Blatt 9

Aufgabe 1 1. $H \leq G$ offen. Sei $(g_c)_{c \in G/H}$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von H in G.

$$\Rightarrow G = \dot{\bigcup_{c \in G/H}} g_c H \Rightarrow G \setminus H = \dot{\bigcup_{\substack{c \in G/H \\ c \neq eH}}} g_c H \text{ ist offen.}$$

Offen als Translat von H

$\Rightarrow H$ abgeschlossen

2. Wie oben: $G \setminus H = \dot{\bigcup_{\substack{c \in G/H \\ c \neq eH}}} g_c H$ ist endliche Vereinigung von abgeschlossenen

Translat von H
$\rightarrow$ abgeschlossen

Mengen $\Rightarrow G \setminus H$ abgeschlossen $\Rightarrow H$ offen

3. $\boxed{\Leftarrow}$ ist 2.

$\boxed{\Rightarrow}$ abgeschlossen nach 1. Wie oben: $G = \dot{\bigcup_{c \in G/H}} g_c H$. Das ist eine offene Überdeckung von $G \overset{G}{\underset{\text{Kpt.}}{\Longrightarrow}}$ Es gibt eine endliche Teilüberdeckung. Die Überdeckung ist disjunkt und hat keine leeren Teile, also gibt es keine echte Teilüberdeckung.

$\Rightarrow (G:H) = |G/H| < \infty$

4. $\boxed{\Rightarrow}$ Sei $H \leq G$ offen. G ist kompakt, also ist

$$[L^H : K] = (G:H) < \infty \text{ nach 3.}$$

Galoistheorie

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei $H \leq G$ abgeschlossen mit $[L^H : K] < \infty$.

$\Rightarrow (G:H) < \infty$ nach Galoistheorie $\overset{2.}{\Rightarrow}$ H offen.

<u>Aufgabe 2</u>

1. Schritt 1: Zeige $\varprojlim_{i \in I} F(i) \neq \emptyset$, wenn $F(i) \neq \emptyset \; \forall i$

Statte jedes $F(i)$ mit der diskreten Topologie aus.

$\# F(i) < \infty \Rightarrow F(i)$ kompakt.

Tychonow $\Rightarrow X = \prod_{i \in I} F(i)$ kompakt.

$$\varprojlim_{i \in I} F(i) = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in X : \begin{matrix} F(j) \xrightarrow{F_{ij}} F(i) \\ x_j \longmapsto x_i \end{matrix} \; \forall i,j \in I,\ i \leq j \right\}$$

$$= \bigcap_{\substack{i,j \in I \\ i \leq j}} \underbrace{\left\{ (x_i)_{i \in I} \in X : F_{ij}(x_j) = x_i \right\}}_{X_{ij}}$$

X_{ij} ist das Urbild von $\{(x,y) \in F(i) \times F(j) : F_{ij}(y) = x\} \subseteq \overset{\text{diskret}}{F(i) \times F(j)}$

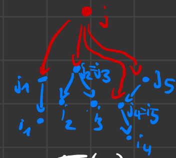
unter $(\pi_i, \pi_j) : X \longrightarrow F(i) \times F(j)$, also abgeschlossen.

$\Rightarrow U_{ij} = X \setminus X_{ij}$ offen.

Angenommen $\varprojlim_{i \in I} F(i) = \emptyset \Rightarrow X = X \setminus \varprojlim_{i \in I} F(i) = \bigcup_{i \leq j} X \setminus X_{ij} = \bigcup_{i \leq j} U_{ij}$

$\overset{X \text{ kpt}}{\Rightarrow} \quad X = \bigcup_{\alpha=1}^{n} U_{i_\alpha j_\alpha}$ für gewisse $i_\alpha, j_\alpha \in I$, $i_\alpha \leq j_\alpha$.

$\Rightarrow \emptyset = X \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{n} U_{i_\alpha j_\alpha} = \bigcap_{\alpha=1}^{n} X_{i_\alpha j_\alpha}$



Wähle ein $j \in I$ mit $j \geq j_\alpha \ \forall \alpha$ und ein $x_0 \in F(j)$.

Definiere $x \in X$, durch $x_{i_\alpha} = F_{i_\alpha j}(x_0)$,

$x_{j_\alpha} = F_{j_\alpha j}(x_0)$, x_i beliebig für $i \neq i_\alpha, j_\alpha$.

$$\rightsquigarrow \quad F_{i_\alpha j_\alpha}(x_{j_\alpha}) = F_{i_\alpha j_\alpha}(F_{j_\alpha j}(x_0)) = F_{i_\alpha j}(x_0) = x_{i_\alpha}$$

Also $x \in \bigcap_{\alpha=1}^{n} X_{i_\alpha j_\alpha} = \emptyset$ ↯

Schritt 2: π_i surjektiv.

