Blatt 6

Aufgabe 1 Čech-Spektralsequenz:

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(U, \mathcal{H}^q\mathcal{F}) \Longrightarrow H^{p+q}(U,\mathcal{F}) = E^{p+q}$$

Für $q>0$ ist $\check{H}^0(U, \mathcal{H}^q\mathcal{F}) = (\mathcal{H}^q\mathcal{F})^+(U) = 0$ nach Vorlesung

E_2:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
q & 0 & * & * & * \\
 & 0 & \check{H}^1(U,\mathcal{H}^1\mathcal{F}) \arrow[rrd, "d_2^{1,1}"] & * & * \\
 & \check{H}^0(U,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(U) & \check{H}^1(U,\mathcal{F}) & \check{H}^2(U,\mathcal{F}) & \check{H}^3(U,\mathcal{F}) \\
 & & p & &
\end{tikzcd}$$

Das einzige nichttriviale Differential, das eine der oben eingetragenen Stellen beeinflussen kann, ist $d_2^{1,1}$.

$$\rightsquigarrow \quad E_\infty^{2,0} = E_2^{2,0} = \check{H}^2(U,\mathcal{F})$$

$$E_\infty^{3,0} = E_3^{3,0} = \operatorname{coker} d_2^{1,1}$$

$$E_\infty^{1,1} = E_3^{1,1} = \ker d_2^{1,1}$$

Also gibt es eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow E_\infty^{1,1} \longrightarrow \check{H}^1(U,\mathcal{H}^1\mathcal{F}) \xrightarrow{d_2^{1,1}} \check{H}^3(U,\mathcal{F}) \longrightarrow E_\infty^{3,0} \longrightarrow 0 \qquad (\square)$$

Der letzte Filtrationsschritt für $E^3 = H^3(U,\mathcal{F})$ ist $F^3E^3 \supseteq F^4E^3 = 0$

mit Quotient $E_\infty^{3,0}$ $\Rightarrow$ $E_\infty^{3,0} = F^3E^3 \hookrightarrow E^3 = H^3(U,\mathcal{F})$ $\qquad (\circ)$

Die Filtration von $E^2 = H^2(U,\mathcal{F})$ hat die Form

$$H^2(U,\mathcal{F}) = F^0E^2 = F^1E^2 \supseteq F^2E^2 \supseteq F^3E^2 = 0$$

Quotienten: $E_\infty^{1,1}$ $\qquad$ $E_\infty^{2,0} = \check{H}^2(U,\mathcal{F})$ (s.o.)

$\rightsquigarrow$ Exakte Sequenz $\quad 0 \to \check{H}^2(U,\mathcal{F}) \to H^2(U,\mathcal{F}) \to E_\infty^{1,1} \to 0 \quad (\triangle)$

$(\triangle) + (\square) + (\circ)$ verkleben:

$$0 \to \check{H}^2(U,\mathcal{F}) \to H^2(U,\mathcal{F}) \to \check{H}^1(U,\mathcal{H}^1\mathcal{F}) \xrightarrow{d_2^{1,1}} \check{H}^3(U,\mathcal{F}) \to H^3(U,\mathcal{F})$$

Aufgabe 2

1. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in Sh(\mathcal{C}', T')$. Zeige dass

$$\begin{array}{cccc} i_*: & \mathrm{Hom}_{Sh\mathcal{C}'}(\mathcal{F},\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{Sh\mathcal{C}}(i_*\mathcal{F}, i_*\mathcal{G}) \\ & \| & & \| \\ & \mathrm{Nat}_{\mathcal{C}'^{op}\to Sets}(\mathcal{F},\mathcal{G}) & & \mathrm{Nat}_{\mathcal{C}^{op}\to Sets}(\mathcal{F}\circ i^0, \mathcal{G}\circ i^0) \\ & f = (f_{U'})_{U'\in\mathcal{C}'} & \longmapsto & i_*f = f\circ i^0 = (f_U)_{U\in\mathcal{C}} \end{array}$$

bijektiv ist.

Injektivität: Seien $f,g: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $i_*f = i_*g$, also $f_U = g_U \ \forall U \in \mathcal{C}$.

Sei $U' \in \mathcal{C}'$, wähle $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U')_{i\in I} \in T'$ mit $U_i \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r, hook, "(\mathcal{F}(\varphi_i))_i"] \arrow[d, shift right, "f_{U'}"'] \arrow[d, shift left, "g_{U'}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \arrow[d, "\prod_i f_{U_i} = \prod_i g_{U_i}"] \\
\mathcal{G}(U') \arrow[r, hook, "(\mathcal{G}(\varphi_i))_i"'] & \prod_i \mathcal{G}(U_i)
\end{tikzcd}$$

$$(\mathcal{G}(\varphi_i))_i \circ f_{U'} = \left(\prod_i f_{U_i}\right) \circ (\mathcal{F}(\varphi_i))_i = \left(\prod_i g_{U_i}\right) \circ (\mathcal{F}(\varphi_i))_i = (\mathcal{G}(\varphi_i))_i \circ g_{U'}$$

Nach Garbenaxiom ist $(\mathcal{G}(\varphi_i))_{i\in I} : \mathcal{G}(U') \longrightarrow \prod_i \mathcal{G}(U_i)$ injektiv.

