Blatt 4

Aufgabe 1 Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{\omega} \mathcal{J}^\bullet$ eine injektive Koauflösung von $\mathcal{F}$.

Für $n \geq 0$ hat man dann
$$\begin{aligned} \mathcal{J}^n(U) \oplus \mathcal{J}^n(V) &\longrightarrow \mathcal{J}^n(U \cap V) \\ (s, t) &\longmapsto s|_{U\cap V} - t|_{U \cap V} \end{aligned}$$

Nach Garbenaxiom ist der Kern gerade $\mathcal{J}^n(X)$. Da $\mathcal{J}^n$ injektiv ist, ist die Abbildung surjektiv: Sei $s \in \mathcal{J}^n(U \cap V)$. Dann wird s getroffen von $(\tilde{s}, 0)$, wobei $\tilde{s}$ eine Ausdehnung von s auf U ist.

Das ergibt ein Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{J}^n(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}^n(U) \oplus \mathcal{J}^n(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}^n(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{J}^{n+1}(X) \arrow[r] & \mathcal{J}^{n+1}(U) \oplus \mathcal{J}^{n+1}(V) \arrow[r] & \mathcal{J}^{n+1}(U \cap V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Es kommutiert, da $\mathcal{J}^n \to \mathcal{J}^{n+1}$ ein Garbenhomomorphismus ist.

$\rightsquigarrow$ Kurze exakte Sequenz in $C^\bullet(Ab)$:

$$0 \to \mathcal{J}^\bullet(X) \to \mathcal{J}^\bullet(U) \oplus \mathcal{J}^\bullet(V) \to \mathcal{J}^\bullet(U \cap V) \to 0$$

Lange exakte Kohomologiesequenz $\rightsquigarrow$ fertig.

Aufgabe 2

1. Nach Vorlesung ist $R^i f_* \mathcal{F} = \mathcal{G}^\#$ mit $\mathcal{G}(U) = H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$

   Für $U \subseteq Y$ affin-offen ist $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} R$ auch affin. Dann ist

   $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für ein $M \in R$-Mod und für $i > 0$ gilt

   $\mathcal{G}(U) = H^i(\operatorname{Spec} R, \tilde{M}) = 0.$

   Also ist $\mathcal{G}$ trivial auf der Basis der affin-offenen Mengen.

   $\Rightarrow$ Halme von $\mathcal{G}$ trivial $\Rightarrow R^i f_* \mathcal{F} = \mathcal{G}^\# = 0.$

2. Nach Vorlesung ist $R^i f_* \mathcal{F} = \mathcal{G}^\#$ mit $\mathcal{G}(U) = H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$

   Für $\operatorname{Spec} R = U \subseteq Y$ affin-offen ist $f^{-1}(U) = \mathbb{P}^n_R$. Für $i > n$ gilt:

   $\mathcal{G}(U) = H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F}) = 0$

   Also ist $\mathcal{G}$ trivial auf der Basis der affin-offenen Mengen.

   $\Rightarrow$ Halme von $\mathcal{G}$ trivial $\Rightarrow R^i f_* \mathcal{F} = \mathcal{G}^\# = 0.$

3. Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}^\bullet$ eine injektive Koauflösung von $\mathcal{F}$.

   Für $i > 0$ ist $H^i(h_* \mathcal{J}^\bullet) = R^i h_* \mathcal{F} \overset{1.}{=} 0$, also ist

   $h_* \mathcal{J}^\bullet$ exakt außer an $i = 0$, dort ist

   $H^0(h_* \mathcal{J}^\bullet) = \ker(h_* \mathcal{J}^0 \to h_* \mathcal{J}^1) \underset{h_* \text{ linksexakt}}{=} h_* \ker(\mathcal{J}^0 \to \mathcal{J}^1) = h_* \mathcal{F}$

   $\Rightarrow h_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} h_* \mathcal{J}^\bullet$ ist eine Koauflösung

   Die $h_* \mathcal{J}^i$ sind welk als Bilder welker Garben, also $pr_{2,*}$-azyklisch

$\Rightarrow h_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} h_* \mathcal{J}^\bullet$ azyklische Auflösung.

