Blatt 3

Aufgabe 1 $\mathcal{C}$ habe alle endlichen Limiten.

Ein finales Objekt ist Limes über ein leeres Diagramm in $\mathcal{C}$, existiert also. Faserprodukte existieren als Limiten von Diagrammen der Form $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$

Nun habe $\mathcal{C}$ Faserprodukte und ein finales Objekt $*$.

Für $A, B \in \mathcal{C}$ ist $A \times B = A \times_* B$ ein Produkt von A und B. Mit $*$ existieren 0-fache Produkte, 1-fache Produkte existieren sowieso. Mit Induktion bekommt man aus paarweisen Produkten auch n-fache Produkte für $n \geq 2$. Jetzt noch Egalisatoren: Seien $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{C}$. Definiere E als das Faserprodukt von

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "{(f,g)}"] \\ Y \arrow[r, "\Delta"] & Y \times Y \end{tikzcd}.$$

Behauptung: $E = \mathrm{Eq}\left(X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y\right)$. Für $Z \in \mathcal{C}$ gilt:

$$\mathrm{Hom}(Z,E) \overset{\text{UE}}{=} \left\{ (\varphi : Z \to X, \psi : Z \to Y) : (f,g)\varphi = \Delta \psi \right\}$$

$$= \left\{ (\varphi : Z \to X, \psi : Z \to Y) : \pi_1 (f,g)\varphi = \pi_1 \Delta \psi \wedge \pi_2 (f,g)\varphi = \pi_2 \Delta \psi \right\}$$

$$= \{ (\varphi : Z \to X, \psi : Z \to Y) ;\ f\varphi = \psi = g\varphi \}$$
$$\cong \{ \varphi : Z \to X,\ f\varphi = g\varphi \}$$

Das ist genau die universelle Eigenschaft des Egalisators.

$\Rightarrow E = \mathrm{Eq}(X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y)$, Egalisatoren existieren in $\mathcal{C}$.

Nach Vorlesung hat $\mathcal{C}$ jetzt alle endlichen Limiten.

Aufgabe 2 1. Sei $P \in A\text{-Mod}$.

$$\mathrm{Hom}_A\left(\left(\operatorname{colim}_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N, P\right) \overset{\otimes \dashv \mathrm{Hom}}{\cong} \mathrm{Hom}_A\left(\operatorname{colim}_{i\in I} M_i, \mathrm{Hom}_A(N,P)\right)$$
$$\cong \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A\left(M_i, \mathrm{Hom}_A(N,P)\right)$$
$$\overset{\otimes \dashv \mathrm{Hom}}{\cong} \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Hom}_A\left(\operatorname{colim}_{i\in I}(M_i \otimes_A N), P\right)$$

Yoneda $\Rightarrow \left(\operatorname{colim}_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \cong \operatorname{colim}_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$

2. Seien M_i flach, $i \in I$ und $N' \to N$ injektiv.

In A-Mod sind filtrierte Kolimiten exakt. Also:

$$\ker(M \otimes N' \to M \otimes N) = \ker\left(\operatorname{colim}_{i\in I}(M_i \otimes_A N') \longrightarrow \operatorname{colim}_{i\in I}(M_i \otimes_A N)\right)$$
$$= \operatorname{colim}_{i\in I} \ker\left(M_i \otimes_A N' \longrightarrow M_i \otimes_A N\right) = \operatorname{colim}_{i\in I} 0 = 0$$

Aufgabe 3

Für $U \in \mathcal{C}$ und und $M \in Sets$ definiere $\underline{M}_U$ als den Funktor

$$\mathcal{C}^{op} \to Sets, \quad V \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(V,U) \times M = Hom_{\mathcal{C}}(V,U)^{\sqcup M}$$

Das ist ein Funktor als Komposition von $Hom_{\mathcal{C}}(-,U)$ mit $- \times M$.

Also $\underline{M}_U \in PSh(\mathcal{C})$.

