Blatt 1

Aufgabe 1 $X = U \cup V$

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m(X) \longrightarrow \mathbb{G}_m(U) \times \mathbb{G}_m(V) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}_m(U \cap V)$$

$$a \longmapsto (a|_U, a|_V)$$

$$(b, c) \longmapsto b|_{U\cap V} \cdot c^{-1}|_{U \cap V}$$

ist exakt nach Garbenaxiom

coker φ ?

Der alternierende Čechkomplex für die Überdeckung (U, V) von X

ist $0 \to \mathbb{G}_m(U) \times \mathbb{G}_m(V) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}_m(U \cap V) \longrightarrow 0$ ← keine Dreifachschnitte existieren

$$\underset{\check{C}^0((U,V), \mathbb{G}_m)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{G}_m(U)\times\mathbb{G}_m(V)}} \qquad \underset{\check{C}^1((U,V), \mathbb{G}_m)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{G}_m(U\cap V)}}$$

$\Rightarrow$ coker $\varphi = \check{H}^1((U,V), \mathbb{G}_m)$.

$$\operatorname{Pic} X \xrightarrow{\psi} \operatorname{Pic} U \times \operatorname{Pic} V \xrightarrow{\omega} \operatorname{Pic}(U \cap V)$$

$$\mathcal{L} \longmapsto (\mathcal{L}|_U, \mathcal{L}|_V)$$

$$(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \longmapsto \mathcal{L}|_{U\cap V} \otimes \mathcal{M}^\vee|_{U \cap V}$$

ist exakt:

$$\omega(\psi(\mathcal{L})) = \omega(\mathcal{L}|_U, \mathcal{L}|_V) = \mathcal{L}|_{U\cap V} \otimes \mathcal{L}|_{U\cap V}^\vee \cong \mathcal{O}_{U\cap V}$$

$$(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \in \ker \omega \Rightarrow \mathcal{L}|_{U\cap V} \otimes \mathcal{M}^\vee|_{U\cap V} \cong \mathcal{O}_{U\cap V} \Rightarrow \mathcal{L}|_{U\cap V} \overset{\alpha}{\cong} \mathcal{M}|_{U\cap V}$$

Verkleben entlang α gibt $\mathcal{N} \in \operatorname{Pic} X$ mit $\mathcal{N}|_U \cong \mathcal{L}$, $\mathcal{N}|_V \cong \mathcal{M}$.

$$\ker \psi = \{\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X : \mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U,\ \mathcal{L}|_V \cong \mathcal{O}_V\} = \operatorname{Pic}(X, (U,V))$$

Also $\operatorname{coker}\varphi = \check{H}^1((U,V),\mathbb{G}_m) \xrightarrow[\delta]{\sim} \operatorname{Pic}(X,(U,V)) = \ker\psi$

nach Vorlesung. Zusammensetzen der Sequenzen gibt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m(X) \arrow[r] & \mathbb{G}_m(U)\times\mathbb{G}_m(V) \arrow[r] & \mathbb{G}_m(U\cap V) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & \operatorname{Pic}X \arrow[r] & \operatorname{Pic}U\times\operatorname{Pic}V \arrow[r] & \operatorname{Pic}(U\cap V) \\
 & & & & \operatorname{Pic}(X,(U,V)) \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "2"] \arrow[dr] & & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 $\mathcal{L}\in\operatorname{Pic}X = \bigcup_{\underline{U}\,\mathrm{cov}\,X}\operatorname{Pic}(X,\underline{U}) \;\hat{=}\; \bigcup_{\underline{U}\,\mathrm{cov}\,X}\check{H}^1((U,V),\mathbb{G}_m)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ wird von einem Čech-1-Kozykel $(a_{ij}\in\mathbb{G}_m(U_i\cap U_j))_{i,j\in I}$

dargestellt für eine offene Überdeckung $\underline{U}=(U_i)_{i\in I}$.

$\mathcal{L}$ ist Verklebung der $\mathcal{O}_{U_i}$ entlang der a_{ij}.