$\Rightarrow f_{U'} = g_{U'}$. Also $f = g$.

<u>Surjektivität</u> Sei $h = (h_U)_{U \in \mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{Sh\mathcal{C}}(i_*\mathcal{F}, i_*\mathcal{G})$.

Für $U' \in \mathcal{C}'$ wähle $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U')_{i \in I} \in T'$ mit $U_i \in \mathcal{C}$.

Zeige zunächst, dass im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r, hook, "r"] \arrow[d, dashed, red, "f_{U'}"'] & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \arrow[d, "\prod_i h_{U_i}"] \\
\mathcal{G}(U') \arrow[r, hook, "r"'] & \prod_i \mathcal{G}(U_i)
\end{tikzcd}$$

ein roter Morphismus $f_{U'}$ existiert. Eindeutigkeit von $f_{U'}$ haben wir oben schon gesehen.

Für $i,j \in I$ wähle $\left(V_{ijk} \longrightarrow \overbrace{U_i \times_{U'} U_j}^{\text{Vorsicht, das muss nicht in } \mathcal{C} \text{ liegen, wenn } U' \in \mathcal{C}'!}\right)_{k \in K_{ij}} \in T'$, $V_{ijk} \in \mathcal{C}$ $\forall i,j,k$

Nach Garbenaxiom ist $\mathcal{G}(U_i \times_{U'} U_j) \longrightarrow \prod_k \mathcal{G}(V_{ijk})$ injektiv für alle i,j, also ist $s: \prod_{i,j} \mathcal{G}(U_i \times_{U'} U_j) \longrightarrow \prod_{i,j,k} \mathcal{G}(V_{ijk})$ es auch

Nach Garbenaxiom ist $\mathcal{G}(U') = \mathrm{Eq}\left(\prod_i \mathcal{G}(U_i) \underset{\pi_2^*}{\overset{\pi_1^*}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{G}(U_i \times_{U'} U_j)\right)$.

Komposition mit einer injektiven Abbildung ändert Egalisatoren nicht,

also $\mathcal{G}(U') = \mathrm{Eq}\left(\prod_i \mathcal{G}(U_i) \underset{s \circ \pi_2^*}{\overset{s \circ \pi_1^*}{\rightrightarrows}} \prod_{ijk} \mathcal{G}(V_{ijk})\right)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r, "r"] \arrow[d, dashed, "f_{U'}"'] & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left, "s\circ\pi_1^*"] \arrow[r, shift right, "s\circ\pi_2^*"'] \arrow[d, "\prod_i h_{U_i}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod_{ijk} \mathcal{F}(V_{ijk}) \arrow[d, "\prod_{ijk} h_{V_{ijk}}"] \\
\mathcal{G}(U') \arrow[r, "r"'] & \prod_i \mathcal{G}(U_i) \arrow[r, shift left, "s\circ\pi_1^*"] \arrow[r, shift right, "s\circ\pi_1^*"'] & \prod_{ijk} \mathcal{G}(V_{ijk})
\end{tikzcd}$$

$$(s\circ\pi_1^*)\circ\left(\prod_i h_{U_i}\right)\circ r = \left(\prod_{ijk} h_{V_{ijk}}\right)\circ s\circ\pi_1^*\circ r$$

$$\shortparallel \qquad \pi_1^*\circ r = \pi_2^*\circ r$$

$$(s\circ\pi_2^*)\circ\left(\prod_i h_{U_i}\right)\circ r = \left(\prod_{ijk} h_{ijk}\right)\circ s\circ\pi_2^*\circ r$$

Also faktorisiert $\left(\prod_i h_{U_i}\right)\circ r$ durch den Egalisator $\mathcal{G}(U')$ von $s\circ\pi_1^*$ und $s\circ\pi_2^*$. $\rightsquigarrow$ $f_{U'}$ existiert.

Nun zeige, dass $f_{U'}$ unabhängig von der Wahl der Überdeckung ist. Seien $\mathcal{U}=(U_i\to U')_{i\in I}$ und $\mathcal{V}=(V_j\to U')_{j\in J}$ zwei Überdeckungen. Da beide eine gemeinsame Verfeinerung haben, ist oBdA $\mathcal{U}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$. Dann kommutieren

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r] \arrow[d, "f_{U',\mathcal{V}}"'] & \prod_j \mathcal{F}(V_j) \arrow[r] \arrow[d, "\prod_j h_{V_j}"] & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \arrow[d, "\prod_i h_{U_i}"] \\
\mathcal{G}(U') \arrow[r] & \prod_j \mathcal{G}(V_j) \arrow[r] & \prod_i \mathcal{G}(U_i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r] \arrow[d, "f_{U',\mathcal{U}}"'] & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \arrow[d, "\prod_i h_{U_i}"] \\
\mathcal{G}(U') \arrow[r] & \prod_i \mathcal{G}(U_i)
\end{tikzcd}$$

Nach Eindeutigkeit von $f_{U'}$ für die Überdeckung $\mathcal{U}$ ist $f_{U',\mathcal{U}}=f_{U',\mathcal{V}}$.