$$R^i f_* \mathcal{F} = H^i(f_* \mathcal{J}^\bullet) = H^i(pr_{2,*} \underbrace{h_* \mathcal{J}^\bullet}_{\substack{\text{azyklische Auflösung} \\ \text{von } h_*\mathcal{F}}}) = R^i pr_{2*} (\underbrace{h_* \mathcal{F}}_{\text{quasikohärent}}) \overset{2}{=} 0 \text{ für } i > n.$$

Aufgabe 3

Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{C}' = \{*\}$ ist ein Funktor $\{*\}^{op} = \{*\} \longrightarrow \text{Sets}$, also einfach eine Menge $\mathcal{F}(*)$. Wir unterscheiden notationell nicht mehr zwischen $PSh(\{*\})$ und Sets, für $M \in \text{Sets}$ ist also auch M die Prägarbe mit $M(*) = M$.

Für $U \in \mathcal{C}$ ist $f_* M(U) = M(f^\circ(U)) = M(*) = M$, für $U \xrightarrow{\alpha} V$ in $\mathcal{C}$ ist $f_* M(\alpha) = M(f^\circ \alpha) = M(\mathrm{id}_*) = \mathrm{id}_M$. Damit ist $f_* M$ der konstante Funktor $\underline{M}$. Für den adjungierten Funktor f^p muss gelten:

$$\mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(f^p \mathcal{F}, M) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}}(\mathcal{F}, f_* M) = \mathrm{Nat}_{\mathcal{C}^{op} \to \text{Sets}}(\mathcal{F}, \underline{M})$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\text{Sets}}(\mathrm{colim}\, \mathcal{F}, M)$$

Also ist f^p der Kolimes $\mathcal{F} \longmapsto \mathrm{colim}\, \mathcal{F}$.

$$\mathcal{C}: \quad \begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd}$$

<u>f^p ist im Allgemeinen nicht exakt:</u> Sei $\mathcal{C}$ die diskrete Kategorie mit zwei Objekten A und B. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{C}$ besteht aus zwei Mengen $\mathcal{F}(A)$ und $\mathcal{F}(B)$, also $PSh(\mathcal{C}) \cong \text{Sets}^2$.

$$f^p \mathcal{F} = \mathrm{colim}_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B)$$

Sei F_A die Prägarbe auf $\mathcal{C}$ mit $F_A(A)=\{4\}$, $F_A(B)=\emptyset$ und

F_B die Prägarbe auf $\mathcal{C}$ mit $F_B(A)=\emptyset$, $F_B(B)=\{2\}$.

Dann ist $(F_A\times F_B)(A)=F_A(A)\times F_B(A)=\{4\}\times\emptyset=\emptyset$ und $(F_A\times F_B)(B)=\emptyset$

analog. $\to f^P(F_A\times F_B)=\emptyset\sqcup\emptyset=\emptyset$

Aber:

$$f^P F_A\times f^P F_B=(\{4\}\sqcup\emptyset)\times(\emptyset\sqcup\{2\})=\{4\}\times\{2\}=\{(4,2)\}\neq\emptyset$$

Also erhält f^P Produkte nicht, ist also nicht linksexakt.

<u>Aufgabe 4</u>

1. Für $U\in\mathcal{C}$, $A\in Ab$ definiere

$$\begin{aligned}\underline{A}_U:\ \mathcal{C}^{op}&\longrightarrow Ab\\ V&\longmapsto A^{\oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,U)}=\bigoplus_{\alpha:V\to U}A\\ (V'\xrightarrow{\beta}V)&\longmapsto\left(\begin{aligned}A^{\oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,U)}&\xrightarrow{\beta^*}A^{\oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V',U)}\\ a_\alpha&\longmapsto a_{\alpha\beta}\end{aligned}\right)\end{aligned}$$

Morphismus in $\mathcal{C}$, nicht in $\mathcal{C}^{op}$

Für $a\in A$, $\alpha:V\to U$ schreibe a_α für $i_\alpha(a)$, wobei $i_\alpha:A\to A^{\oplus\mathrm{Hom}(V,U)}$ die Inklusion zum Index $\alpha\in\mathrm{Hom}(V,U)$ ist.

