown University Corp. John D. Hancock, Alameda State College J. J. Stocker, New York University Charles A. Hutchinson, University of Colorado A. H. Taub, University of Illinois Mark Kac, Rockefeller Institute Clifford E. Truesdell, Johns Hopkins University Wilfred Kaplan, University of Michigan Robert J. Walker, Institut for Defense Analysis and Aubrey J. Kempner, University of Colorado Cornell University Lucien B. Kinney, Stanford University Wolfgang Wasow, University of Wisconsin Morris Kline, New York University André Weil. Institute for Advanced Study Ignace I. Kolodner, University of New Mexico Alexander Wittenberg, Laval University

⁹First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mcchanics Curricula (Erste Sommer-Studien-Gruppe für die Lehrpläne in theoretischer und angewandter Mechanik), Boulder, Colorado, Juni 1961.