Blatt 2

Aufgabe 1

1. • Isomorphismen

Ein Isomorphismus $V \to U$ in $\mathcal{C}$ ist insbesondere surjektiv. $(V \to U)$ nur 1-co morphismus.

$\rightarrow (V \to U) \in \tau_0$

• Komposition

Sei $(U_i \to U)_{i\in I} \in \tau_0$ und $(V_{ij} \to U_i)_{j \in J_i} \in \tau_0$ für $i \in I$.

$$\Rightarrow U = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} V_{ij} = \bigcup_{j \in \coprod_{i\in I} J_i} V_{ij}$$

mit $\coprod_{i\in I} J_i$ endlich als endliche Vereinigung endlicher Mengen.

$$\Rightarrow (V_{ij} \to U_i \to U)_{j \in \coprod_{i\in I} J_i} \in \tau_0$$

• Basiswechsel

Sei $(U_i \to U)_{i\in I} \in \tau_0$ und $V \to U$ in $\mathcal{C}$.

$V \times_U U_i = V \cap U_i \in \mathcal{C}$ existiert

$$V \cap U = V \cap \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (V \cap U_i) \text{ und } I \text{ endlich}$$

$$\Rightarrow (V \cap U_i \to V)_{i \in I} \in \tau_0.$$

2. Sei $\mathcal{F} \in Sh(\mathcal{C}_\tau)$. Dann ist $\mathcal{F} \in PSh(\mathcal{C})$ und für $(U_i \to U)_{i \in I} \in \tau$ ist $\mathcal{F}(U) = eq\left(\prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)\right)$

Wegen $\tau_0 \subseteq \tau$ gilt das insbesondere für $(U_i \to U)_{i \in I} \in \tau_0$

$\Rightarrow \mathcal{F} \in Sh(\mathcal{C}_{\tau_0})$

3. Sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}^b_{\mathbb{R}} = (U \longmapsto \{U \to \mathbb{R} \text{ stetig, beschränkt}\})$ ist τ_0-Garbe: Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit I endlich und $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Verkleben gibt $f: U \to \mathbb{R}$ stetig mit $f|_{U_i} = f_i$.

f beschränkt, denn $\|f\|_\infty = \max_{i \in I} \|f_i\|_\infty < \infty$, da I endlich.

$\to f \in \mathcal{F}(U)$. Also $\mathcal{F} \in Sh(\mathcal{C}_{\tau_0})$.

Aber $\mathcal{F} \notin Sh(\mathcal{C}_\tau)$:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n, \quad U_n = (n-1, n+1), \qquad f_n : U_n \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto x \quad \text{stetig, beschränkt.}$$

$\Rightarrow f_n \in \mathcal{F}(U_n)$.

Aber es gibt kein $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ mit $f|_{U_n} = f_n$. Denn müsste $f = id_{\mathbb{R}}$ sein, das ist aber nicht beschränkt.

4. Beh: $Sh(\mathcal{C}_\tau) = Sh(\mathcal{C}_{\tau_0}) \iff X$ noethersch.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $\mathcal{F} \in PSh(\mathcal{C})$, $\mathcal{F}(U) = \{U \to \mathbb{N}_0 \text{ beschränkt}\}$

muss nicht stetig sein.

Analog zu oben: $\mathcal{F} \in Sh(\mathcal{C}_{\tau_0}) \Rightarrow \mathcal{F} \in Sh(\mathcal{C}_\tau)$.

Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aufsteigende Folge von offenen Mengen und $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} U_n$. Definiere $f_n : U_n \to \mathbb{N}_0$,

$$x \longmapsto \min\{m \in \mathbb{N}_0 : x \in U_m\}$$

f_n beschränkt, denn $f_n(x) \leq n \ \forall x \in U_n$.

Also $f_n \in \mathcal{F}(U_n)$, außerdem $f_n|_{U_n \cap U_m} = f_n|_{U_m} = f_m = f_m|_{U_m}$ für $n \leq m$. $\mathcal{F} \in Sh(\mathcal{C}_\tau) \Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}(U) : f|_{U_n} = f_n$.

