Blatt 8

Aufgabe 1

3. $\mathbb{A}^n \xrightarrow{u} \mathbb{A}^1$ kommt von $u^\#: k[T] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$.
$T \longmapsto f$

<u>Fall I:</u> $\deg f \leq 0$, also $f = a \in k$. Für den generischen Punkt

$\eta = (0) \in \mathbb{A}^n$ gilt:

$u(\eta) = u^{\#,-1}((0)) = \ker u^\# = (T-a) \in \operatorname{mSp} k[T]$.

Jedes $x \in \mathbb{A}^n$ ist Spezialisierung von η.

$\eta \rightsquigarrow x \Rightarrow u(\eta) \rightsquigarrow u(x) \underset{u(\eta)\text{ abgeschlossen}}{\Rightarrow} u(x) = u(\eta) = (T-a)$

Also u konstant, Bild ist der abgeschlossene Punkt $(T-a)$.

<u>Fall II:</u> $\deg f > 0$. Dann ist $u^\#$ injektiv, also

$u(\eta) = \ker u^\# = (0) \Rightarrow (0) \in \mathbb{A}^1$ liegt im Bild von u

Sei $\mathfrak{q} \in (\operatorname{Spec} k[T]) \setminus \{(0)\} = \operatorname{mSp} k[T]$

$\overset{k[T]}{\underset{\text{HIR}}{\Rightarrow}} \mathfrak{q} = (p)$ mit $p \in k[T]$ irreduzibel.

Es ist $\deg p(f) > 0$ und $k[X_1, \dots, X_n]$ ist faktoriell

$T = f$ setzen in p

$\Rightarrow p(f)$ hat irreduziblen Faktor $q \in k[X_1, \dots, X_n]$.

Sei $\mathfrak{q} := (q) \in \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$.

$\mathfrak{q} \ni p(f) = u^\#(p) \Rightarrow p \in u^{\#,-1}(\mathfrak{q}) = u(\mathfrak{q})$

$\Rightarrow y \subseteq u(\mathfrak{q}) \underset{y \text{ maximal}}{\Rightarrow} y = u(\mathfrak{q})$ liegt in Bild von u

Also u surjektiv, insbesondere ist das Bild abgeschlossen

1. 3. mit $n=1$. Zeige noch, dass in Fall II u endlich (und damit auch abgeschlossen ist)

$$u^\#: k[T] \longrightarrow k[X]$$
$$T \longmapsto f$$

Sei $n := \deg f > 0$. Dann wird $k[X]$ als $k[T]$-Modul erzeugt von $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}$. Es genügt, zu zeigen, dass alle X^m als $k[T]$-Linearkombinationen davon geschrieben werden können.

Induktion nach m. $\underline{m<n}$: ✓

$\underline{m \geq n}$: Schreibe $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

$$T \cdot X^{m-n} = f \cdot X^{m-n} = a_n X^m + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^{m-n+i}$$

$$\Rightarrow X^m = a_n^{-1}\left(T X^{m-n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^{m-n+i}\right)$$

ist nach Induktion $k[T]$-Linearkombination der $1, X, \dots, X^{n-1}$.

2. Wenn $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{v} \mathbb{A}^n \xrightarrow{p_i} \mathbb{A}^1$ endlich surjektiv ist für ein i, ist v endlich nach Kürzungsregel, also insbesondere abgeschlossen.

Ansonsten ist $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{v} \mathbb{A}^n \xrightarrow{p_i} \mathbb{A}^1$ konstant für alle i.

Auf Ringebene haben wir $k[T] \xrightarrow{p_i^\#} k[X_1,\dots,X_n] \xrightarrow{v^\#} k[Y]$

$$T \longmapsto X_i \longmapsto v^\#(X_i)$$

Im Beweis von 3. ist man in Fall I, also $v^\#(X_i) = a_i \in K$.

$$\Rightarrow v^\#: k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow k[Y]$$
$$X_i \longmapsto a_i$$

$\ker v^\# = (X_i - a_i : 1 \leq i \leq n)$ ist ein maximales Ideal. Wie in 3. folgt, dass v konstant ist mit Bild $(X_i - a_i : 1 \leq i \leq n)$. Das ist ein abgeschlossener Punkt.