$\underline{A}_U$ ist ein Funktor:

- $\mathrm{id}_V^*(a_\alpha)=a_{\alpha\circ\mathrm{id}_V}=a_\alpha$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{id}_V^*=\mathrm{id}_{\underline{A}_U(V)}$
- Für $V''\xrightarrow{\beta'}V'\xrightarrow{\beta}V$:

$$\beta'^*(\beta^* a_\alpha) = \beta'^* a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\beta'} = (\beta\beta')^* a_\alpha \quad \rightsquigarrow \beta'^* \circ \beta^* = (\beta\beta')^*$$

Definiere nun $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}_{Ab}(\mathcal{C})}(\underline{A}_U, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(A, \mathcal{F}(U))$

$$f \longmapsto f_U \circ i_{id_U}$$

wobei $i_{id_U} : A \to A^{\oplus \mathrm{Hom}(U,U)}$ die Inklusion in die Komponente mit Index id_U ist.

Zeige noch, dass Φ bijektiv ist.

<u>Φ injektiv</u> Sei $\Phi(f) = \Phi(g)$, also $f_U \circ i_{id_U} = g_U \circ i_{id_U}$. Sei $V \in \mathcal{C}$ und $\alpha : V \to U$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i_{id_U}"'] \arrow[dr, "i_\alpha"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
A^{\oplus \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(U,V)} \arrow[rr, "\alpha^*"'] \arrow[d, "f_U"', "g_U"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & A^{\oplus \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(V,U)} \arrow[d, "f_V"', "g_V"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[rr, "\mathcal{F}(\alpha)"'] & & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

$$f_V \circ i_\alpha = f_V \circ \alpha^* \circ i_{id_U} = \mathcal{F}(\alpha) \circ f_U \circ i_{id_U}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$
$$g_V \circ i_\alpha = g_V \circ \alpha^* \circ i_{id_U} = \mathcal{F}(\alpha) \circ g_U \circ i_{id_U}$$

Das gilt für alle $\alpha \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(V,U)$, also folgt $f_V = g_V$. Da $V \in \mathcal{C}$ beliebig war, ist $f = g$ als natürliche Transformationen.

<u>Φ surjektiv</u> Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Ab}(A, \mathcal{F}(U))$ gegeben. Für $V \in \mathcal{C}$ definiere

$$f_V : \underline{A}_U(V) = A^{\oplus \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(V,U)} \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$
$$a_\alpha \longmapsto (\mathcal{F}(\alpha) \circ \varphi)(a)$$

Das ergibt einen Homomorphismus von Prägarben: Sei $V' \xrightarrow{\beta} V$ in $\mathcal{C}$.

$$(\mathcal{F}(\beta) \circ f_V)(a_\alpha) = (\mathcal{F}(\beta) \circ \mathcal{F}(\alpha) \circ \varphi)(a) = (\mathcal{F}(\alpha\beta) \circ \varphi)(a) = f_{V'}(a_{\alpha\beta})$$
$$= f_{V'}(\beta^* a_\alpha)$$

$$\begin{tikzcd} A^{\oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,U)} \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "f_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A^{\oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V',U)} \arrow[d, "f_{V'}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\mathcal{F}(\beta)"'] & \mathcal{F}(V') \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}(\beta)\circ f_V = f_{V'}\circ\beta^*$

Also ist $f = (f_V)_{V\in\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}(\underline{A}_U, \mathcal{F})$.

Außerdem ist $\Phi(f) = f_U \circ i_{id_U} = \mathcal{F}(id_U)\circ\varphi = \varphi$.

Also Φ surjektiv.