Sei $V=\operatorname{Spec}R\subseteq U_i\cap U_j$ affin-offen. $\rightsquigarrow$ $\mathcal{L}(V)=R \xrightarrow[\cdot a_{ij}|_V]{\sim} R=\mathcal{L}(U)$

Für $\mathcal{L}^{\otimes p}$ hat man dort:

$$\begin{tikzcd}
b_1\otimes\ldots\otimes b_p \arrow[d, mapsto] & \mathcal{L}^{\otimes p}(V)=R^{\otimes p} \arrow[r, "\sim"', "\cdot a_{ij}|_V\otimes\ldots\otimes a_{ij}|_V"] \arrow[d, "\sim"'] & R^{\otimes p}=\mathcal{L}^{\otimes p}(V) \arrow[d, "\sim"] & b_1\otimes\ldots\otimes b_p \arrow[d, mapsto] \\
b_1\cdot\ldots\cdot b_p & R \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & R & b_1\cdot\ldots\cdot b_p
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ α ist Multiplikation mit $a_{ij}^p|_V$

Affin-offene bilden Basis von $U_i\cap U_j$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{L}^{\otimes p}$ entsteht aus den $\mathcal{O}_{U_i}$ durch Verklebung entlang der a_{ij}^p

Für $F^*\mathcal{L}$:

R-Mod-Struktur gegeben durch Multiplikation auf der Linken mit Frob getwisteten Seite

$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{L}(V) = R \otimes_{F,R} R \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\alpha_{ij}|_V", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] & R \otimes_{F,R} R = F^*\mathcal{L}(V) \arrow[d, "\sim"] \\
R \arrow[r, "\sim", "\beta"'] & R
\end{tikzcd}$$

$a\otimes b \mapsto ab^p$ $\qquad$ $a\otimes b \mapsto ab^p$

$\Rightarrow$ β ist Multiplikation mit $\alpha_{ij}^p|_V$. Wie oben ist $F^*\mathcal{L}$ Verklebung der $\mathcal{O}_{U_i}$ entlang der α_{ij}^p.

$$\Rightarrow F^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{\otimes p}$$

<u>Aufgabe 3</u> $X^{an} := X(\mathbb{C})$ mit analytischer Topologie

1. $(\mathbb{A}^n)^{an} = \mathbb{C}^n$ als Menge ist bekannt.

$(\mathbb{A}^n)^{an}$ hat Subbasis $\{ f^{-1}(W) : W \subseteq \mathbb{C} \text{ offen},\ U \subseteq X \text{ offen},\ f \in \mathcal{O}_X(U) \}$

Sei $f^{-1}(W)$ ein Subbasiselement. $U = \bigcup_i D_{g_i}$, $g_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

$U(\mathbb{C}) = \bigcup_i D_{g_i}(\mathbb{C}) = \bigcup_i \{ z \in \mathbb{C}^n : g(z) \neq 0 \} \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, da Polynome stetig sind.

$f \in \mathcal{O}_X(U) \underset{\mathbb{A}^n \text{ integer}}{\subseteq} \mathcal{A}^n_\eta = \mathbb{C}(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow f = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $q \neq 0$ auf $U(\mathbb{C})$. Rationale Funktionen sind stetig $\Rightarrow f$ stetig auf $U(\mathbb{C}) \Rightarrow f^{-1}(W) \subseteq U(\mathbb{C})$ offen, also auch $f^{-1}(W) \subseteq \mathbb{C}^n$ offen.

$\mathbb{C}^n$ hat Subbasis $\{\pi_k^{-1}(W) = \mathbb{C}\times\_\times \underset{\uparrow k}{W} \times\_\times \mathbb{C} : W \subseteq \mathbb{C} \text{ offen}, 1 \leq k \leq n\}$

Solche Mengen sind offen in $(\mathbb{A}^n)^{an}$, denn $\pi_k^{-1}(W) = X_k^{-1}(W)$, $X_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{C}[X_1,\_,X_n]$.

2. $X \xrightarrow{g} Y$. Für $U \subseteq Y$ offen ist $g^{-1}(U) \subseteq X$ offen, also

$$g^{-1}(U(\mathbb{C})) = X(\mathbb{C}) \underset{Y(\mathbb{C})}{\times} U(\mathbb{C}) = (X \underset{Y}{\times} U)(\mathbb{C}) = (g^{-1}(U))(\mathbb{C})$$

offen in X^{an}. Für $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, $W \subseteq \mathbb{C}$ offen und $x \in g^{-1}(U)(\mathbb{C})$ gilt:

$$x \in g^{-1}(f^{-1}(W)) = (f\circ g)^{-1}(W) \iff W \ni f(g(x)) = g^{b}(f)(x)$$

$$\iff x \in \underbrace{g^{\#}(f)}_{\in g_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(g^{-1}(U))}{}^{-1}(W)$$

Also ist $g^{-1}(f^{-1}(W)) = g^{\#}(f)^{-1}(W)$ offen in X^{an}.

3. $X^{an} \to Y^{an}$ ist stetig nach 3.2. Für $\mathbb{C}$-Schemata ist

$$X(\mathbb{C}) = \{(x,i) : x \in |X|, i : \mathcal{K}(x) \hookrightarrow \mathbb{C}\} \cong \{x \in |X| : \mathcal{K}(x) = \mathbb{C}\}.$$

Für Einbettungen $X \to Y$ ist $|X| \to |Y|$ injektiv, also auch $X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$.