Sei $i \in I$ und $x_i \in F(i)$ fest. Definiere

$I_{/i} := \{ j \in I : j \geq i \}$ und $\tilde{F}(j) = \{ x_j \in F(j) : F_{ij}(x_j) = x_i \}$ für

$j \in I_{/i}$. Für $j, j' \in I_{/i}$, $j \leq j'$ und $x_{j'} \in \tilde{F}(j')$ ist

$F_{ij}(F_{jj'}(x_{j'})) = F_{ij'}(x_{j'}) = x_i \Rightarrow x_j \in \tilde{F}(j)$. Also erhält

man eine Einschränkung $\tilde{F}_{jj'} : \tilde{F}(j') \to \tilde{F}(j)$ von $F_{jj'}$.

$\rightsquigarrow$ Funktor $\tilde{F} : I_{/i}^{op} \to \mathrm{Sets}$

$$\begin{tikzcd}
F(j') \arrow[r, "F_{jj'}"] & F(j) \\
\tilde{F}(j') \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\tilde{F}_{jj'}"'] & \tilde{F}(j) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$I_{/i}$ ist filtriert, $\tilde{F}(j) = F_{ij}^{-1}(x_i) \neq \emptyset$

für $j \in I_{/i}$, da F_{ij} surjektiv ist.

Nach Schritt 1 ist $\varprojlim_{j \in I_{/i}} \tilde{F}(j) \neq \emptyset$.

Wähle $y = (y_j)_{j \in I_{/i}} \in \varprojlim_{j \in I_{/i}} \tilde{F}(j)$. Das hat insbesondere $y_i \in \tilde{F}(i) = \{x_i\}$,

also $y_i = x_i$. Zu beliebigem $j \in I$ wähle $j' \in I_{/i}$, $j \leq j'$

und definiere $y_j := F_{jj'}(y_{j'})$. Das ist wie üblich wohldefiniert

und gibt ein kompatibles System $\overline{y} = (y_j)_{j \in I} \in \varprojlim_{j \in I} F(j)$

$\rightsquigarrow \pi_i(\overline{y}) = y_i = x_i$, also wird $x_i \in F(i)$ von π_i getroffen.

2. $I := \{ M \subseteq \mathbb{R} \text{ endlich} \}$, filtriert geordnet bezüglich $\subseteq$.

$F : I^{op} \longrightarrow \text{Sets}$, $M \longmapsto \{ f : M \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ injektiv} \}$

Zu $M \subseteq N$ ist $F_{MN} : F(N) \longrightarrow F(M)$ die Einschränkung.

Die F_{MN} sind surjektiv: Sei $(M \xhookrightarrow{f} \mathbb{Z}) \in F(M)$.

Da M endlich ist, ist $\mathbb{Z} \setminus f(M)$ unendlich, $N \setminus M$ hingegen ist endlich. $\Rightarrow$ Es gibt $N \setminus M \xhookrightarrow{g} \mathbb{Z} \setminus f(M)$.

Zusammen gilt das $N = M \sqcup (N \setminus M) \xhookrightarrow{f \sqcup g} f(M) \sqcup (\mathbb{Z} \setminus f(M)) = \mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow f \sqcup g \in F(N)$ mit $F_{MN}(f \sqcup g) = f$.

Allerdings ist <u>keines</u> der π_M surjektiv: $F(M)$ ist nicht leer, denn zu einer endlichen Menge M gibts eine injektive Abbildung nach $\mathbb{Z}$. $\varprojlim_{M \in I} F(M)$ hingegen ist leer:

Angenommen, $(f_M)_{M\in I} \in \varprojlim_{M\in I} F(M)$ existiert! Definiere

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) := f_{\{x\}}(x)$.

f kann nicht injektiv sein, also ist $f(x)=f(y)$ mit $x \neq y$.

$$f_{\{x,y\}}(x) = f_{\{x,y\}}\big|_{\{x\}}(x) = f_{\{x\}}(x) = f(x) = \ldots = f_{\{x,y\}}(y)$$

$\Rightarrow f_{\{x,y\}}$ nicht injektiv $\lightning$

$\varprojlim_{M\in I} F(M)$ besteht aus den Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die auf endlichen Mengen injektiv sind. Das sind genau injektive Abbildungen $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, also keine.