Nun ist $f = (f_{U'})_{U' \in \mathcal{C}'}$ ein Garbenhomomorphismus:

Sei $U' \xrightarrow{\varphi} V'$ in $\mathcal{C}'$. Wähle eine Überdeckung $(V_j \xrightarrow{\psi_j} V')_j$ mit $V_j \in \mathcal{C}$. Dann ist auch $(V_j \times_{V'} U' \longrightarrow U')_j$ eine Überdeckung. Zu jedem j wähle eine Überdeckung $(U_{ij} \longrightarrow V_j \times_{V'} U')_i$ mit $U_{ij} \in \mathcal{C}$. Komposition ergibt eine Überdeckung

$$(U_{ij} \xrightarrow{\chi_{ij}} U')_{i,j} = (U_{ij} \longrightarrow V_j \times_{V'} U' \longrightarrow U')_{i,j}$$

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \arrow[dr] \arrow[rr, bend left, "\chi_{ij}"] \arrow[ddr, bend right, "p_{ij}"'] & & \\
& V_j \times_{V'} U' \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d, "\varphi"] \\
& V_j \arrow[r, "\psi_j"'] & V'
\end{tikzcd}$$

kommutiert. (*)

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V') \arrow[rrr, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\psi^*"'] \arrow[ddd, "f_{V'}"'] & & & \mathcal{F}(U') \arrow[dl, "\chi^*"] \arrow[ddd, "f_{U'}"] \\
& \prod_j \mathcal{F}(V_j) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "\prod h_{V_j}"] & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \arrow[d, "\prod h_{U_i}"] & \\
& \prod_j \mathcal{G}(V_j) \arrow[r, "p^*"] & \prod_i \mathcal{G}(U_i) & \\
\mathcal{G}(V') \arrow[rrr, "\varphi^*"'] \arrow[ur, "\psi^*"] & & & \mathcal{G}(U') \arrow[ul, "\chi^*"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert wegen (*)

Kommutiert, weil h ein Garbenmorphismus ist

Kommutiert nach Definition von $f_{U'}, f_{V'}$

Diagrammjagd: $\mathcal{F}(V') \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{F}(U') \xrightarrow{f_{U'}} \mathcal{G}(U') \xrightarrow{\iota^*} \prod_i \mathcal{G}(U_i)$

ist gleich

$$\mathcal{F}(V') \xrightarrow{f_{V'}} \mathcal{G}(V') \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{G}(U') \xrightarrow{\iota^*} \prod_i \mathcal{G}(U_i)$$

ι^* ist injektiv nach Garbenaxiomen $\Rightarrow f_{U'} \circ \varphi^* = \varphi^* \circ f_{V'}$,

also $f = (f_{U'})_{U' \in \mathcal{C}'} \in \mathrm{Hom}_{Sh\,\mathcal{C}'}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Was ist $i_* f$?

Sei $U \in \mathcal{C}$. In der Definition von f_U wähle die triviale Überdeckung $(U \xrightarrow{id} U)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_U"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "h_U"] \\
\mathcal{G}(U) \arrow[r, equal] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow f_U = h_U$$

Also ist $i_* f = (f_U)_{U \in \mathcal{C}} = (h_U)_{U \in \mathcal{C}} = h$.

2. Zeige, dass für $U \in \mathcal{C}$ der Morphismus $\mathcal{F}(U) \to (i_* i^{-1}\mathcal{F})(U) = (i^{-1}\mathcal{F})(U)$ ein Isomorphismus ist. Er faktorisiert als

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} i^P\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta} (i^P\mathcal{F})^+(U) \xrightarrow{\gamma} (i^P\mathcal{F})^\#(U) = (i^{-1}\mathcal{F})(U)$$

$$i^p\mathcal{F}(U) = \operatorname*{colim}_{U\to V\in\mathcal{C}} \mathcal{F}(V) \overset{\uparrow}{=\!=} \mathcal{F}(U) \quad \rightsquigarrow \alpha \text{ Isomorphismus}$$

$U \xrightarrow{id} U$ ist initial in der Indexkategorie

Sei $(U_i' \to U)_{i\in I} \in T'$ eine Überdeckung von U. Zu jedem i wähle $(U_{ij} \to U_i')_{j\in J_i} \in T'$ mit $U_{ij} \in \mathcal{C}$. Dann ist $(U_{ij} \to U_i' \to U)_{i,j} \in T'$ eine Verfeinerung von $(U_i' \to U)_i$ und liegt sogar in T. $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}_T(U)$ ist kofinal in $\mathrm{Cov}_{T'}(U)$.

$$(i^p\mathcal{F})^+(U) = \varinjlim_{(U_i'\to U)\in T'} \mathrm{Eq}\Big(\prod_i i^p\mathcal{F}(U_i') \rightrightarrows \prod_{i,j} i^p\mathcal{F}(U_i' \times_U U_j')\Big)$$

$$\overset{\text{Kofinal}}{=} \varinjlim_{(U_i\to U)\in T} \mathrm{Eq}\Big(\prod_i i^p\mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} i^p\mathcal{F}(U_i \times_U U_j)\Big)$$

$\in \mathcal{C}$

$$\underset{\text{bei }\alpha}{\overset{\text{wie}}{=}} \varinjlim_{(U_i\to U)\in T} \mathrm{Eq}\Big(\prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)\Big)$$

$$\overset{\mathcal{F}\text{ Garbe}}{=} \varinjlim_{(U_i\to U)\in T} \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U) = i^p\mathcal{F}(U)$$

$\rightsquigarrow \beta$ Isomorphismus. Analog auch γ.