2. Für $A\in Ab$, $U\in\mathcal{C}$ definiere

$$\bar{A}^U : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ab$$

$$V \longmapsto A^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,V)} = \prod_{\alpha:U\to V} A$$

Morphismus in $\mathcal{C}$, nicht in $\mathcal{C}^{op}$

$$(V' \xrightarrow{\beta} V) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} A^{\mathrm{Hom}(U,V)} & \xrightarrow{\beta^*} & A^{\mathrm{Hom}(U,V')} \\ (a_\alpha)_{\alpha:U\to V} & \longmapsto & (a_{\beta\alpha'})_{\alpha':U\to V'} \end{array} \right)$$

$\bar{A}^U$ ist ein Funktor:

- $id_V^*(a_\alpha)_{\alpha:U\to V} = (a_{id_V\circ\alpha})_{\alpha:U\to V} = (a_\alpha)_{\alpha:U\to V} \rightsquigarrow id_V^* = id_{\bar{A}^U(V)}$
- Für $V'' \xrightarrow{\beta'} V' \xrightarrow{\beta} V$:

$$\beta'^*\beta^*(a_\alpha)_{\alpha:U\to V} = \beta'^*(a_{\beta\alpha'})_{\alpha':U\to V'} = (a_{\beta\beta'\alpha''})_{\alpha'':U\to V''}$$
$$= (\beta\beta')^*(a_\alpha)_{\alpha:U\to V}. \qquad \rightsquigarrow \beta'^*\circ\beta^* = (\beta\beta')^*$$

Definiere nun $\Phi: \mathrm{Hom}_{PSh_{Ab}(\mathcal{C})}(\mathcal{F}, \bar{A}^U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(\mathcal{F}(U), A)$

$$f \longmapsto \pi_{id_U}\circ f_U$$

mit $\pi_{id_U} : A^{\mathrm{Hom}(U,U)} \longrightarrow A$ der Projektion auf den Faktor zum Index $id_U \in \mathrm{Hom}(U,U)$. Zeige, dass Φ bijektiv ist.

<u>Φ injektiv</u> Sei $\Phi(f) = \Phi(g)$, also $\pi_{id_U} \circ f_U = \pi_{id} \circ g_U$

Sei $V \in \mathcal{C}$ und $\alpha : U \to V$.

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "f_V\,|\,g_V"'] & F(U) \arrow[d, "f_U\,|\,g_U"] \\
A^{\mathrm{Hom}(U,V)} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\pi_\alpha"'] & A^{\mathrm{Hom}(U,U)} \arrow[d, "\pi_{id_U}"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

$$\pi_\alpha \circ f_V = \pi_{id_U} \circ \alpha^* \circ f_V = \pi_{id_U} \circ f_U \circ F(\alpha)$$
$$= \pi_{id_U} \circ g_U \circ F(\alpha) = \pi_{id_U} \circ \alpha^* \circ g_V$$
$$= \pi_\alpha \circ g_V$$

Das gilt für alle $\alpha : U \to V$ $\Rightarrow f_V = g_V$

$\Rightarrow f = g$ als Prägarbenhomomorphismen.

<u>Φ surjektiv</u> Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Ab}(F(U), A)$ gegeben. Für $V \in \mathcal{C}$ definiere

$$f_V : F(V) \longrightarrow \bar{A}^U(V) = A^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,V)}$$
$$s \longmapsto \big(\varphi(F(\alpha)(s))\big)_{\alpha : U \to V}$$

Das ist ein Homomorphismus von Prägarben, denn für $V' \xrightarrow{\beta} V$ gilt:

$$(f_{V'} \circ F(\beta))(s) = f_{V'}(F(\beta)(s)) = \Big(\varphi\big(F(\alpha')(F(\beta)(s))\big)\Big)_{\alpha' : U \to V'}$$
$$= \Big(\varphi\big(F(\beta\alpha')(s)\big)\Big)_{\alpha' : U \to V'} = \beta^*\Big(\varphi\big(F(\alpha)(s)\big)\Big)_{\alpha : U \to V}$$
$$= (\beta^* \circ f_V)(s) \qquad \rightsquigarrow f_{V'} \circ F(\beta) = \beta^* \circ f_V.$$

Also ist $f = (f_V)_{V \in \mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{PSh_{Ab}(\mathcal{C})}(F, \bar{A}^U)$

Außerdem gilt:

$$\Phi(f) = \pi_{id_U} \circ f_U = \varphi \circ \mathcal{F}(id_U) = \varphi$$

Also ist Φ surjektiv.