Für $\varphi : M \to N$ gibt es einen Garbenmorphismus $\varphi_* : \underline{M}_U \to \underline{N}_U$,

$$\varphi_*(V) : \underset{\substack{\parallel \\ Hom_{\mathcal{C}}(V,U) \times M}}{\underline{M}_U(V)} \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ Hom_{\mathcal{C}}(V,U) \times N}}{\underline{N}_U(V)}, \quad (\alpha, m) \mapsto (\alpha, \varphi(m))$$

Das ist ein Garbenmorphismus, denn für $V \xrightarrow{f} V'$ gilt:

$$\varphi_*(V)(f^*(\alpha,m)) = \varphi_*(V)(\alpha \circ f, m) = (\alpha \circ f, \varphi(m))$$

$$= f^*(\alpha, \varphi(m)) = f^*(\varphi_*(V')(\alpha,m))$$

Also $\varphi_*(V) \circ f^* = f^* \circ \varphi_*(V')$. Dass $M \mapsto \underline{M}_U$ ein Funktor

ist, ist klar. Muss man nichtmal zeigen, ist bei Adjunktionen automatisch.

Da in $PSh(\mathcal{C})$ Kolimiten auf jedem U separat berechnet werden,

ist $\underline{M}_U = h_U^{\sqcup M}$ mit $h_U = Hom_{\mathcal{C}}(-,U)$.

$$Hom_{PSh(\mathcal{C})}(\underline{M}_U, \mathcal{F}) = Hom_{PSh(\mathcal{C})}(h_U^{\sqcup M}, \mathcal{F}) \cong Hom_{PSh(\mathcal{C})}(h_U, \mathcal{F})^{\times M}$$

$$\underset{\text{Yoneda}}{\cong} \mathcal{F}(U)^{\times M} = Hom_{Sets}(M, \mathcal{F}(U))$$

$$\Rightarrow \underline{\cdot}_U \dashv \Gamma(U,-)$$

$\dashv$ heißt „ist linksadjungiert zu“

Aufgabe 4

1. Für $i_0 \in I$ schreibe ι_{i_0} für den Morphismus $F(i_0) \longrightarrow \operatorname{colim}_{i\in I} F(i)$.

Für $j \in J$ gibt es den Morphismus $a^*F(j) = F(a(j)) \xrightarrow{\iota_{a(j)}} \operatorname{colim}_{i\in I} F(i)$

Diese bilden zusammen einen Kokegel, denn für $j \xrightarrow{f} j'$ hat man:

$$\begin{tikzcd}
a^*F(j) \arrow[r, equal] \arrow[d, "a^*F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(a(j)) \arrow[d, "F(a(f))"] \arrow[dr, "\iota_{a(j)}"] & \\
a^*F(j') \arrow[r, equal] & F(a(j')) \arrow[r, "\iota_{a(j')}"'] & \operatorname{colim}_{i\in I} F(i)
\end{tikzcd}$$

kommutiert nach Definition der ι_i

Also bildet $\left(\iota_{a(j)} : a^*F(j) \longrightarrow \operatorname{colim}_{i\in I} F(i)\right)_{j\in J}$ eine natürliche Transformation von a^*F zum konstanten Diagramm $c_{\operatorname{colim}_{i\in I} F(i)}$. Das induziert einen Morphismus $\operatorname{colim}_{j\in J} a^*F(j) \longrightarrow \operatorname{colim}_{i\in I} F(i)$.

2. $J \subseteq I$ muss eine <u>volle</u> Unterkategorie sein!

- I filtriert $\Rightarrow I \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, i \in I$. Wähle $i \xrightarrow{\alpha} j$ in I mit $j \in J$.

  $\Rightarrow J \neq \emptyset$

- Seien $j, j' \in J$. I filtriert $\Rightarrow$ Es gibt $i \in I$, $j \xrightarrow{\beta} i$, $j' \xrightarrow{\beta'} i$ in I.

  Wähle $\alpha : i \longrightarrow \bar{j}$ mit $\bar{j} \in J$. $\rightsquigarrow j \xrightarrow{\alpha\beta} \bar{j}$, $j' \xrightarrow{\alpha\beta'} \bar{j}$ in I.

  Da $J \subseteq I$ voll ist, liegen auch $\alpha\beta$ und $\alpha\beta'$ in J.

- Gegeben sei $j \overset{\alpha}{\underset{\alpha'}{\rightrightarrows}} j'$ in J. I filtriert $\Rightarrow \exists\, i \in I$, $j' \xrightarrow{\beta} i$:

  $\beta\alpha = \beta\alpha'$. Wähle $\gamma : i \longrightarrow \bar{j}$ mit $\bar{j} \in J$. $\Rightarrow j' \xrightarrow{\gamma\beta} \bar{j}$ liegt in J

mit $\gamma\beta\alpha = \gamma\beta\alpha'$.

Also J filtriert.

Zeige noch: Wenn einer der Kolimiten existiert, dann auch der andere und beide sind gleich. Dazu: Beide stellen den gleichen Funktor dar.