Aufgabe 3

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Sei $m \in M$. $l_g: G \longrightarrow G\times M \longrightarrow M$

$$g \longmapsto (g,m) \longmapsto gm$$

ist stetig als Komposition stetiger Abbildungen.

$\Rightarrow$ offen ist $l_g^{-1}(m) = \{ g\in G : gm = m \} = \mathrm{Stab}_G(m)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Die Einpunktmengen $\{m\} \subseteq M$, $m\in M$ bilden eine Basis von M. Also reicht $\sigma^{-1}(m)$ offen, $\sigma: G\times M \to M$.

$$(g,m) \mapsto gm$$

Für $n \in Gm$ wähle $g_n \in G$ mit $g_n \cdot n = m$.

$$\sigma^{-1}(m) = \{ (g,n) \in G\times M : gn = m \} = \{ (g,n) \in G\times Gm : gn = m \}$$

$gn=m$ geht nur, wenn n,m in gleicher Bahn

$$= \bigcup_{n \in Gm} \{(g,n) : g \in G,\ gn = m\} = \bigcup_{n \in Gm} \{g \in G : gn = g_n^{-1} n\} \times \{n\}$$

$$= \bigcup_{n \in Gm} \{g \in G : g_n g \cdot n = n\} \times \{n\} = \bigcup_{n \in Gm} g_n^{-1} \cdot \underbrace{\mathrm{Stab}_G(n)}_{\text{offen nach Voraussetzung}} \times \{n\}$$

$g_n^{-1}\mathrm{Stab}_G(n)$ ist Translat einer offenen Menge, also offen in G.

$\{n\} \subseteq M$ ist offen, da M diskret $\rightsquigarrow \sigma^{-1}(m)$ offen.

2. • $G \times L \to L$ stetig bezüglich Krulltopologie:

Sei $\alpha \in L$, zeige $H = \mathrm{Stab}_G(\alpha)$ offen. Wähle eine endliche Galoiserweiterung

L'/K mit $L' \subset L$, $\alpha \in L'$. Proj. $\pi_{L'} : G \longrightarrow G' = \mathrm{Gal}(L'/K)$, $\sigma \longmapsto \sigma|_{L'}$ ist stetig.

$H = \{\sigma \in G : \sigma\alpha = \alpha\} = \{\sigma \in G : \pi_{L'}(\sigma)(\alpha) = \alpha\} = \{\sigma \in G : \pi_{L'}(\sigma) \in \mathrm{Stab}_{G'}(\alpha)\} = \pi_{L'}^{-1}(\mathrm{Stab}_{G'}(\alpha))$

$\rightsquigarrow H$ offen, da in G' alles offen ist

• Sei $G \times L \to L$ stetig bezüglich τ auf G. Zeige, dass $G \xrightarrow{\pi_{L'}} G' = \mathrm{Gal}(L'/K)$ mit L'/K endl. Gal. stetig ist. Sei α primitives Element von L'.

Sei $\bar\sigma \in G'$ und $\sigma \in G$ ein Urbild.

$\pi_{L'}^{-1}(\{\bar\sigma\}) = \sigma\pi_{L'}^{-1}(\{\mathrm{id}\}) = \sigma \cdot \mathrm{Gal}(L/L') = \sigma \cdot \{\tau \in G : \tau|_{L'} = \mathrm{id}\} = \sigma \cdot \{\tau \in G : \tau(\alpha) = \alpha\}$

↖ Basiselement für G'

$= \sigma \cdot \mathrm{Stab}_G(\alpha)$ ist offen.

3. Schritt 1: $X = \mathbb{A}^1 \Rightarrow X(L) = L$

Operation $G \times L \to L$ ist stetig nach 2.

Schritt 2: $X = \mathbb{A}^n \Rightarrow X(L) = L^n$

Stabilisator von $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L^n$ ist

$\{\sigma \in G : \sigma\alpha_i = \alpha_i\ \forall i\} = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{\mathrm{Stab}_G(\alpha_i)}_{\text{offen nach Schritt 1}}$, also offen.

Schritt 3: $X = \operatorname{Spec} A$, A endlich erzeugte k-Algebra

$\rightsquigarrow$ X abg. Unterschema von $\mathbb{A}^n$

$\Rightarrow$ $X(L) \subseteq \mathbb{A}^n(L)$, also ist Operation auf $X(L)$ stetig nach Schritt 2.

Schritt 4: X lokal von endlichem Typ $/k$.

Sei $(x: \operatorname{Spec} L \to X) \in X(L)$. Wähle eine affin-offene Umgebung $U = \operatorname{Spec} A$ des zugrundeliegenden topologischen Punktes mit A endlich erzeugter k-Algebra.