3. Sei $\mathcal{F} \in PSh_{Ab}(\mathcal{C})$. Sei $U \in \mathcal{C}$. Da Ab genügend Injektive hat, gibt es einen injektiven Homomorphismus $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow I_U$ mit $I_U \in Ab$ injektiv. Da Γ_U beide Adjungierten hat, ist es exakt, also erhält sein Rechtsadjungiertes $\overline{\cdot}^U$ Injektive. Also ist $\overline{I_U}^U \in PSh_{Ab}(\mathcal{C})$ injektiv. Als Produkt von Injektiven ist $\prod_{U \in \mathcal{C}} \overline{I_U}^U$ auch injektiv.

Konstruiere nun $\mathcal{F} \to \prod_{U \in \mathcal{C}} \overline{I_U}^U$. Für $U \in \mathcal{C}$ induziert $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow I_U$ nach Adjunktion einen Morphismus $\mathcal{F} \to \overline{I_U}^U$. All diese zusammen ergeben $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \prod_{U \in \mathcal{C}} \overline{I_U}^U =: \mathcal{J}$

Zeige noch Injektivität dieses Homomorpismus: Sei $U \in \mathcal{C}$.

Dann ist $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{J}(U) \xrightarrow{\pi_U} \overline{I_U}^U(U) = I_U^{Hom(U,U)} \xrightarrow[\pi_{id_U}]{} I_U$

nach Konstruktion in 2. einfach die vorher gewählte Inklusion

$\mathcal{F}(U) \hookrightarrow I_U$, also injektiv. $\Rightarrow f_U$ injektiv $\forall U \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow f$ injektiv.

<u>Aufgabe 5*</u>

1. Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $X \xrightarrow{\alpha_n} \prod_{m \in \mathbb{N}} X$ mit $\pi_m \circ \alpha_n = \begin{cases} id_X & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$ nach UE von $\prod_{m \in \mathbb{N}} X$. Nach UE von

$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X$ induzieren die α_n gemeinsam einen eindeutigen Homomorphismus $\alpha: \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X \longrightarrow \prod_{m\in\mathbb{N}} X$. Dann ist α der eindeutige Homomorphismus mit $\left(X \xrightarrow{i_n} X^{\oplus\mathbb{N}} \xrightarrow{\alpha} X^{\times\mathbb{N}} \xrightarrow{\pi_m} X\right) = \begin{cases} \mathrm{id}_X & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$

2. Für $N\in\mathbb{N}$ sei $j_N: \bigoplus_{n\leq N} X \longrightarrow \bigoplus_{n\leq N} X \oplus \bigoplus_{n>N} X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X$ die Inklusion. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{n\leq N} X \arrow[r, "\alpha\circ j_N"] \arrow[d, "\mathrm{incl}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^{\mathbb{N}} \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{n\leq N+1} X \arrow[r, "\alpha\circ j_{N+1}"'] & X^{\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

$$\bigoplus_{n\leq N+1} X = \Big(\bigoplus_{n\leq N} X\Big)\oplus X$$

$\mathbb{N}$ als Kategorie $0\to 1\to 2\to\dots$ betrachten, dann haben wir Funktoren $F: N\mapsto \bigoplus_{n\leq N} X$ und $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ und eine natürliche Transformation $\eta: F\longrightarrow \underline{X}^{\mathbb{N}}$, $\eta = (\alpha\circ j_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

$\alpha\circ j_N$ ist ein Monomorphismus, denn es ist die Inklusion

$$\bigoplus_{n\leq N} X \longrightarrow \bigoplus_{n\leq N} X \oplus \prod_{n>N} X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X$$

Also ist $0\longrightarrow F \xrightarrow{\eta} \underline{X}^{\mathbb{N}}$ exakt in der Funktorkategorie.

Nach AB5 ist auch $\operatorname{colim} 0 \longrightarrow \operatorname{colim} F \xrightarrow{\operatorname{colim}\eta} \operatorname{colim} \underline{X}^{\mathbb{N}}$ exakt, denn $\mathbb{N}$ ist eine filtrierte Kategorie. $\operatorname{colim} 0 = 0$, $\operatorname{colim} \underline{X}^{\mathbb{N}} = X^{\mathbb{N}}$.

$$\mathrm{Hom}(\operatorname{colim} F, Y) = \lim_{N\in\mathbb{N}^{op}} \mathrm{Hom}(F(N), Y) = \lim_N \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{n\le N} X, Y\Big)$$
$$= \lim_N \prod_{n\le N} \mathrm{Hom}(X,Y) = \prod_{\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}(X^{\oplus\mathbb{N}}, Y)$$
$$\Rightarrow \operatorname{colim} F = X^{\oplus\mathbb{N}}$$

Was ist $\operatorname{colim} \eta$? Sei $N\in\mathbb{N}$.