$f : U \to \mathbb{N}_0$ beschränkt $\Rightarrow f(x) \leq M \ \forall x \in U$.

$\Rightarrow \forall x \in U : x \in U_M \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} U_n = U_M$, also wird $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ stationär.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei $\mathcal{F} \in Sh(\mathcal{C}_{\tau_0})$, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für $i \in I$

mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$.

X noethersch $\Rightarrow U$ quasikompakt $\Rightarrow \exists I_0 \subseteq I$ endlich, $\bigcup_{i\in I_0} U_i = U$.

$\Rightarrow (U_i \to U)_{i\in I_0} \in \mathcal{T}_0$

Also gibt es $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ für $i \in I_0$

Für $i \in I$ ist $(U_i \cap U_j \to U_i)_{j \in I_0} \in \tau_0$ und für alle $j \in I_0$ gilt:

$$s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j}$$

$$\overset{\mathcal{F} \text{ ist}}{\underset{\tau_0\text{-Garbe}}{\Rightarrow}} \quad s|_{U_i} = s_i \qquad \text{für alle } i \in I.$$

Also $\mathcal{F}$ τ-Garbe.

<u>Aufgabe 2</u>

1. X, U lokal faktoriell

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Pic} X & \longrightarrow & \operatorname{Pic} U \\
\wr\| & & \wr\| \\
\operatorname{Cl} X & & \operatorname{Cl} U \\
\| & & \| \\
\bigoplus_{x \in X^1} \mathbb{Z}x / \operatorname{div} K^\times & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in U^1} \mathbb{Z}x / \operatorname{div} K^\times \\
\overline{x} & \longmapsto & \begin{cases} \overline{x} & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}
\end{array}$$

$K = \mathcal{O}_{X,\eta} = \mathcal{O}_{U,\eta}$

$\operatorname{Cl} U$ erzeugt von $\overline{x}$, $x \in U^1 = X^1 \cap U$. Wird getroffen von $\overline{x} \in \operatorname{Cl} X$. $\rightsquigarrow$ surjektiv

2. X noethersch $\Rightarrow$ $X \setminus U$ noethersch

$\Rightarrow A = X \setminus U$ nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Sei $x \in X^1 \setminus U$. $\Rightarrow$ $\overline{x} \subseteq X$ hat Kodimension 1

und $\overline{x} \subseteq A$.

Beh: $\overline{x}$ ist irreduzible Komponente von A.

abgeschlossen + irreduzibel: ✓

Sei $\overline{x} \subseteq B \subseteq A$ mit B abgeschlossen, irreduzibel

$\Rightarrow$ $\overline{x} \subset B \subset X$ alle irreduzibel, abgeschlossen in X

$\operatorname{codim} \overline{x} = 1$ $\Rightarrow$ $B = \overline{x}$ $\vee$ $\underbrace{B = X}$

$\Rightarrow A = X, U = \emptyset$ ↯

Also $\overline{x}$ maximal irreduzibel abgeschlossen in A.

$\Rightarrow$ x ist der generische Punkt einer der endlich vielen irreduziblen Komponenten von A.

Also $X^1 \setminus U$ endlich, $X^1 \setminus U = \{x_1, \dots, x_r\}$

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\varphi} Cl\,X \xrightarrow{\psi} Cl\,U \longrightarrow 0$$

$$e_i \longmapsto x_i + \operatorname{div} K^\times \longmapsto 0$$

Sei $D \in \ker \psi$.

$$D = \sum_{x \in U^1} n_x x + \sum_{i=1}^{r} n_i x_i + \operatorname{div} K^\times,$$

$$0 = \psi(D) = \sum_{x \in U^1} n_x x + \operatorname{div} K^\times \Rightarrow \exists f \in K^\times : \sum_{x \in U^1} n_x x = \operatorname{div} f$$

$$\Rightarrow D = \sum_{i=1}^{r} n_i x_i + \mathrm{div}\, k^\times = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{r} n_i e_i\Big)$$

3. $U = \mathbb{P}^n_k \setminus V^+(f)$, $\quad f \in k[T_0, \dots, T_n]_d$ irreduzibel

$V^+(f)$ irreduzibel mit generischem Punkt x.