3. i_* ist volltreu nach 1. und essentiell surjektiv nach 2., denn für $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}\,\mathcal{C}$ ist $\mathcal{F} \cong i_* i^{-1}\mathcal{F} \in \operatorname{im} i_*$. $\Rightarrow$ i_* ist Äquivalenz.

Nach 2. ist $i_* i^{-1} \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{Sh}\,\mathcal{C}}$, also ist i^{-1} ein Quasiinverses zu i_*.

Alternativ (und etwas genauer):

Sei $\Phi : \mathrm{Hom}_{Sh\mathcal{C}}(\mathcal{F}, i_*\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Sh\mathcal{C}'}(i^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G})$ die Adjunktion.

Wegen Natürlichkeit in $\mathcal{G}$ gilt für Morphismen $f : \mathcal{F} \to i_*\mathcal{G}$, $g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$:

$\Phi(i_* g \circ f) = g \circ \Phi(f)$. Für $\mathcal{F} = i_*\mathcal{G}$, $f = \mathrm{id}$ ergibt das

$$\Phi(i_* g) = g \circ \Phi(\mathrm{id}) = g \circ \eta \quad \text{mit} \quad \eta = \Phi(\mathrm{id}_{i_*\mathcal{G}}) : i^{-1} i_* \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

der Koeinheit.

$$g \longmapsto g \circ \eta$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \arrow[rr, "\eta^*"] \arrow[dr, "i_*", "\sim"'] & & \mathrm{Hom}(i^{-1} i_* \mathcal{G}, \mathcal{G}') \\
& \mathrm{Hom}(i_*\mathcal{G}, i_*\mathcal{G}') \arrow[ur, "\Phi", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \eta^*$ bijektiv $\forall \mathcal{G}'$ $\overset{\text{Yoneda}}{\Rightarrow}$ $\eta : i^{-1} i_* \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ Isomorphismus

Also haben wir natürliche Isomorphismen $i^{-1} i_* \to \mathrm{Id}_{Sh\mathcal{C}}$ und $\mathrm{Id}_{Sh\mathcal{C}'} \to i_* i^{-1}$ $\Rightarrow i_*, i^{-1}$ inverse Äquivalenzen.

Aufgabe 3+4

1. Sei $C^0 \xrightarrow{\omega} I^{0,\bullet}$ eine injektive Auflösung. Sei $I^{p,q} = 0$ für $p \neq 0$.

Dann ist $C^\bullet \to I^{\bullet\bullet}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung

$$R^i F(C^\bullet) = H^i(\mathrm{Tot}(F I^{\bullet\bullet})) = H^i\Big(\_ \xrightarrow{d} \bigoplus_{p+q=n} \underbrace{F I^{pq}}_{\substack{0 \text{ für} \\ p \neq 0}} \xrightarrow{d} \_\Big)$$

$$= H^i\left(\_ \xrightarrow{d} FI^{0q} \xrightarrow{d} \_ \right) = H^i(FI^\bullet) = R^iF(C^\bullet)$$

2. Sei $C^\bullet \to I^{\bullet\bullet}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung.

$FI^{\bullet\bullet}$ ist ein Doppelkomplex, also gibt es eine Spektralsequenz

$$E_0^{pq} = F(I^{pq}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}(FI^{\bullet\bullet})) = R^{p+q}F(C^\bullet)$$

mit $d_0^{pq}: E_0^{pq} \to E_0^{p,q+1}$ dem vertikalen Differential des Doppelkomplexes (bis auf Vorzeichen).

$$\Rightarrow E_1^{pq} = H^{p,q}(E_0) = H^q(E_0^{p,\bullet}) = H^q(F(I^{p\bullet})) = R^qF(C^p)$$

Inj. Aufl. von C^p

3. Erhalte Doppelkomplex $FI^{\bullet\bullet}$ wie oben. Sei $D^{\bullet\bullet}$ sein Transponiertes, also $D^{pq} = FI^{qp}$. Dazu Spektralsequenz:

$$E_0^{p,q} = D^{pq} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}(D^{\bullet\bullet})) = H^{p+q}(\mathrm{Tot}(FI^{\bullet\bullet})) = R^{p+q}F(C^\bullet)$$

mit $d_0^{pq}: E_0^{pq} \to E_0^{p,q+1}$ dem vertikalen Differential von $D^{\bullet\bullet}$, also dem horizontalen von $FI^{\bullet\bullet}$.

$$\Rightarrow E_1^{pq} = H^{pq}(E_0) = H^q(E_0^{p,\bullet}) = H^q(FI^{\bullet p}) \overset{*}{=} F H^q(I^{\bullet p})$$

Ad $*$: Nach Definition einer Cartan-Eilenberg-Auflösung sind alle I^{qp} und alle Kerne $Z^q I^{\bullet p} = \ker(I^{qp} \xrightarrow{d} I^{q+1,p})$ injektiv.