Es ist $U(L) \subseteq X(L)$ und $U(L)$ ist stabil unter der G-Operation, denn $y \longmapsto \sigma \cdot y = y \circ \operatorname{Spec} \sigma$ ändert ja nichts am topologischen Punkt, nur an der Abbildung von Ringgarben.

$\Rightarrow \operatorname{Stab}_G(x \in X(L)) = \operatorname{Stab}_G(x \in U(L))$ ist offen nach Schritt 3

$\Rightarrow$ G-Operation auf $X(L)$ stetig.

<u>Aufgabe 4</u>

<u>Φ wohldefinierter Funktor</u>

$A \in \acute{E}t(k)$. $\Phi(A) = \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k^s)$ wird G_k-Menge durch $\sigma \cdot f = \sigma \circ f$ für $\sigma \in G_k$, $f \in \Phi(A)$. Dass $\Phi(A)$ endlich ist, kommt später.(Δ) Stetigkeit der Operation: Sei $f \in \Phi(A)$, $f: A \to k^s$.

$\dim_k A < \infty \Rightarrow \dim_k \operatorname{im} f < \infty$. Also gibt es einen Zwischenkörper

$k^s/L/k$ mit $\operatorname{im} f \subseteq L$, $[L:k] < \infty$.

$\Rightarrow \operatorname{Stab}_{G_k}(f) = \{\sigma \in G_k : \sigma|_{\operatorname{im} f} = \mathrm{id}\} \supseteq \{\sigma \in G_k : \sigma|_L = \mathrm{id}\} = G_L$, offen in G_k.

$A \xrightarrow{\varphi} B$ liefert $\varphi^* : \Phi(B) \longrightarrow \Phi(A)$, $f \longmapsto f \circ \varphi$. $\rightsquigarrow$ Funktor

<u>Ψ ist wohldefinierter Funktor</u>

$M \in \mathcal{C}_f(G_k)$. $\Psi(M) = \mathrm{Hom}_{G_k}(M, k^s)$ wird k^s-Algebra

durch punktweise Operationen. Dass $\Psi(M)$ étale ist, kommt

später.(∇) Ein Morphismus $M \xrightarrow{\varphi} N$ liefert

$\varphi^* : \Psi(N) \longrightarrow \Psi(M)$, $f \longmapsto f \circ \varphi$. $\rightsquigarrow$ Funktor

<u>Φ macht $\times$ zu $\sqcup$</u>

Sei $f \in \Phi(A \times B) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A \times B, k^s)$.

Sei $e_1 := f(1,0)$ und $e_2 := f(0,1)$.

$\Rightarrow e_1 e_2 = f((1,0)\cdot(0,1)) = f(0,0) = 0$ in k^s

$\Rightarrow e_1 = 0 \vee e_2 = 0$

Wenn $e_2 = 0$, ist $(e_2) = 0 \times B$ im Kern von f, also faktorisiert

f durch $A \times B / 0 \times B \cong A$ $\rightsquigarrow f \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k^s) = \Phi(A)$

Wenn $e_1 = 0$, dann ist analog $f \in \Phi(B)$. Beides gleichzeitig geht nicht, denn denn wäre $e_1 = 0 = e_2$, also $1 = e_1 + e_2 = 0$ in k^s ↯.

Also $\Phi(A \times B) = \Phi(A) \sqcup \Phi(B)$.

Ψ macht $\sqcup$ zu $\times$

$$\Psi(M \sqcup N) = \mathrm{Hom}_{G_k}(M \sqcup N, k^s) \overset{\text{UE von } \sqcup}{=} \mathrm{Hom}_{G_k}(M, k^s) \times \mathrm{Hom}_{G_k}(N, k^s) = \Psi(M) \times \Psi(N)$$

$\Psi(M)$ ist étale (∇) und $\dim_k \Psi(M) = \# M$

Wegen $\Psi : \sqcup \mapsto \times$ reicht das für transitive M,

also $M = G_k / G_L$ mit $[L:k] < \infty$ (Damit M endlich ist)

$$\Psi(M) = \mathrm{Hom}_{G_k}(G_k / G_L, k^s) = \{ f \in \mathrm{Hom}_{G_k}(G_k, k^s) : f(\sigma\tau) = f(\sigma) \ \forall \sigma \in G_k, \tau \in G_L \}$$

eindeutig festgelegt durch $f(\mathrm{id}) =: \alpha$

$$\cong \{ \alpha \in k^s : \sigma\tau\alpha = \sigma\alpha \ \forall \sigma \in G_k, \tau \in G_L \}$$

$$= \{ \alpha \in k^s : \tau\alpha = \alpha \ \forall \tau \in G_L \} = (k^s)^{G_L} \underset{\text{Galoistheorie}}{=} L$$