$\Rightarrow X^1 \setminus U = \{x\}$.

$$2.2 \Rightarrow \operatorname{Pic} U = \operatorname{coker}(\mathbb{Z} \to \operatorname{Pic} \mathbb{P}^n_k) \cong \operatorname{coker}\big(\mathbb{Z} \xrightarrow{1 \mapsto \bar{x}} \operatorname{Cl} \mathbb{P}^n_k\big), \qquad \operatorname{Cl} \mathbb{P}^n_k \xrightarrow[\sim]{\deg} \mathbb{Z}$$

$$\cong \operatorname{coker}\big(\mathbb{Z} \xrightarrow{1 \mapsto \deg f} \mathbb{Z}\big) = \mathbb{Z}/(\deg f) = \mathbb{Z}/d$$

Aufgabe 3

1. Seien v, vu formal étale.

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"'] & X \arrow[d, "u"] \\
\overline{T} \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, s"] \arrow[dr, bend right, "vg"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

mit z Nilimmersion.

z Nilimmersion, vu formal étale

$\Rightarrow \exists s : \overline{T} \to X$, $sz = f$, $vus = vg$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d, "z"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
\overline{T} \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "us"] \arrow[ur, shift right, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

z Nilimmersion, v formal étale,

$vg = vus$, $\quad gz = uf = usz$

$\Rightarrow us = g$

Also kommutiert

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"'] & X \arrow[d, "u"] \\ \overline{T} \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Damit u formal glatt.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"'] & X \arrow[d, "u"] \\ \overline{T} \arrow[ur, bend left, "s"] \arrow[ur, bend right, "s'"'] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

mit zwei Lifts.

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"'] & X \arrow[d, "vu"] \\ \overline{T} \arrow[ur, bend left, "s"] \arrow[ur, bend right, "s'"'] \arrow[r, "vg"'] & Z \end{tikzcd}$$

mit zwei Lifts.

vu formal étale, z Nilimmersion

$\Rightarrow s = s'$.

Also vu auch formal unverzweigt.

Jetzt v, vu étale, also formal étale + lokal endlich präsentiert

$\overset{\text{oben}}{\Rightarrow}$ u formal étale

Ad lokal endlich präsentiert: lokal kommt $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$

von $R \longrightarrow S \longrightarrow A$ mit A, S endlich präsentiert $/R$.

Schreibe $A = R[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_m)$,

$S = R[Y_1, \dots, Y_k]/(g_1, \dots, g_l)$

Sei $h_i \in R[\underline{X}]$ mit $\overline{h}_i \in A$ dem Bild von $Y_i \in S$.

$$S[\underline{X}]/(\underline{f}, \underline{\overline{Y}-h}) = R[\underline{X},\underline{Y}]/(\underline{f}, \underline{\overline{Y}-h}, \underline{g})$$

$$= R[\underline{X}]/(\underline{f}, \underline{g(h_1,\ldots,h_k)})$$

$$= (R[\underline{X}]/(\underline{f}))/(\underline{g(\overline{h}_1,\ldots,\overline{h}_k)})$$

$$= A/(\underline{g(\overline{Y}_1,\ldots,\overline{Y}_k)}) = A/0 = A$$

in S aufgefasst

Also A endlich präsentiert über S. Damit v lokal von endlicher Präsentation. $\Rightarrow v$ étale

2. Isomorphismen

$\alpha : V \xrightarrow{\sim} U$ in $\acute{E}t(X)$. $\Rightarrow U = \alpha(V)$,

also $(V \xrightarrow{\alpha} U)$ Überdeckung

Komposition

$(U_i \xrightarrow{\alpha_i} U)_{i\in I}$ Überdeckung und $(V_{ij} \xrightarrow{\beta_{ij}} U_i)_{j\in J_i}$ Überdeckung für $i \in I$.

$$\Rightarrow U = \bigcup_{i\in I} \alpha_i(U_i) = \bigcup_{i\in I} \alpha_i\Big(\bigcup_{j\in J_i} \beta_{ij}(V_{ij})\Big)$$

$$= \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} \alpha_i(\beta_{ij}(V_{ij})) = \bigcup_{j\in \coprod_{i\in I} J_i} (\alpha_i\circ\beta_{ij})(V_{ij})$$

$\Rightarrow (\alpha_i \circ \beta_{ij})_{j \in \bigsqcup_{i \in I} J_i}$ Überdeckung.