Sei $B^q I^{\bullet p} = \mathrm{im}(I^{q-1,p} \xrightarrow{d} I^{qp})$. Die exakte Sequenz

$0 \to Z^q I^{\bullet p} \longrightarrow I^{qp} \xrightarrow{d} B^{q+1} I^{\bullet p} \to 0$ spaltet, da $Z^q I^{\bullet p}$ injektiv ist, also $I^{qp} = Z^q I^{\bullet p} \oplus B^{q+1} I^{\bullet p}$ und damit sind alle $B^q I^{\bullet p}$ injektiv. Nochmal für $0 \to B^q I^{\bullet p} \to Z^q I^{\bullet p} \longrightarrow H^q(I^{\bullet p}) \to 0$

$$\rightsquigarrow \quad Z^q I^{\bullet p} = B^q I^{\bullet p} \oplus H^q(I^{\bullet p})$$

$$\Rightarrow I^{qp} = B^q I^{\bullet p} \oplus H^q(I^{\bullet p}) \oplus B^{q+1} I^{\bullet p}$$

und die Differentiale haben die Form

„$I^{\bullet p}$ spaltet“

$$B^q \oplus H^q \oplus B^{q+1} \longrightarrow B^{q+1} \oplus H^{q+1} \oplus B^{q+2}$$

$$(x, y, z) \longmapsto (z, 0, 0)$$

$F I^{\bullet p}$ hat die Form

$$\to FB^q \oplus FH^q \oplus FB^{q+1} \longrightarrow FB^{q+1} \oplus FH^{q+1} \oplus FB^{q+2}$$

$$(x, y, z) \longmapsto (z, 0, 0)$$

$$\Rightarrow H^q(F I^{\bullet p}) = F H^q(I^{\bullet p})$$

Also $E_1^{pq} = FH^q(I^{\bullet p})$ und die Differentiale $d_1^{p,q} : E_1^{pq} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$ sind induziert von den vertikalen Differentialen von $I^{\bullet\bullet}$.

Nach Definition einer Cartan-Eilenberg-Auflösung ist $(H^q(I^{\bullet p}))_p$ mit d_1 eine injektive Auflösung von $H^q(C^\bullet)$.

$$\Rightarrow E_2^{pq} = H^{pq}(E_1) = H^p\Big((F \underbrace{H^q(I^{\bullet p}))_p}_{\text{inj. Aufl. von } H^q(C^\bullet)} \Big) = R^pF(H^q(C^\bullet))$$

4. $d^2(f \cdot dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m) = d(1 \cdot df \wedge dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m)$

$= \underbrace{d1}_{\substack{0,\text{ da} \\ 1 \in k}} \wedge df \wedge dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m = 0$

$\Omega^1_{X/k}$ ist Garbe von k-Vektorräumen

$\Rightarrow \Omega^r_{X/k} = \Lambda^r \Omega_{X/k}$ Garbe von k-Vektorräumen

Differentiale sind auch k-linear $\rightsquigarrow \Omega^\bullet_{X/k}$ Komplex von Garben von k-Vektorräumen. Sei $\Omega^\bullet_{X/k} \to \mathcal{J}^{\bullet\bullet}$ Cartan-Eilenberg-Auflösung in der Kategorie der Garben von k-Vektorräumen. Nach letztem Semester sind alle $\mathcal{J}^{pq}$ welk, also Γ_X-azyklisch. Wie bei gewöhnlicher Kohomologie kann man statt einer Cartan-Eilenberg-auch eine beliebige azyklische Auflösung nehmen.

$\Rightarrow H^i_{dR}(X/k) = \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_{X/k}) = H^i(\mathrm{Tot}(\underbrace{\mathcal{J}^{pq}(X)}_{k\text{-VR}}))$ ist k-Vektorraum.

5. Induktion nach m.

$m=0$: $d_0(f) = d_0(f \cdot 1) = df \cdot 1 + f \cdot \underbrace{d1}_{0} = df$

$m>0$: $d_m(f \cdot dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m) = df \wedge (dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m) + f d_m(dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m)$

$= df \wedge dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m + f \cdot d_m(d_{m-1}(g_1 dg_2 \wedge \_ \wedge dg_m))$

$= df \wedge dg_1 \wedge \_ \wedge dg_m$

6. Spektralsequenz aus 2. : $E_1^{pq} = H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X/k)$

Für $q > n$ ist $E_1^{pq} = 0$ nach Verschwindungssatz von Grothendieck.

