Blatt 5

Aufgabe 1+2 Allgemein gilt: $E_{r+1}^{p,q}$ ist ein Subquotient von $E_r^{p,q}$. Ist also $E_r^{p,q} = 0$, so ist $E_{r'}^{p,q} = 0$ $\forall r' \geq r$.

1. $E_2^{p,q} = 0$ für $p \neq p_0$. Für jedes Differential $d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ ist dann $E_r^{p,q} = 0 \vee E_r^{p+r,q-r+1} = 0 \Rightarrow d_r^{p,q} = 0$.

$$\Rightarrow E_{r+1}^{p,q} = \ker\left(E_r^{p,q} \xrightarrow{0} E_r^{p+r,q-r+1}\right) / \operatorname{im}\left(E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{0} E_r^{p,q}\right) = E_r^{p,q}/0 = E_r^{p,q}$$

Die Objekte ändern sich nicht. $\Rightarrow E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$, insbesondere $E_\infty^{p,q} = 0$ für $p \neq p_0$.

E^{p_0+q} hat eine absteigende Filtration $F^\bullet$ mit $F^0 E^{p_0+q} = E^{p_0+q}$, $F^{p_0+q+1} E^{p_0+q} = 0$,

$$F^p E^{p_0+q} / F^{p+1} E^{p_0+q} = E_\infty^{p, p_0-p+q} = \begin{cases} E_2^{p_0,q} & p = p_0 \\ 0 & p \neq p_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^{p_0+q} = F^0 E^{p_0+q} = \ldots = F^{p_0} E^{p_0+q}, \quad F^{p_0+1} E^{p_0+q} = \ldots = F^{p_0+q+1} E^{p_0+q} = 0$$

$$E^{p_0+q} = E^{p_0+q}/0 = F^{p_0} E^{p_0+q} / F^{p_0+1} E^{p_0+q} = E_2^{p_0,q}$$

2. $E_2^{p,q} = 0$ für $q \neq q_0$. Wieder sind alle $d_r^{p,q} = 0$.

$$\Rightarrow E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$$

$$F^{p'} E^{p+q_0} / F^{p'+1} E^{p+q_0} = E_\infty^{p', p-p'+q_0} = \begin{cases} E_2^{p,q_0} & p' = p \\ 0 & p' \neq p \end{cases}$$

$$E^{p+q_0} = F^0 E^{p+q_0} = F^1 E^{p+q_0} = \ldots = F^p E^{p+q_0} \supseteq F^{p+1} E^{p+q_0} = \ldots = F^{p+q_0} E^{p+q_0} = F^{p+q_0+1} E^{p+q_0} = 0$$

Quotient E_2^{p,q_0}

$$\Rightarrow \quad E^{p+q_0} = E^{p+q_0}/0 = E_2^{p,q_0}.$$

3. $E_2^{p,q} = 0$ für $p \geq 2$. Wieder alle $d_r^{p,q}$ trivial, denn für $r \geq 2$ gehen ja alle Differentiale mindestens zwei Spalten nach rechts. $\Rightarrow E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$.

$$F^pE^n/F^{p+1}E^n = E_\infty^{p,n-p} = \begin{cases} E_2^{0,n} & p=0 \\ E_2^{1,n-1} & p=1 \\ 0 & p \geq 2 \end{cases}$$

$$E^n = F^0E^n \supseteq F^1E^n \supseteq F^2E^n = F^3E^n = \dots = F^{n+1}E^n = 0$$

Quotienten $E_2^{0,n}$ $E_2^{1,n-1}$

$$E_2^{1,n-1} = F^1E^n/F^2E^n = F^1E^n/0 = F^1E^n$$

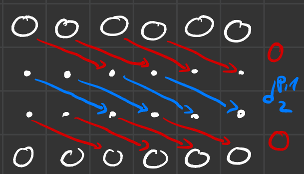
Also $E_2^{1,n-1} \subseteq F^0E^n = E^n$ mit Quotient

$$E^n/E_2^{1,n-1} = F^0E^n/F^1E^n = E_2^{0,n}$$

Also kurze exakte Sequenz $0 \to E_2^{1,n-1} \to E^n \to E_2^{0,n} \to 0$.