Sei $X \in \mathcal{C}$.

konstantes Diagramm

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim} F, X)}_{\text{wenn existent}} \;\hat{=}\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(F, c_X) = \mathrm{Nat}_{I\to\mathcal{C}}(F, c_X)$$

$$\Big\downarrow \Phi$$

$$\underbrace{\mathrm{Hom}(\operatorname{colim} \alpha^*F, X)}_{\text{wenn existent}} \;\hat{=}\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^J}(F, c_X) = \mathrm{Nat}_{J\to\mathcal{C}}(\alpha^*F, c_X)$$

Definiere
$$\Phi : \mathrm{Nat}_{I\to\mathcal{C}}(F, c_X) \longrightarrow \mathrm{Nat}_{J\to\mathcal{C}}(\alpha^*F, c_X)$$
$$\eta \longmapsto \eta\alpha = (\eta_j)_{j\in J}$$

Zeige nun, dass Φ bijektiv ist für alle X. Dann sind die Funktoren $X \longmapsto \mathrm{Nat}_{I\to\mathcal{C}}(F, c_X)$ und $X \longmapsto \mathrm{Nat}_{J\to\mathcal{C}}(\alpha^*F, c_X)$ isomorph und beide werden von den selben Objekten dargestellt, nämlich von $\operatorname{colim} F \cong \operatorname{colim} \alpha^*F$.

<u>Φ ist injektiv</u> Sei $\Phi(\eta) = \Phi(\vartheta)$, also $\eta_j = \vartheta_j \; \forall j \in J$.

Sei $i \in I$, wähle $i \xrightarrow{\alpha} j$ mit $j \in J$.

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "F(\alpha)"'] \arrow[d, "\eta_i"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & F(j) \arrow[d, "\eta_j = \vartheta_j"'] & F(i) \arrow[l, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\vartheta_i"] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

$\eta_i = \eta_j F(\alpha) = \vartheta_j F(\alpha) = \vartheta_i$

Also $\eta = \vartheta$.

Φ ist surjektiv

Sei $\eta \in \mathrm{Not}_{J\to\mathcal{C}}(a^*F, c_X)$. Zu $i\in I$ wähle $i \xrightarrow{\alpha} j$, $j\in J$ und definiere $\bar\eta_i := \eta_j F(\alpha) : F(i)\to F(j)\to X$. Das ist unabhängig von der Wahl von j und α: Sei zusätzlich $i \xrightarrow{\alpha'} j'$, $j'\in J$ gegeben.

Da I filtriert ist und aus der Voraussetzung an j folgt, dass es $\bar j \in J$ und $\beta: j\to\bar j$, $\beta': j'\to \bar j$ gibt mit $\beta\alpha=\beta'\alpha'$

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ i \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & {} & \bar j \\ & j' \arrow[ur, "\beta'"'] & \end{tikzcd}$$

(j und j' in gemeinsames i schicken, egalisieren, weiterschicken nach J).

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d, "\eta_j"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(\bar j) \arrow[d, "\eta_{\bar j}"] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \eta_j F(\alpha) = \eta_{\bar j} F(\beta) F(\alpha) = \eta_{\bar j}(\beta\alpha)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$
$$\eta_{j'} F(\alpha') = \eta_{\bar j} F(\beta') F(\alpha') = \eta_{\bar j}(\beta'\alpha')$$

Also definiere $\bar\eta = (\bar\eta_i : F(i) \to \underset{c_X(i)}{\overset{\|}{X}})_{i\in I}$. Das ist eine natürliche Transformation:

Sei $i \xrightarrow{\alpha} i'$ in I. Wähle $i' \xrightarrow{\beta} j$, $j\in J$.

$$\bar\eta_{i'} F(\alpha) = \eta_j F(\beta) F(\alpha) = \eta_j F(\beta\alpha) \underset{\beta\alpha:\, i\to j\in J}{=} \bar\eta_i = c_X(\alpha)\,\bar\eta_i$$

Also $\bar\eta \in \mathrm{Not}_{I\to\mathcal{C}}(F, c_X)$.

$$\Phi(\bar\eta) = (\bar\eta_j)_{j\in J} \underset{\substack{\text{Wähle } \alpha=\mathrm{id}_j \text{ in} \\ \text{Def. von } \bar\eta_j}}{=} (\eta_j F(\mathrm{id}_j))_{j\in J} = (\eta_j)_{j\in J} = \eta$$

Also η surjektiv