Für $p > n$ ist $\Omega^p_{X/k} = 0$, da $\Omega^1_{X/k}$ lokal frei von Rang n ist. $\Rightarrow E_1^{pq} = 0$

$\Rightarrow E_1^{pq} = 0$ für $p+q > 2n$ $\quad \Rightarrow E_\infty^{pq} = 0$ für $p+q > 2n$

$\Rightarrow$ Für $m > 2n$ sind in der Filtration von $E^m = H^m_{dR}(X/k)$ alle Schritte trivial $\Rightarrow H^m_{dR}(X/k) = 0$ für $m > 2n$.

7. Spektralsequenz aus 2.: $E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X/k)$

X glatt, projektiv, $\Omega^p_{X/k}$ lokal frei, also quasikohärent

$\overset{AG2}{\Longrightarrow} \dim_k E_1^{pq} < \infty \;\; \forall p,q \quad \Rightarrow \dim_k E_\infty^{pq} < \infty \;\; \forall pq$

$\Rightarrow \dim H^i_{dR}(X/k) = \sum_{p=0}^{i} \dim_k E_\infty^{p,i-p} < \infty$

8. Gleiche Spektralsequenz nochmal + Blatt 5, Aufgabe 3

Aufgabe 5*

1. (a) Jede Prägarbe ist eine Garbe auf $\mathcal{D}$

Alle Morphismen in $\mathcal{D}$ sind Isomorphismen. Damit ist jedes kommutative Quadrat kartesisch. Insbesondere ist ein Faserprodukt für $* \xrightarrow{g} * \xleftarrow{h} *$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "h^{-1}g"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & * \arrow[d, "h"] \\ * \arrow[r, "g"'] & * \end{tikzcd}.$$

Sei $\mathcal{F} \in PSh\, \mathcal{D}$ und definiere $X := \mathcal{F}(*)$. Für eine Überdeckung

$(* \xrightarrow{g_i} *)_{i\in I}$, $I \neq \emptyset$ betrachte

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(*) \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & \prod_i \mathcal{F}(*) \arrow[r, shift left, "t_1"] \arrow[r, shift right, "t_2"'] \arrow[d, equal] & \prod_{i,j} \mathcal{F}(* \times_{g_i,*,g_j} *) \arrow[d, equal] \\
X & X^I & X^{I\times I}
\end{tikzcd}$$

Mit der Wahl der Faserprodukte wie oben ist

$$s(x) = (g_i^* x)_{i\in I} \qquad t_1(x_i)_{i\in I} = (e^* x_i)_{i,j\in I} = (x_i)_{i,j\in I}$$

$$t_2(x_i)_{i\in I} = ((g_j^{-1} g_i)^* x_j)_{i,j\in I}$$

<u>s ist injektiv:</u> Sei $s(x)=s(y)$. Wähle $i_0 \in I$.

$$(g_i^* x)_{i\in I} = (g_i^* x)_{i\in I} \Rightarrow g_{i_0}^* x = g_{i_0}^* y$$

$$\Rightarrow x = (g_{i_0}^{-1})^* g_{i_0}^* x = (g_{i_0}^{-1})^* g_{i_0}^* y = y$$

<u>$t_1 \circ s = t_2 \circ s$:</u> $t_2 \circ s(x) = t_2(g_i^*(x))_{i\in I} = \left((g_j^{-1} g_i)^* g_j^*(x)\right)_{i,j\in I} = \left((g_j g_j^{-1} g_i)^* x\right)_{i,j\in I}$

$$= (g_i^* x)_{i,j\in I} = t_1 (g_i^* x)_{i\in I} = t_1 \circ s(x)$$

<u>s hat das richtige Bild</u> Sei $(x_i)_{i\in I} \in X^I$ mit $t_1(x_i)_{i\in I} = t_2(x_i)_{i\in I}$.

$$\Rightarrow (x_i)_{i,j\in I} = \left((g_j^{-1} g_i)^* x_j\right)_{i,j\in I}$$

$$\Rightarrow (g_i^{-1})^* x_i = (g_i^{-1})^* (g_j^{-1} g_i)^* x_j = (g_j^{-1})^* x_j \qquad \forall i,j$$

$$\Rightarrow x := (g_i^{-1})^* x_i \text{ ist unabhängig von } i \in I$$

$$s(x) = (g_i^* x)_{i\in I} = \left(g_i^* (g_i^{-1})^* x_i\right)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$$

$\rightsquigarrow$ Garbenaxiom ist erfüllt. $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Sh}\,\mathcal{D} = \mathrm{PSh}\,\mathcal{D}$.

$$\mathrm{PSh}\,\mathfrak{D} \xrightarrow{F} G\text{-Sets}$$

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(*) \text{ mit } G\text{-Operation}$$

$$g\cdot x = (g^{-1})^* x$$

$$\left(\mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G}\right) \longmapsto \left(\mathcal{F}(*) \xrightarrow{h(*)} \mathcal{G}(*)\right)$$

$\mathcal{F}(*)$ ist G-Menge, denn:

- $e\cdot x = (e^{-1})^* x = \mathrm{id}^* x = x$
- $g\cdot(h\cdot x) = (g^{-1})^*((h^{-1})^* x) = (h^{-1}g^{-1})^* x = ((gh)^{-1})^* x = gh\cdot x$