4. $E_2^{p,q} = 0$ für $q \geq 2$. Die einzigen nichttrivialen Differentiale sind

$$d_2^{p,1} : E_2^{p,1} \longrightarrow E_2^{p+2,0}.$$



$$E_3^{p,1} = H^{p,1}(E_2) = \ker d_2^{p,1}$$

$$E_3^{p,0} = H^{p,0}(E_2) = \operatorname{coker} d_2^{p-2,1}$$

$\rightsquigarrow$ Exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E_3^{n-1,1} \longrightarrow E_2^{n-1,1} \xrightarrow{d_2^{n-1,1}} E_2^{n+1,0} \longrightarrow E_3^{n+1,0} \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Ab der dritten Seite sind wieder alle Differentiale trivial.

$$\Rightarrow E_\infty^{p,q} = E_3^{p,q}$$

$$F^pE^n / F^{p+1}E^n = E_\infty^{p,n-p} = \begin{cases} E_3^{n,0} & p=n \\ E_3^{n-1,1} & p=n-1 \\ 0 & p<n \end{cases}$$

$$E^n = F^0E^n = \_ = F^{n-1}E^n \supseteq F^nE^n \supseteq F^{n+1}E^n = 0$$

Quotienten $E_3^{n-1,1}$ $E_3^{n,0}$

$\Rightarrow E_3^{n,0} = F^nE^n \subseteq F^{n-1}E^n = E^n$ mit Quotient $E_3^{n-1,1}$

$\Rightarrow$ Exakte Sequenz $0 \to E_3^{n,0} \to E^n \to E_3^{n-1,1} \to 0$ (☾)

(*) und (☾) an $E_3^{n-1,1}$ zusammenkleben:

$$0 \to E_3^{n,0} \to E^n \to E_2^{n-1,1} \xrightarrow{d_2^{n-1,1}} E_2^{n+1,0} \to E_3^{n+1,0} \to 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die alle zusammenkleben:

$$\_ \to E_2^{n-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{n,0} \to E^n \to E_2^{n-1,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{n+1,0} \to E^{n+1} \to E_2^{n,1} \xrightarrow{d_2} \_$$

5. $E_r^{p,q} = 0$ für $p \notin \{p_0, p_0+r_0\}$. Für $r_0 < 2$ siehe 1./3.

Also $r \geq 2$. Die einzigen nichttrivialen Differentiale sind

$$d_{r_0}^{p_0,q}: E_{r_0}^{p_0,q} \longrightarrow E_{r_0}^{p_0+r_0,\, q-r_0+1}.$$

$$\Rightarrow E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \_ = E_{r_0}^{p,q}, \quad E_{r_0+1}^{p,q} = E_\infty^{p,q}.$$

Wie in 4. ist exakt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_{r_0+1}^{p_0,q} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_{r_0}^{p_0,q} \arrow[r, "d_{r_0}"] \arrow[d, equal] & E_{r_0}^{p_0+r_0,\, q-r_0+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_{r_0+1}^{p_0+r_0,\, q-r_0+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & E_\infty^{p_0,q} & E_2^{p_0,q} & E_2^{p_0+r_0,\, q-r_0+1} & E_\infty^{p_0+r_0,\, q-r_0+1} & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Die Filtration

$$E^n = F^0E^n = \_ = F^{p_0}E^n \underset{E_\infty^{p_0,n-p_0}}{\supseteq} F^{p_0+1}E^n = \_ = F^{p_0+r_0}E^n \underset{E_\infty^{p_0+r_0,n-p_0-r_0}}{\supseteq} F^{p_0+r_0+1}E^n = \_ = F^{n+1}E^n = 0$$

ergibt eine kurze exakte Sequenz $0 \to E_\infty^{p_0+r_0,n-p_0-r_0} \to E^n \to E_\infty^{p_0,n-p_0} \to 0.$ (☾)