Basiswechsel

$(U_i \xrightarrow{\alpha_i} U)_{i \in I}$ Überdeckung, $V \xrightarrow{f} U$ Morphismus

in $\acute{E}t(X)$, also étale nach 3.1.

Damit auch Basiswechsel $V \times_U U_i \xrightarrow{\beta_i} U_i$ étale.

Da U_i étale über X, ist $V \times_U U_i \in \acute{E}t(X)$.

$V \times_U U_i$ ist offensichtlich Faserprodukt von V und U_i über U

in $\acute{E}t(X)$. Zeige noch, dass $(V \times_U U_i \xrightarrow{\beta_i} V)_{i \in I}$ surjektiv ist.

Sei $x \in |V|$.

$\beta_i^{-1}(x) = |\operatorname{Spec} k(x) \times_V (V \times_U U_i)| = |\operatorname{Spec} k(x) {}_f\!\times_U U_i|$

$= \underbrace{\alpha_i^{-1}(f(x))}_{\text{Basiswechsel zu } k(f(x))} \neq \emptyset$ für ein $i \in I$, da ja

$(U_i \xrightarrow{\alpha_i} U)_{i \in I}$ surjektiv ist.

Aufgabe 4

1. Sei $(U_i \xrightarrow{\alpha_i} U)_{i \in I}$ eine Überdeckung und $X \in \mathcal{C}$.

Sei $f_i \in h_X(U_i) = \operatorname{Hom}_G(U_i, X)$ für $i \in I$ mit

$f_i|_{U_i \times_U U_j} = f_j|_{U_i \times_U U_j}$.

Sei $u \in U$. Wegen $U = \bigcup_{i \in I} \alpha_i(U_i)$ gibt es $i \in I$ und

$v \in U_i$ mit $\alpha_i(v) = u$. Ist außerdem $i' \in I$ und $v' \in U_{i'}$ mit $\alpha_{i'}(v') = u$, so ist $(v, v') \in U_i \times_U U_{i'}$

$$f_i(v) = (f_i \circ \pi_1)(v, v') = f_i|_{U_i \times_U U_{i'}}(v, v') = f_{i'}|_{U_i \times_U U_{i'}}(v, v')$$
$$= (f_{i'} \circ \pi_2)(v, v') = f_{i'}(v')$$

Also ist $f_i(v)$ unabhängig von der Wahl von i und v.

Definiere $f(u)$ als $f_i(v)$. $\rightsquigarrow f : U \to X$

Sei $g \in G$ und $u \in U$. Wähle i, v mit $\alpha_i(v) = u$.

$\Rightarrow gv \in U_i$ mit $\alpha_i(gv) = g \cdot \alpha_i(v) = gu$

$\Rightarrow f(gu) = f_i(gv) = g \cdot f_i(v) = g \cdot f(u)$

also $f \in \mathrm{Hom}_G(U, X) = h_X(U)$

Nach Konstruktion ist $f|_{U_i} = f \circ \alpha_i = f_i$.

Eindeutigkeit von f folgt aus

$f(u) = f(\alpha_i(v)) = f_i(v)$, wenn $u = \alpha_i(v)$.

2. Für ein $f : U \to V$ in $\mathcal{C}$, $v \in V$ schreibe

f^*_v für $v|_U = \mathcal{F}(f)(v)$.