L ist endlich separabel über k, also étale.

$$\dim_k \Psi(M) = [L:k] = (G_k : G_L) = \# M$$

$\Phi(A)$ ist endlich (Δ) und $\# \Phi(A) = \dim_k A$

Wegen $\Phi : \times \longmapsto \sqcup$ ist oBdA $A = L$ ein Körper, separabel und endlich über k.

$$\# \Phi(A) = \# \mathrm{Hom}_k(L, k^s) = [L:k]_s \underset{L/k \text{ separabel}}{=} [L:k] = \dim_k A < \infty$$

$\underline{\Psi \circ \Phi \cong \mathrm{Id}}$ Es gibt eine natürliche Transformation

$$\eta : \mathrm{Id}_{\acute{E}t(k)} \longrightarrow \Psi \circ \Phi$$

$$\eta_A : A \longrightarrow \Psi(\Phi(A)) = \mathrm{Hom}_{G_k}\left(\mathrm{Hom}_k(A, k^{sep}), k^{sep}\right)$$
$$x \longmapsto \left(ev_x : f \longmapsto f(x)\right)$$

Rechnen: ev_x ist G_k-äquivariant, η_A ist Hom von k-Algebren, η ist natürlich.

Zeige, dass η ein Iso ist. $\Psi \circ \Phi$ schickt Produkte auf Produkte, also reicht es, η_L Iso zu zeigen für separable endliche Körpererweiterungen L/k.

Injektivität: Sei $ev_x = \eta_L(x) = \eta_L(y) = ev_y$, $x, y \in L$.

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \quad \forall f \in \Phi(L) = \mathrm{Hom}_k(L, k^s).$$

$\Phi(L)$ ist nicht leer, wähle $f \in \Phi(L)$. Als Homomorphismus von Körpern injektiv $\Rightarrow$ $f(x) = f(y)$ impliziert $x = y$.

Surjektivität folgt aus $\dim_k \Psi(\Phi(L)) = \# \Phi(L) = \dim_k L$

$\underline{\Phi \circ \Psi \cong \mathrm{Id}}$ Es gibt eine natürliche Transformation

$$\varepsilon : \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_f(G_k)} \longrightarrow \Phi \circ \Psi$$

$$\varepsilon_M : M \longrightarrow \Phi(\Psi(M)) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_{G_k}(M, k^s), k^s)$$
$$x \longmapsto \left(ev_x : f \longmapsto f(x)\right)$$

Rechnen: ev_x ist Hom von k-Algebren, ε_M ist G_k-äquivariant,

ε_M ist natürlich in M.

Zeige noch, dass ε ein Iso ist. $\Phi \circ \Psi$ schickt disjunkte Vereinigungen auf disjunkte Vereinigungen. Reicht: ε_M Iso für M transitive G_k-Menge. M ist endlich, also $M = G_k / G_L$ für ein L/k endlich separabel.

ε_M injektiv: Sei $ev_{\sigma G_L} = \varepsilon_M(\sigma G_L) = \varepsilon_M(\tau G_L) = ev_{\tau G_L}$ mit $\sigma, \tau \in G_k$. Dann ist $f(\sigma G_L) = f(\tau G_L)$ für alle $f \in \Psi(M) = \mathrm{Hom}_{G_k}(G_k/G_L, k^s)$.

Wegen L/k endlich separabel ist $L = k[\alpha]$ für ein $\alpha \in L$.

Definiere
$$f : G_k/G_L \longrightarrow k^s,$$
$$gG_L \longmapsto g(\alpha)$$

Das ist wohldefiniert, da $g(\alpha) = \alpha$ für $g \in G_L$. Außerdem f G_k-äquivariant $\Rightarrow f \in \Psi(M)$

$$\Rightarrow \sigma(\alpha) = f(\sigma G_L) = f(\tau G_L) = \tau(\alpha)$$

$$\Rightarrow \tau^{-1}\sigma(\alpha) = \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau^{-1}\sigma \text{ fixiert } k[\alpha] = L$$

$$\Rightarrow \tau^{-1}\sigma \in G_L \quad \Rightarrow \sigma G_L = \tau G_L$$

Surjektivität folgt jetzt aus $\# \Phi(\Psi(M)) = \dim_k \Psi(M) = \# M$.