(a) $j : X \hookrightarrow Y$ offene Einbettung. $U \subseteq X$ offen, $W \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Dann ist auch $j(U) \subseteq Y$ offen, also $j(U(\mathbb{C})) = j(U)(\mathbb{C})$ offen in Y^{an}.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \cong & \mathcal{O}_Y(j(U)) \\ \Psi & & \Psi \\ f & \hat{=} & \tilde{f} \end{array}$$

$$f^{-1}(W) = (j^{\#}(\tilde{f}))^{-1}(W) = (\tilde{f}\circ j)^{-1}(W) = j^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W))$$

$\Rightarrow j(f^{-1}(W)) = j(j^{-1}(\tilde{f}^{-1}(W))) = \tilde{f}^{-1}(W) \cap j(X) = \tilde{f}^{-1}(W)$

ist offen in Y^{an}.

Also ist $j: X^{an} \longrightarrow Y^{an}$ injektiv, stetig offen, also eine offene Einbettung.

(b) Sei $\iota: X \hookrightarrow Y$ abgeschlossene Einbettung.

Überdecke Y affin-offen. Nach (a) tragen die $?^{an}$ der Überdeckungsmengen die Spurtopologie. Abgeschlossene Einbettung kann man gut auf einer offenen Überdeckung prüfen. Also oBdA $Y = \operatorname{Spec} A$.

$\rightsquigarrow X = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \leq A$.

Sei $U \subseteq X$ offen, $W \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\bar{f} \in \mathcal{O}_X(U)$. Schreibe $U = \bigcup_i D_{\bar{g}_i}$, $\bar{g}_i \in A/\mathfrak{a}$. Dann ist:

$\iota(\bar{f}^{-1}(W)) = \iota(\bigcup_i (\bar{f}^{-1}(W) \cap D_{\bar{g}_i})) = \iota(\bigcup_i \bar{f}|_{D_{\bar{g}_i}}^{-1}(W))$

$= \bigcup_i \iota(\bar{f}|_{D_{\bar{g}_i}}^{-1}(W))$ offen im Bild von ι, sofern alle $\iota(\bar{f}|_{D_{\bar{g}_i}}(W))$ es sind. $\rightsquigarrow$ oBdA $U = D_{\bar{g}}$, $\bar{g} \in A/\mathfrak{a}$.

Dann ist $\bar{f} \in \mathcal{O}_X(D_{\bar{g}}) = (A/\mathfrak{a})_{\bar{g}} \cong A_g/\mathfrak{a}_g$, wobei $g \in A$ ein Lift von $\bar{g}$ ist. Sei $f \in A_g$ ein Lift von f.

$\iota^{-1}(D_g(\mathbb{C})) = \iota^{-1}(D_g)(\mathbb{C}) = D_{\iota^\#(g)}(\mathbb{C}) = D_{\bar{g}}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \iota(D_{\bar{g}}(\mathbb{C})) = \iota(\iota^{-1}(D_g(\mathbb{C}))) = D_g(\mathbb{C}) \cap \operatorname{im} \iota$ ist offen in $\operatorname{im} \iota$.

$$\iota^{-1}(f^{-1}(W)) \overset{\text{wie}}{\underset{\text{oben}}{=}} (\iota^{\#}(f))^{-1}(W) = \tilde{f}^{-1}(W)$$

$$\Rightarrow \iota(\tilde{f}^{-1}(W)) = \iota(\iota^{-1}(f^{-1}(W))) = f^{-1}(W) \cap \operatorname{im} \iota$$ ist offen in $\operatorname{im} \iota$.

$\Rightarrow X^{an} \xrightarrow{\iota} \operatorname{im} \iota$ ist offen, also ist $\iota : X^{an} \to Y^{an}$ eine Einbettung.

Sei $U := Y \setminus \operatorname{im}(\iota : |X| \to |Y|)$. Das ist ein offenes Unterschema von Y. $\to U(\mathbb{C})$ ist offen in Y^{an}.

$\Rightarrow \operatorname{im}(\iota : X^{an} \to Y^{an}) = Y^{an} \setminus U(\mathbb{C})$ ist abgeschlossen.

$\Rightarrow \iota : X^{an} \to Y^{an}$ ist abgeschlossene Einbettung.