(☾) + $(*)$ mit $q = n-p_0$, $p_1 := p_0+r_0$

$$0 \to E_\infty^{p_1,n-p_1} \to E^n \to E_2^{p_0,n-p_0} \xrightarrow{d_{r_0}} E_2^{p_1,n-p_1+1} \to E_\infty^{p_1,n-p_1+1} \to 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Alle zusammenkleben:

$$\_ \to E^{n-1} \to E_2^{p_0,n-1-p_0} \xrightarrow{d_{r_0}} E_2^{p_1,n-p_1} \to E^n \to E_2^{p_0,n-p_0} \xrightarrow{d_{r_0}} E_2^{p_1,n+1-p_1} \to E^{n+1} \to \_$$

6. $E_2^{p,q} = 0$ für $q \notin \{q_0, q_1 = q_0 - r_0 + 1\}$. Für $r_0 = 1$ siehe 2. Ansonsten $r_0 > 1$. Nichttriviale Differentiale sind $d_{r_0}^{p,q_0} : E_{r_0}^{p,q_0} \to E_{r_0}^{p+r_0,q_1}$.

$\Rightarrow E_{r_0}^{p,q} = E_2^{p,q}$, $E_{r_0+1}^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E^{p,q_0}_{r_0+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^{p,q_0}_{r_0} \arrow[r, "d_{r_0}"] \arrow[d, equal] & E^{p+r_0,q_1}_{r_0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^{p+r_0,q_1}_{r_0+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & E^{p,q_0}_{\infty} & E^{p,q_0}_{2} & E^{p+r_0,q_1}_{2} & E^{p+r_0,q_1}_{\infty} & \end{tikzcd} \quad \text{exakt} \quad (*)$$

$$F^pE^n/F^{p+1}E^n = E_\infty^{p,n-p} = \begin{cases} E^{n-q_0,q_0}_{r_0+1} & p = n-q_0 \\ E^{n-q_1,q_1}_{r_0+1} & p = n-q_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Filtration $E^n = F^0E^n = \dots = F^{n-q_0}E^n \underset{E_\infty^{n-q_0,q_0}}{\supseteq} F^{n-q_0+1}E^n = \dots = F^{n-q_1}E^n \underset{E_\infty^{n-q_1,q_1}}{\supseteq} F^{n-q_1+1}E^n = \dots = F^{n+1}E^n = 0$

ergibt $0 \to E_\infty^{n-q_1,q_1} \to E^n \to E_\infty^{n-q_0,q_0} \to 0$ (☾)

$(*) + $(☾) mit $p = n - q_1 - r_0 = n - q_0 - 1$:

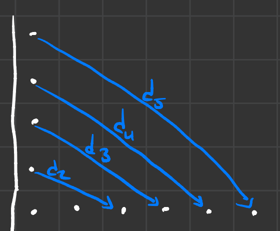
$$0 \to E_\infty^{n-q_0-1,q_0} \to E_2^{n-q_0-1,q_0} \to E_2^{n-q_1,q_1} \to E^n \to E_\infty^{n-q_0,q_0} \to 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Alle verkleben gibt:

$$\dots \to E^{n-1} \to E_2^{n-1-q_0,q_0} \xrightarrow{d_{r_0}} E_2^{n-q_1,q_1} \to E^n \to E_2^{n-q_0,q_0} \xrightarrow{d_{r_0}} E_2^{n+1-q_1,q_1} \to E^{n+1} \to \dots$$

7. $E_2^{p,q} = 0$ für $p,q>0$. Die nichttrivialen Differentiale sind

$$d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \longrightarrow E_n^{n,0}$$



Also wird jede Stelle (p,q) höchstens einmal von einem Differential beeinflusst.

$$\Rightarrow E_\infty^{p,q} = \begin{cases} E_2^{0,0} & p=0, q=0 \\ E_2^{1,0} & p=1, q=0 \\ \ker d_{q+1}^{0,q} & p=0, q>0 \\ \operatorname{coker} d_p^{p,0} & p \geq 1, q=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \longrightarrow E_\infty^{0,n-1} \longrightarrow E_2^{0,n-1} \xrightarrow{d_n^{0,n-1}} E_2^{n,0} \longrightarrow E_\infty^{n,0} \longrightarrow 0 \qquad (\ast)$$

