Blatt 7

Aufgabe 1 Sei M flach über A, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit Urbild $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

$B_\mathfrak{q}$ ist eine A-Algebra und alle Elemente aus $A \setminus \mathfrak{p}$ sind Einheiten in $B_\mathfrak{q}$ $\Rightarrow$ $(B_\mathfrak{q})_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{q}$.

Als Funktoren $A_\mathfrak{p}\text{-Mod} \to B_\mathfrak{q}\text{-Mod}$ gilt:

$$M_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{p}} - = M \otimes_B B_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{p}} - = M \otimes_B (B_\mathfrak{q})_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} - = M \otimes_B B_\mathfrak{q} \otimes_A A_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} -$$

$$= M \otimes_B B_\mathfrak{q} \otimes_A - = B_\mathfrak{q} \otimes_B M \otimes_A - = (M \otimes_A -)_\mathfrak{q}$$

$M \otimes_A -$ und Lokalisierung an $\mathfrak{q}$ sind exakt

$\Rightarrow M_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{p}} -$ exakt $\Rightarrow M_\mathfrak{q}$ flach über $A_\mathfrak{p}$.

Sei nun $M_\mathfrak{q}$ flach über $A_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{q}$. Nach oben ist dann $(M \otimes_A -)_\mathfrak{q}$ exakt für alle $\mathfrak{q}$. Sei $N' \overset{i}{\hookrightarrow} N$ ein injektiver Homomorphismus von A-Moduln und sei $P \in B\text{-Mod}$ der Kern von

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes i} M \otimes_A N.$$

$$P_\mathfrak{q} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lok. exakt}}}{=} \operatorname{Ker}\left((M \otimes_A N')_\mathfrak{q} \longrightarrow (M \otimes_A N)_\mathfrak{q} \right) \underset{\substack{(M \otimes_A -)_\mathfrak{q} \\ \text{exakt}}}{=} \Big(M \otimes_A \underbrace{\operatorname{Ker}(N' \hookrightarrow N)}_{0} \Big)_\mathfrak{q} = 0$$

für alle $\mathfrak{q}$ $\Rightarrow P = 0$

Also erhält $M \otimes_A -$ injektive Morphismen. $\Rightarrow M$ flach über A.

Aufgabe 2

1. $\boxed{\Rightarrow}$ ist klar.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei $A \xrightarrow{f} B$ flach mit $\varphi: \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ trifft alle maximalen Ideale. Sei $M \neq 0$ ein A-Modul und $x \in M$, $x \neq 0$. Sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ der Annihilator von x.

$Ax \longrightarrow M$ ist injektiv, also nach Flachheit auch

$$B/\mathfrak{a}B = B \otimes_A A/\mathfrak{a} \cong B \otimes_A Ax \longrightarrow B \otimes_A M.$$

$\mathfrak{a}$ ist in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ enthalten.

$$\mathfrak{a}B \subseteq \mathfrak{m}B = f^{-1}(\mathfrak{q})B \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq B \Rightarrow B/\mathfrak{a}B \neq 0$$

Also auch $B \otimes_A M \neq 0$.

Setze jetzt $M = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \neq 0$ für ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

$$\overset{\text{oben}}{\Longrightarrow} B \otimes_A A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \neq 0$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \operatorname{Spec}(B \otimes_A A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

2.+3. Sei $\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{q})$ mit $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$. Nach Aufgabe 1 mit $M = B$ ist $A_\mathfrak{p} \longrightarrow B_\mathfrak{q}$ flach. Das eindeutige maximale Ideal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$ wird von $\mathfrak{q}B_\mathfrak{q}$ getroffen. Nach 1. ist also $\operatorname{Spec} B_\mathfrak{q} \to \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$ surjektiv. Damit hat $\mathfrak{p}'A_\mathfrak{p}$ ein Urbild $\mathfrak{q}'B_\mathfrak{q}$ für ein

$\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$ und es gilt $\varphi(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$

<u>Aufgabe 3</u> 1. Sei $A \to A/I$ flach.