4. $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{u} \mathbb{A}^2$ zum Ringhomomorphismus $u^\#: k[X,Y] \longrightarrow k[X,Y]$

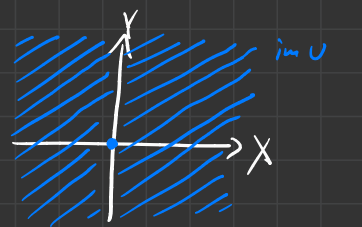
$$X \longmapsto X$$
$$Y \longmapsto XY$$

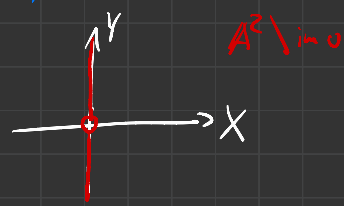
generischer Punkt

$u(\eta) = u^{\#,-1}((0)) = \ker u^\# = (0) = \eta$

$u(\underbrace{(0,0)}_{''}) = u^{\#,-1}((X,Y)) = (X,Y) = (0,0)$

$\Rightarrow (0,0),\ \eta \in \operatorname{im} u$





Beh: generischer Punkt $y = (X)$ der Y-Achse liegt nicht im Bild.

Ang. $u^{\#,-1}(y) = (X)$. $\Rightarrow X = u^\#(X) \in y \Rightarrow u^\#(Y) = XY \in y$

$\Rightarrow Y \in u^{\#,-1}(y) = (X)$ $\lightning$

Also $(0,0), \eta \in \operatorname{im} U$, $y \notin \operatorname{im} U$

$\eta \rightsquigarrow y$, also $\operatorname{im} U$ nicht abgeschlossen unter Spezialisierung

$\Rightarrow$ $\operatorname{im} U$ nicht abgeschlossen

$y \rightsquigarrow (0,0)$, also $\operatorname{im} U$ nicht abgeschlossen unter Generisierung

$\Rightarrow$ $\operatorname{im} U$ nicht offen.

Aufgabe 2

1. $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} A$ mit einer R-Algebra.

Schreibe $A = R[T_i : i \in I] / (f_j : j \in J)$.

$$h_Y(U) = \operatorname{Hom}_X(U, Y) \cong \operatorname{Hom}_R(A, \mathcal{O}_U(U)) \cong \{ g \in \operatorname{Hom}_R(R[I], \mathcal{O}_U(U)) : g(f_j) = 0 \ \forall j \}$$

$$\cong \{ \underline{a} = (a_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_U(U)^I : f_j(\underline{a}) = 0 \ \forall j \}$$

$$= \{ \underline{a} \in \mathbb{G}_a^I(U) : f_j(\underline{a}) = 0 \ \forall j \}$$

$$= \operatorname{Eq}\left(\mathbb{G}_a^I(U) \overset{0}{\underset{\underline{a} \mapsto (f_j(\underline{a}))_{j \in J}}{\rightrightarrows}} \mathbb{G}_a^J(U) \right) = \operatorname{Eq}\left(\mathbb{G}_a^I \overset{0}{\underset{(f_j)_j}{\rightrightarrows}} \mathbb{G}_a^J \right)(U)$$

$\Rightarrow h_Y = \operatorname{Eq}\left(\mathbb{G}_a^I \rightrightarrows \mathbb{G}_a^J \right)$ ist Egalisator von Morphismen zwischen Garben, also selbst eine Garbe.

2. Sei $(V_k \subseteq X)_k$ eine affin-offene Überdeckung von X. Für $Z \in \mathrm{Sch}/X$ ist dann $(Z_{V_k} \subseteq Z)_k$ mit $Z_{V_k} = Z \times_X V_k$ eine offene Überdeckung.

Das gibt eine exakte Sequenz (Verklebung von Morphismen):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_X(Z,Y) \arrow[r] & \prod_k \mathrm{Hom}_X(Z_{V_k},Y) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & \prod_{kl} \mathrm{Hom}_X(Z_{V_{kl}},Y) \arrow[d, equal] \\ & & \prod_k \mathrm{Hom}_{V_k}(Z_{V_k},Y_{V_k}) & \prod_{kl} \mathrm{Hom}_{V_{kl}}(Z_{V_{kl}},Y_{V_{kl}}) \end{tikzcd}$$

$V_{kl}=V_k\cap V_l$

$\rightsquigarrow$ $0 \to h_Y(Z) \to \prod_k h_{Y_{V_k}}(Z_{V_k}) \rightrightarrows \prod_{kl} h_{Y_{V_{kl}}}(Z_{V_{kl}})$ exakt.