$$E^n = F^0E^n \underset{E_\infty^{0,n}}{\supseteq} F^1E^n = \_ = F^nE^n \underset{E_\infty^{n,0}}{\supseteq} F^{n+1}E^n = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to E_\infty^{n,0} \longrightarrow E^n \longrightarrow E_\infty^{0,n} \longrightarrow 0 \qquad (☾)$$

$$(\ast)+(☾): \quad 0 \to E_\infty^{0,n-1} \to E_2^{0,n-1} \xrightarrow{d_n} E_2^{n,0} \longrightarrow E^n \longrightarrow E_\infty^{0,n} \longrightarrow 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Zusammenkleben:

$$\_ \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow E_2^{0,n-1} \xrightarrow{d_n} E_2^{n,0} \longrightarrow E^n \longrightarrow E_2^{0,n} \xrightarrow{d_{n+1}} E_2^{n+1,0} \longrightarrow E^{n+1} \longrightarrow \_$$

<u>Aufgabe 3</u> $\quad e_r^{p,q} := \dim E_r^{p,q}, \quad e^n := \dim E^n, \quad f_r^{p,q} := \operatorname{rk} d_r^{p,q}$

$$A_r := \sum_{p,q} (-1)^{p+q} e_r^{p,q}. \qquad \text{Auch für } r=\infty$$

$$e_{r+1}^{p,q} = \dim\left(\ker\left(E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r^{p,q}} E_r^{p+r,q-r+1}\right) / \operatorname{im}\left(E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d_r^{p-r,q+r-1}} E_r^{p,q}\right)\right)$$

def = dim Ker „Defekt"

$$= \operatorname{def} d_r^{p,q} - \operatorname{rk} d_r^{p-r,q+r-1} = e_r^{p,q} - f_r^{p,q} - f_r^{p-r,q+r-1}$$

$$A_{r+1} = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} e_{r+1}^{p,q} = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \left(e_r^{p,q} - f_r^{p,q} - f_r^{p-r,q+r-1}\right)$$

$$= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} e_r^{p,q} - \sum_{p,q} (-1)^{p+q} f_r^{p,q} + \sum_{p,q} (-1)^{(p-r)+(q+r-1)} f_r^{p-r,q+r-1}$$

$$= A_r - \sum_{p,q} (-1)^{p+q} f_r^{p,q} + \sum_{p',q'} (-1)^{p'+q'} f_r^{p',q'} = A_r$$

Also $A_r = A_2$ für alle $r \geq 2$. Für r groß genug werden alle Differentiale 0, also ist $E_\infty = E_r$ für $r \gg 0$ $\Rightarrow A_\infty = A_r = A_2$.

$$\sum_n (-1)^n e^n = \sum_n (-1)^n \dim\left(F^0E^n / F^{n+1}E^n\right) = \sum_n (-1)^n \sum_p \dim\underbrace{\left(F^pE^n / F^{p+1}E^n\right)}_{E_\infty^{p,n-p}}$$

$$= \sum_{n,p} (-1)^n e_\infty^{p,n-p} \overset{q=n-p}{=} \sum_{p,q} (-1)^{p+q} e_\infty^{p,q} = A_\infty = A_2$$

Aufgabe 4 $\quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

f kohomologische Dimension $\leq n$, g kohomologische Dimension $\leq m$.

$\mathcal{F} \in \mathrm{Qcoh}\, X$

$f^* \dashv f_*$ und f^* exakt $\Rightarrow f_*$ erhält Injektive.

Insbesondere gehen Injektive auf azyklische Garben.

Grothendieck-Spektralsequenz: $E_2^{p,q} = R^p g_* \underbrace{(R^q f_* \mathcal{F})}_{\in \mathrm{Qcoh}\, Y \text{ nach VL}} \Longrightarrow R^{p+q}(g_* f_*)\mathcal{F} = E^{p+q}$

$E_2^{p,q} = 0$ für $p > m$ oder $q > n$ $\Rightarrow E_\infty^{p,q} = 0$ für $p > m$ oder $q > n$

$\Rightarrow E_\infty^{p,q} = 0$ für $p+q > n+m$. Für $i > n+m$ hat also die Filtration $F^\bullet$ von E^i nur triviale Schritte. $\Rightarrow R^i(g \circ f)_* \mathcal{F} = E^i = 0$ für $i > n+m$.