$F(h)$ ist G-äquivariant:

$$F(h)(g\cdot x) = h(*)((g^{-1})^* x) \overset{\text{Hom von}}{\underset{\text{Prägarben}}{=}} (g^{-1})^* h(*)(x) = g\cdot F(h)(x)$$

F Funktor ist klar.

$$G\text{-Sets} \xrightarrow{G} \mathrm{PSh}\,\mathfrak{D}$$

$$X \longmapsto \mathcal{F}_X \text{ mit}$$

$$\mathcal{F}_X(*) = X, \quad g^*: \mathcal{F}_X(*) \longrightarrow \mathcal{F}_X(*)$$
$$x \longmapsto g^{-1}\cdot x$$

$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \longmapsto \left(\mathcal{F}_X(*) \xrightarrow{f} \mathcal{F}_Y(*)\right)$$

$\mathcal{F}_X$ ist eine Prägarbe, denn

- $e^* x = e^{-1}\cdot x = e\cdot x = x$
- $h^* g^* x = h^{-1}\cdot g^{-1}\cdot x = (gh)^{-1}\cdot x = (gh)^* x$

Gf ist Prägarbenhomomorphismus, denn:

$$(Gf)(*)(g^* x) = f(g^{-1}.x) = g^{-1}.f(x) = g^*(Gf)(*)(x)$$

G Funktor ist klar.

$$GF = \mathrm{Id}_{PSh\mathcal{D}}, \qquad FG = \mathrm{Id}_{G\text{-Sets}}$$

$\Rightarrow$ $PSh\mathcal{D}$ und G-Sets äquivalent (sogar isomorph)

2. $i^0 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$

$$* \longmapsto G$$

$$(* \xrightarrow{g} *) \longmapsto \rho_{g^{-1}} : (x \longmapsto x g^{-1})$$ Rechtstranslation mit g^{-1}

i^0 Funktor: $i^0(g) \circ i^0(h) = \rho_{g^{-1}} \circ \rho_{h^{-1}} = \rho_{h^{-1}g^{-1}} = \rho_{(gh)^{-1}} = i^0(gh)$

i^0 stetig: • $(* \xrightarrow{g_i} *)_{i \in I \neq \emptyset}$ Überdeckung geht auf $(G \xrightarrow{\rho_{g_i^{-1}}} G)_{i \in I}$.

Jedes $\rho_{g_i^{-1}}$ ist bijektiv, $I \neq \emptyset$ $\rightsquigarrow$ $(G \xrightarrow{\rho_{g_i^{-1}}} G)_{i \in I}$ surjektive Familie, also Überdeckung.

• In $\mathcal{D}$ ist nach oben $* \underset{g,*,h}{\times} * = *$.

$$i^0(*) \underset{i^0(g), i^0(*), i^0(h)}{\times} i^0(*) = G \underset{\rho_{g^{-1}}, G, \rho_{h^{-1}}}{\times} G = \{(x,y) \in G \times G : \rho_{g^{-1}}(x) = \rho_{h^{-1}}(y)\}$$

$$= \{(x,y) \in G \times G : x g^{-1} = y h^{-1}\} = \{(x, x g^{-1} h) : x \in G\} \underset{\pi_1}{\cong} G = i^0(*)$$

$\rightsquigarrow$ i^0 erhält Faserprodukte

$\rightsquigarrow$ i^0 gibt Situsmorphismus $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Zeige, dass Voraussetzungen von Aufgabe 2 erfüllt sind.

(a) i^0 treu: Sei $i^0(g) = i^0(h)$

$$\Rightarrow g^{-1} = \rho_{g^{-1}}(e) = i^0(g)(e) = i^0(h)(e) = \rho_{h^{-1}}(e) = h^{-1} \quad \Rightarrow g = h$$

i^0 voll: Sei $f: G \to G$ G-äquivariant, $g := f(e)^{-1} \in G$.

Behauptung: $f = i^0(g)$

$$f(x) = f(x \cdot e) = x f(e) = x g^{-1} = \rho_{g^{-1}}(x) = i^0(g)(x) \quad \forall x \in G$$

✓

(b) Sei $\mathcal{U} = (* \xrightarrow{g_i} *)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{D}$. Das Bild unter i^0 ist $i^0(\mathcal{U}) = (G \xrightarrow{\rho_{g_i^{-1}}} G)_{i \in I}$. Alle $\rho_{g_i^{-1}}$ sind bijektiv, also ist $i^0(\mathcal{U})$ genau dann eine Überdeckung, wenn $I \neq \emptyset$, also wenn $\mathcal{U}$ eine Überdeckung ist.

(c) Sei $X \in G\text{-Sets}$. Zu $x \in X$ gibt es eine äquivariante Abbildung $\alpha_x : G \longrightarrow X$, $g \mapsto gx$.

$\rightsquigarrow (G \xrightarrow{\alpha_x} X)_{x \in X}$ ist eine surjektive Familie, also eine Überdeckung mit Objekten, die von $\mathcal{D}$ herkommen.