4.
- Auf $(\mathbb{A}^n)^{an}$ ist die Topologie durch 3.1 festgelegt.
- Für X affin gibt es $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. Nach 3.3 muss X^{an} die Spurtopologie tragen.
- Für X beliebig wähle affin-offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$. Auf den U_i ist die Topologie nach oben festgelegt. Damit auch auf X.

Aufgabe 4 1. Wähle affin-offene Überdeckungen $X = \bigcup_i U_i$, $Y = \bigcup_j V_j$

$\Rightarrow (U_i^{an} \times V_j^{an})_{i,j}$ ist offene Überdeckung für beide Topologien.

Vergleiche die Topologien darauf $\rightsquigarrow$ OBdA $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ affin.

Sei $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$, $B = \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_m]/\mathfrak{b}$.

$$\Rightarrow X \times_{\mathbb{C}} Y = \operatorname{Spec} A \otimes_{\mathbb{C}} B = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m] / (\mathfrak{a} \otimes B + A \otimes \mathfrak{b})$$

Als Mengen ist $(X \times_{\mathbb{C}} Y)(\mathbb{C}) = X(\mathbb{C}) \times Y(\mathbb{C})$.

$X^{an} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ und $Y^{an} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ tragen beide die Spurtopologie,

$X^{an} \times Y^{an}$ dann die Produkttopologie. Insgesamt gilt das die gröbste

Topologie, für die die Kompositionen $X^{an} \times Y^{an} \to X^{an} \to \mathbb{C}^n$ und

$X^{an} \times Y^{an} \to Y^{an} \to \mathbb{C}^m$ stetig ist.

$(X \times_{\mathbb{C}} Y)^{an} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ nach der Tensorproduktrechnung,

$\rightsquigarrow (X \times_{\mathbb{C}} Y)^{an}$ trägt von $\mathbb{C}^{n+m}$ induzierte Spurtopologie.

$\mathbb{C}^{n+m} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ trägt Produkttopologie

$\rightsquigarrow$ Insgesamt trägt $(X \times_{\mathbb{C}} Y)^{an}$ die gröbste Topologie, für die

$(X \times_{\mathbb{C}} Y)^{an} \to \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ und $(X \times_{\mathbb{C}} Y)^{an} \to \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^m$

stetig sind. Das sind die gleichen Abbildungen wie oben für

$X^{an} \times Y^{an}$. $\Rightarrow X^{an} \times Y^{an} = (X \times_{\mathbb{C}} Y)^{an}$.

2. $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ separiert $\Rightarrow X \xrightarrow{\Delta} X \times_{\mathbb{C}} X$ abg. Immersion

$\overset{3.3}{\Rightarrow} X^{an} \xrightarrow{\Delta} (X \times_{\mathbb{C}} X)^{an} \overset{4.1}{=} X^{an} \times X^{an}$ abg. Immersion.

Insbesondere ist das Bild $\{(x,x) \in X^{an} \times X^{an}\}$ abgeschlossen

$\Rightarrow X^{an}$ hausdorffsch.

3. • Wenn $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$: X^{an} hausdorffsch nach 4.2.

$X(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Standardüberdeckung $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} D^+_{T_i} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $0 \le i \le n$

ergibt zusammen $(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})^{\sqcup(n+1)} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

n+1-fache disjunkte Vereinigung

$\rightsquigarrow \left(\overline{B}_{1,\mathbb{C}}^n\right)^{\sqcup(n+1)} \hookrightarrow (\mathbb{C}^n)^{\sqcup(n+1)} \longrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$

$\overline{B}_{1,\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

Das ist surjektiv: Sei $z = (z_0 : \_ : z_n) \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Wähle $0 \leq k \leq n$ mit $|z_k|$ maximal. Dann ist $z_k \neq 0$ und

$$\left(\frac{z_0}{z_k}, \_, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \_, \frac{z_n}{z_k}\right) \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_k} : \_ : 1 : \_ : \frac{z_n}{z_k}\right)$$

aus $\sqcup$-Komponente Nummer k

alle $|\cdot| \leq 1$.

k

$\left(\overline{B}_{1,\mathbb{C}}^n\right)^{\sqcup(n+1)}$ quasikompakt $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ quasikompakt, damit kompakt.

- X beliebig. Wähle $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. 3.2 liefert $X^{an} \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$, also X^{an} kompakt.

4. Chow liefert $X' \xrightarrow{f} X$ surjektiv mit $X' \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ projektiv. Nach 4.3 ist $(X')^{an}$ kompakt. Es ist $(X')^{an} \to X^{an}$ surj. Also ist X^{an} surjektives Bild eines kompakten Raums $\to$ X^{an} quasikompakt. Hausdorffsch nach 4.2 $\rightsquigarrow$ X^{an} kompakt.