Sei $Z\in Sch/X$ und $(U_i\to Z)_i$ eine étale Überdeckung.

Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & h_Y(Z) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i h_Y(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod_{ij} h_Y(U_i\times_Z U_j) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \prod_k h_{Y_{V_k}}(Z_{V_k}) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_{ik} h_{Y_{V_k}}(U_{i,V_{kl}}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_{ijk} h_{Y_{V_k}}(U_{i,V_k}\times_{Z_{V_k}} U_{j,V_k}) \\ 0 \arrow[r] & \prod_{kl} h_{Y_{V_{kl}}}(Z_{V_{kl}}) \arrow[r] & \prod_{ikl} h_{Y_{V_{kl}}}(U_{i,V_{kl}}) & \end{tikzcd}$$

Die Spalten sind exakt nach oben. Die mittlere Zeile ist exakt nach 1. Diagrammjagd: $\longrightarrow$ ist injektiv.

$\Rightarrow$ h_Y ist separierte Prägarbe

Das gilt dann auch für $h_{Y_{V_{kl}}}$ als Prägarbe auf $Sch/X_{V_{kl}}$, also ist $\longrightarrow$ injektiv. Nochmal Diagrammjagd: Erste Zeile exakt

$\Rightarrow h_Y$ Garbe.

<u>Aufgabe 3</u>

1. Sei $V \xrightarrow{f} X$ eine Abbildung mit $f\circ\pi_1 = f\circ\pi_2 : V\times_U V \longrightarrow V \longrightarrow M$.

   Finde $\bar{f}: U \to X$ mit $\bar{f}g = f$ für $V \xrightarrow{g} U$.

   Sei $z \in U$. g ist surjektiv, also gibt es $x \in V$, $g(x) = z$.

$$\begin{tikzcd} V\times_U V \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] \arrow[dr] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & U \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   $\Rightarrow \bar{f}(z) = \bar{f}(g(x)) = f(x)$. Das zeigt Eindeutigkeit von $\bar{f}$.

   Sei $y \in V$ ein weiteres Urbild von z. Wegen $g(x) = g(y)$ gibt es einen Punkt $p \in V\times_U V$ mit $\pi_1(p) = x$, $\pi_2(p) = y$.

   $\Rightarrow f(x) = f(\pi_1(p)) = f(\pi_2(p)) = f(y)$.

   Also gibt die Definition $\bar{f}(z) := f(x)$ eine wohldefinierte Abbildung $U \to X$ mit der geforderten Eigenschaft.

2. Notation wie oben. Wie oben erhält man $\bar{f}: U \to M$.

   Zeige, dass $\bar{f}$ stetig ist. Für $W \subseteq X$ offen ist

$$\bar{f}^{-1}(W) \underset{g \text{ surj.}}{=} g(g^{-1}(\bar{f}^{-1}(W))) = \underset{\text{offen}}{g}(\underset{\text{stetig}}{f^{-1}}(W)) \quad \text{offen.}$$

3. Analog zu 2.2 ist oBdA X affin.

Étale Morphismen sind offen, also gibts im Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times_U V \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

ein stetiges f, das das Diagramm kommutativ macht. Mache daraus in eindeutiger Weise einen Schemamorphismus. Wähle affin-offene Überdeckung $(Y_i \to Y)_i$. Dann genügt es, $f|_{U_i} : U_i \to Y_i$ mit $U_i = f^{-1}(Y_i)$ eindeutig zu Schemamorphismen zu machen. Wegen Eindeutigkeit kann man dann verkleben.

$\rightsquigarrow$ oBdA auch Y affin. Nach 2.2 für die einelementige Überdeckung $V \to U$ ist $h_Y(U) \to h_Y(V) \rightrightarrows h_Y(V \times_U V)$ ein Egalisator. Das heißt gerade, dass in

$$\begin{tikzcd} V \times_U V \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

der blaue Pfeil existiert.

Also ist $V \times_U V \rightrightarrows V \to U$ ein Koegalisator von Schemata.

Das bedeutet gerade, dass $0 \to h_Y(U) \to h_Y(V) \rightrightarrows h_Y(V \times_U V)$ exakt ist, also das Garbenaxiom für h_Y für einelementige Überdeckungen. Außerdem ist h_Y sowieso eine Zariskigarbe $\overset{VL}{\Longrightarrow}$ h_Y étale Garbe.