2. anwendbar $\rightsquigarrow$ $Sh\, \mathcal{C} \cong Sh\, \mathcal{D} = G\text{-Sets}$

<u>Aufgabe 6*</u> 1.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & \arrow[d, phantom, "2"] & Z \arrow[dl, "v"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

in Top mit u, v lokale Homöomorphismen

Sei $y \in Y$, $x = u(y)$, $z = f(y)$. Es gibt Umgebungen V_0 von y, W_0 von z und U_1, U_2 von x mit $u: V_0 \to U_1$, $v: W_0 \to U_2$ Homöomorphismen

Sei $V = (u|_{V_0})^{-1}(U_1 \cap U_2) = V_0 \cap u^{-1}(U_1 \cap U_2) \ni y$ und

$W = (v|_{W_0})^{-1}(U_1 \cap U_2) = W_0 \cap v^{-1}(U_1 \cap U_2) \ni z$

$\rightsquigarrow$ $u: V \longrightarrow U_1 \cap U_2$ und $v: W \longrightarrow U_1 \cap U_2$ Homöomorphismen

$\Rightarrow$ $f = v^{-1} \circ u : V \longrightarrow W$ Homöomorphismus

2. • Isomorphismen in $\mathcal{C}_X$ sind Homöomorphismen, also surjektiv

• Komposition von surjektiven Familien ist surjektive Familie

• Diagramm $Y \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y'$ in $\mathcal{C}_X$. In Top/X ist das Faserprodukt $Y \times_Z Y' = \{(y,y') \in Y \times Y' : f(y) = g(y')\}$, Topologie induziert von der Produkttopologie auf $Y \times Y'$. Zeige, dass das in $\mathcal{C}_X$ liegt, denn ist es auch das Faserprodukt in $\mathcal{C}_X$. Sei $(y,y') \in Y \times_Z Y'$ und $x \in X$ das Bild unter der Strukturabbildung. Wähle Umgebungen U_i von x, die homöomorph sind zu Umgebungen V von y, V' von y' und W von $f(y) = g(y')$ über die jeweilige Strukturabbildung. Alle U_i schneiden $\rightsquigarrow$ oBdA alle gleich. $\rightsquigarrow$ $f: V \to W$, $f': V' \to W$ Homöomorphismen. Auf $V \times_W V' = (V \times V') \cap Y \times_Z Y' \subseteq Y \times_Z Y'$ offen sind die Projektionen nach V, V' homöomorph

$\rightsquigarrow$ $(y,y') \in V \times_W V' \xrightarrow{\sim} V \xrightarrow{\sim} U' \ni x$, also $Y \times_Z Y' \in \mathcal{C}_X$

Sei jetzt $(U_i \xrightarrow{f_i} U)_{i\in I}$ eine Überdeckung und $V \xrightarrow{g} U$ ein Morphismus. Sei $x \in V$. $(f_i)_{i\in I}$ ist surjektive Familie, also ist $g(x) = f_i(y)$ für ein $i \in I$ und $y \in U_i$. $\Rightarrow (y,x) \in U_i \times_U V$ mit $\pi_2(y,x) = x$. Damit ist $(U_i \times_U V \longrightarrow V)_{i\in I}$ eine surjektive Familie, also eine Überdeckung.

3. Die Inklusion einer offenen Menge ist ein lokaler Homöomorphismus, also ist $\mathrm{Ouv}\,X$ eine Unterkategorie von $\mathcal{C}_X$. Sei $i^0 : \mathrm{Ouv}\,X \to \mathcal{C}_X$ die Inklusion. i^0 ist stetig:

- $(U_i \xrightarrow{j_i} U)_{i\in I}$ Überdeckung in $\mathrm{Ouv}\,X$ $\Leftrightarrow$ $U = \bigcup_i U_i = \bigcup_i j_i(U_i)$

  $\Leftrightarrow (U_i \xrightarrow{j_i} U)_i$ surjektive Familie, also Überdeckung in $\mathcal{C}_X$
- Faserprodukt von $V_1 \longrightarrow U \longleftarrow V_2$ in $\mathrm{Ouv}\,X$ ist

  $$V_1 \cap V_2 = \{x \in V_1 : x \in V_2\} \cong \{(x,y) \in V_1 \times V_2 : x = y\} = V_1 \times_U V_2 \quad \text{in } \mathcal{C}_X$$

Teste Voraussetzungen von 2.:

(a) $\mathrm{Ouv}\,X$ und $\mathcal{C}_X$ sind beides volle Unterkategorien von Top/X, also ist die Inklusion volltreu

(b) siehe oben

(c) $(Y \xrightarrow{f} X) \in \mathcal{C}_X$. Zu jedem $y \in Y$ gibt es Umgebungen V_y von y und U_y von $f(y)$ mit $f : V_y \xrightarrow{\sim} U_y$. $\rightsquigarrow (U_y \xrightarrow{f^{-1}} V_y)_{y\in Y}$ surjektive Familie mit $U_y \in \mathrm{Ouv}\,X$.

Aufgabe 2: $\mathrm{Sh}\, \mathcal{C}_X \cong \mathrm{Sh}(\mathrm{Ouv}\, X) = \mathrm{Sh}\, X.$