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0 \quad \text{ist exakt} \quad // \; A/I \otimes_A -$$

$$0 \to (A/I) \otimes_A I \to A/I \otimes_A A \to (A/I) \otimes_A (A/I) \to 0 \quad \text{ist exakt}$$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & \| & & \| \\ I/I^2 & & A/I & & A/I \big/ \underline{I \cdot (A/I)}_{\,0} \\ & & & & \| \\ & & & & A/I \end{array}$$

$$\Rightarrow I/I^2 = \operatorname{Ker}\left(A/I \xrightarrow{id} A/I\right) = 0 \quad \Rightarrow I^2 = I$$

I ist endlich erzeugt, also gibt es nach <u>Cayley-Hamilton-Trick</u>

ein $e \in I$ mit $(1-e)I = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} M \text{ endl. erzeugter } A\text{-Modul, } I \subseteq A \\ \text{Ideal mit } IM = M \\ \Rightarrow \exists\, a \in 1+I : aM = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow ea = a \;\; \forall a \in I$

Insbesondere $e^2 = e$. Außerdem $(e) \subseteq I$, da $e \in I$ und $I \subseteq (e)$, denn $a = ea \in (e)$ für $a \in I$. $\Rightarrow I = (e)$

Sei $J = (1-e)$. Dann ist $I + J = A$ und für $x \in I \cap J$ gilt:

$x = (1-e)y$, $\quad x = ex = e(1-e)y = (e-e^2)y = 0 \quad \rightsquigarrow I \cap J = 0.$

Nach Chinesischem Restsatz ist $A = A/I\cap J = A/I \times A/J$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A/I \sqcup \operatorname{Spec} A/J$ und $\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$

ist einfach die Einbettung in die erste Komponente.

2. Offene Einbettungen sind flach, weil ja die Halme identisch sind!

Sei umgekehrt $X \xrightarrow{f} Y$ eine flache abgeschlossene Einbettung. Für $U \subseteq Y$ affin-offen und $V = f^{-1}(U)$ auch affin-offen ist $f: V \to U$ eine offene Einbettung nach 1. Offene Einbettung kann man lokal überprüfen $\Rightarrow$ $f: X \to Y$ offene Einbettung.

<u>Aufgabe 4</u> 1. Sei zunächst $M = A^n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(A^n, A) \otimes_A Q &\xrightarrow{\sim} A^n \otimes_A Q \xrightarrow{\sim} Q^n \\
f \otimes q &\longmapsto (f(e_i))_{1 \le i \le n} \otimes q \longmapsto (f(e_i)q)_{1 \le i \le n}
\end{aligned}$$

$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 an Stelle i)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(A^n, Q) &\xrightarrow{\sim} Q^n \\
g &\longmapsto (g(e_i))_{1 \le i \le n}
\end{aligned}$$

Damit kommutiert

$$\begin{tikzcd}
f \otimes q \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & (m \mapsto f(m)q) \arrow[dl, mapsto] \\
\mathrm{Hom}_A(M, A) \otimes_A Q \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathrm{Hom}_A(M, Q) \arrow[dl, "\sim"] \\
& Q^n & \\
& (f(e_i)q)_i &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \alpha$ Isomorphismus

Sei jetzt M endlich präsentiert. Wähle eine exakte Sequenz

$A^s \longrightarrow A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0$. $\qquad$ $\mathrm{Hom}_A(-,A)$ und $\mathrm{Hom}_A(-,Q)$ linksexakt.

$$\rightsquigarrow\ 0 \to \mathrm{Hom}_A(M,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^r,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^s,Q)$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^r,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^s,A)$$ sind exakt

Q flach

$$\Rightarrow\ 0 \to \mathrm{Hom}_A(M,A) \otimes_A Q \to \mathrm{Hom}_A(A^r,A) \otimes_A Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^s,A) \otimes_A Q$$ exakt.