$i_N : X \to X^{\oplus\mathbb{N}}$

$i'_N : X \to \bigoplus_{n\le N} X$

Inklusionen in Komponente N

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{n\le N} X \arrow[r, "\alpha\circ i_N"] \arrow[d, "j_N"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & X^{\mathbb{N}} \arrow[d, equal] & \text{endliche Stufe} \arrow[d] \\
X^{\oplus\mathbb{N}} \arrow[r, "\operatorname{colim}\eta"'] & X^{\mathbb{N}} & \text{Kolimes}
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{colim}\eta \circ i_N = \operatorname{colim}\eta\circ j_N\circ i'_N$$
$$= \alpha\circ j_N\circ i'_N = \alpha\circ i_N.$$
Das gilt für alle N, also $\operatorname{colim}\eta = \alpha$.

Also ist $0 \to X^{\oplus\mathbb{N}} \xrightarrow{\alpha} X^{\mathbb{N}}$ exakt.

3. Dual zu 2.

4.
$$\left(X \xrightarrow{f+id_X} X\right) = \left(X \xrightarrow{\Delta} X\times X \xrightarrow{id_X\oplus f} X\oplus X \xrightarrow{+} X\right)$$
$$= \left(X \xrightarrow{\Delta} X\times X \xrightarrow{id_X\times\Delta} X\times X^{\mathbb{N}} \xrightarrow{id_X\oplus\alpha^{-1}} X\oplus X^{\oplus\mathbb{N}} \xrightarrow{id\oplus\Sigma} X\oplus X \xrightarrow{+} X\right)$$
$$= \left(X \xrightarrow{\Delta} X\times X^{\mathbb{N}} \xrightarrow{id_X\oplus\alpha^{-1}} X\oplus X^{\oplus\mathbb{N}} \xrightarrow{\Sigma} X\right)$$
$$= \left(X \xrightarrow{\Delta} X^{\mathbb{N}\cup\{-1\}} \xrightarrow{\beta} X^{\oplus(\mathbb{N}\cup\{-1\})} \xrightarrow{\Sigma} X\right)$$

Das Inverse von β ist $id_X^{-1} = id_X$ auf Komponente -1 und α auf dem Rest.

$$\Rightarrow \pi_n\circ\beta^{-1}\circ i_m = \begin{cases} id_X & n=m \\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Bis auf Verschiebung der Indizes ist $\beta^{-1} = \alpha$

Also $\left(X \xrightarrow{f+id_X} X\right) = \left(X \xrightarrow{\Delta} X^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\alpha^{-1}} X^{\oplus\mathbb{N}} \xrightarrow{\Sigma} X\right) = \left(X \xrightarrow{f} X\right)$

Sei nun $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit AB5 und AB5*. Nach 2. und 3. ist α mono und epi. Da $\mathcal{A}$ abelsch ist, ist der induzierte Morphismus $\bar{\alpha}: \operatorname{coim} \alpha \longrightarrow \operatorname{im} \alpha$ ein Isomorphismus.

$$\operatorname{coim} \alpha = \operatorname{coker}\Big(\underset{\overset{\|}{0}}{\ker \alpha} \longrightarrow X^{\oplus \mathbb{N}} \Big) = X^{\oplus \mathbb{N}}$$

$$\operatorname{im} \alpha = \ker\Big(X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \underset{\overset{\|}{0}}{\operatorname{coker} \alpha} \Big) = X^{\mathbb{N}}$$

Also ist α ein Isomorphismus. Nach 4. existiert $f \in \operatorname{End} X$ mit

$f + \mathrm{id}_X = f \quad \Rightarrow \quad \mathrm{id}_X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0.$ Also $\mathcal{A} = \{0\}$.