G operiert auf $\mathcal{F}(G)$ via

$$G \times \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G), \quad g \cdot x := \rho_g^* x$$

Gruppenoperation:

$$e \bullet x = \rho_e^* x = id_G^* x = x$$

$$g \bullet (h \bullet x) = \rho_g^* (\rho_h^* x) = (\rho_h \circ \rho_g)^* x = \rho_{gh}^* x = gh \bullet x$$

3. $h_X(G) = \mathrm{Hom}_G(G, X) \xrightarrow{\varphi} X$

$$f \longmapsto f(e)$$

φ äquivariant: $\varphi(g \cdot f) = \varphi(\rho_g^* f) = \varphi(f \circ \rho_g) = f(\rho_g(e))$

$$= f(g) = g \cdot f(e) = g\varphi(f)$$

φ injektiv:

Sei $\varphi(f) = \varphi(f')$. Für $g \in G$ gilt:

$$f(g) = g \cdot f(e) = g \cdot \varphi(f) = g \cdot \varphi(f') = g \cdot f'(e) = f'(g)$$

$\rightsquigarrow f = f'$

φ surjektiv:

$x \in X$. Definiere $f: G \to X$, $g \longmapsto gx$

f äquivariant: $f(h \cdot g) = hgx = h \cdot f(g)$

$\varphi(f) = f(e) = ex = x$

4. Wenn $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$, dann ist $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(U)$ für alle U, insbesondere für $U = G$.

Sei jetzt $\mathcal{F}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(G)$ und $U \in \mathcal{C}$.

Für $u \in U$ ist $\alpha_u : G \longrightarrow U$, $g \longmapsto gu$ G-äquivariant (s.o.)

$\left(G \xrightarrow{\alpha_u} U\right)_{u \in U}$ ist eine Überdeckung, denn für $u \in U$ ist $u = eu = \alpha_u(e) \in \alpha_u(G)$.

Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{u \in U} \mathcal{F}(G) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\sim"] & \prod_{u,v \in U} \mathcal{F}(G \times_{u,U,v} G) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}(U) \arrow[r] & \prod_{u \in U} \mathcal{H}(G) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{u,v \in U} \mathcal{H}(G \times_{u,U,v} G)
\end{tikzcd}$$

Mitte ist bijektiv.

Man kann jetzt zeigen, dass $G \times_{u,U,v} G$ eine disjunkte Vereinigung von Kopien von G ist. $\rightsquigarrow$ Rechts auch bijektiv.

Dann Diagrammjagd

Alternativ: Diagrammjagd $\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{H}(U)$ injektiv.

Da $U \in \mathcal{C}$ beliebig war, ist oben die rechte Abbildung injektiv. Nochmal Diagrammjagd: $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$ bijektiv.

Also $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$

5. Für $U \in \mathcal{C}$ definiere $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} h_{\mathcal{F}(G)}(U) = \mathrm{Hom}_G(U, \mathcal{F}(G))$ durch $\varphi_U(s)(u) := \alpha_u^* s$ mit $\alpha_u : G \longrightarrow U$, $g \longmapsto gu$ wie oben.

Das gibt einen Morphismus von Garben: Sei $U \xrightarrow{f} V$ in $\mathcal{C}$, $s \in \mathcal{F}(V)$, $u \in U$.

$$\varphi_U(f^*s)(u) = \alpha_u^*(f^*s) = (\underbrace{f \circ \alpha_u}_{g \mapsto f(gu) = g \cdot f(u)})^* s = \alpha_{f(u)}^* s = \varphi_V(s)(f(u))$$

$$= (\varphi_V(s) \circ f)(u) = f^*(\varphi_V(s))(u)$$

$$\rightsquigarrow \underset{\varphi_U(s|_U)}{\underset{\parallel}{\varphi_U(f^*s)}} = \underset{\varphi_V(s)|_U}{\underset{\parallel}{f^*(\varphi_V(s))}}. \quad \text{Garbenmorphismus}$$

Also $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow h_{\mathcal{F}(G)}$

Teste Isomorphie an G:

$$\mathcal{F}(G) \xrightarrow{\varphi_G} h_{\mathcal{F}(G)}(G) \xrightarrow[4.3]{\sim} \mathcal{F}(G)$$

$$s \longmapsto \varphi_G(s) \longmapsto \varphi_G(s)(e) = \alpha_e^* s$$

$$= id_G^* s = s$$

Komposition ist $id_{\mathcal{F}(G)} \Rightarrow \varphi_G$ bijektiv

$\overset{4.4.}{\Longrightarrow} \varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ Iso