Also gibt's ein Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,A) \otimes_A Q \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_A(A^r,A) \otimes_A Q \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{A^r}", "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_A(A^s,A) \otimes_A Q \arrow[d, "\alpha_{A^s}", "\sim"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,Q) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^r,Q) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^s,Q)
\end{tikzcd}$$

Fünferlemma: α_M Isomorphismus.

2. Sei $g \in \mathrm{Hom}_A(M,Q)$. Schreibe $\alpha^{-1}(g) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes q_i \in \mathrm{Hom}_A(M,A) \otimes_A Q$

$\Rightarrow$ Für $m \in M$ gilt:

$$g(m) = \alpha\Big(\sum_{i=1}^n f_i \otimes q_i\Big)(m) = \sum_{i=1}^n f_i(m) q_i = \Big(A^n \xrightarrow{\langle q_i \rangle} Q\Big) \circ \Big(M \xrightarrow{(f_i)} A^n\Big)(m),$$

also $g = \Big(M \xrightarrow{(f_i)} A^n \xrightarrow{\langle q_i \rangle} Q\Big)$

3. Seien $(M \xrightarrow{f} Q), (N \xrightarrow{g} Q) \in \mathcal{C}$. Dann gibt es ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "f"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
& M \oplus N \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & Q \\
N \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "g"'] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

und $M \oplus N$ ist endlich präsentiert.

$\Rightarrow (M \oplus N \longrightarrow Q) \in \mathcal{C}$ und

$(M \xrightarrow{f} Q)$, $(N \xrightarrow{g} Q)$ bilden sich dahin ab.

Nun sei ein Diagramm
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[dr, "f"'] & N \arrow[d, "g"] \\ & Q \end{tikzcd}$$
gegeben. M sei erzeugt von $(m_i)_{1\leq i\leq n}$.

Sei π die Projektion von N auf $N/\langle \varphi(m_i)-\psi(m_i) : 1\leq i\leq n\rangle =: \bar{N}$.

$\bar{N}$ ist endlich präsentiert. Wegen $\pi\circ\varphi(m_i) = \pi\circ\psi(m_i)$ für alle i ist $\pi\circ\varphi = \pi\circ\psi$. Außerdem faktorisiert g durch $\bar{N}$ wegen $g(\varphi(m_i)-\psi(m_i)) = f(m_i)-f(m_i) = 0$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[drr, "f"'] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & \bar{N} \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Also $\bar{N} \in \mathcal{C}$ mit $\pi\circ\varphi = \pi\circ\psi$.

Damit ist $\mathcal{C}$ filtriert.

Die Elemente $M \xrightarrow{f} Q$ aus $\mathcal{C}$ bilden einen Kokegel und liefern einen Morphismus $\varinjlim_{(M,f)\in\mathcal{C}} M \xrightarrow{\Phi} Q$.

$m \in M$ zu $(M,f)\in\mathcal{C}$ $\longmapsto f(m)$

Φ injektiv: Sei $(M,f)\in\mathcal{C}$, $m\in M$ mit $0 = \Phi(x) = f(x)$

Dann faktorisiert f als $M \xrightarrow{\pi} M/Ax \xrightarrow{\bar{f}} Q$

Mit M ist auch M/Ax endlich präsentiert

$\leadsto (M/Ax, \bar{f}) \in \mathcal{C}$. Wegen $\pi(x) = 0$ ist x Null als Element von $\varinjlim_{\mathcal{C}} M$.

Φ surjektiv: Sei $q \in Q$. Das gibt $A \xrightarrow{\cdot q} Q$. Es ist $(A, \cdot q) \in \mathcal{E}$ und das Bild von $1 \in A$ in $\varinjlim_{(A,f)\in\mathcal{E}} M$ geht unter Φ auf $1 \cdot q = q$.

4. Nach 2. ist $\mathcal{D}$ Kofinal in $\mathcal{E}$, also ist auch $\mathcal{D}$ filtriert mit

$$\varinjlim_{\mathcal{D}} M = \varinjlim_{\mathcal{E}} M = Q.$$